ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, P. ERDŐS, L. FEJÉR, CH. JORDÁN, L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI, B. SZ.-NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS VII.

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1956

ACTA MATHEMATICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21

*

Az Acta Mathematica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, I., Fő utca 32. Bankszámla 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

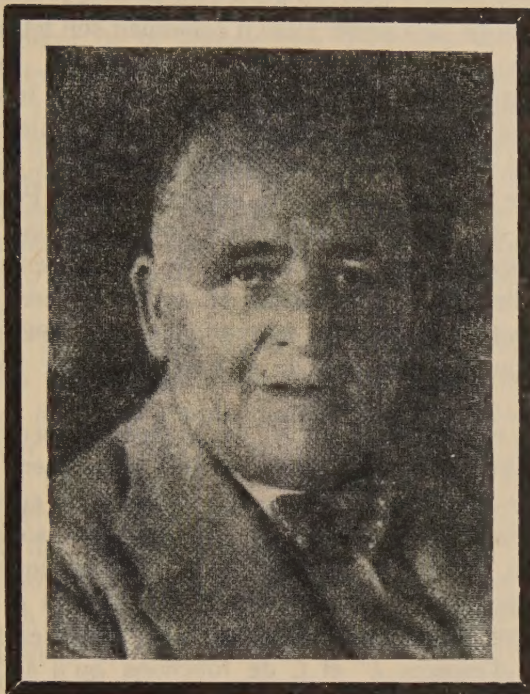
Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen „*Kultura*" (Budapest, I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandvertretungen und Kommissionären.

5856-35



FRÉDÉRIC RIESZ
1880—1956

La rédaction des Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae a la douleur de faire savoir que le professeur

FRÉDÉRIC RIESZ,

président de la Section de Mathématique et de Physique de l'Académie des Sciences de Hongrie, membre correspondant de l'Institut de France et de la Société Royale de Physiographie de Suède, docteur honoris causa de l'Université Loránd Eötvös de Budapest, de l'Université de Szeged et de l'Université de Paris, président d'honneur de la Société Mathématique János Bolyai est décédé après une longue et douloureuse maladie le 28 février 1956.

FRÉDÉRIC RIESZ est né le 22 janvier 1880 à Győr. Après avoir fait ses études supérieures à l'Ecole Polytechnique de Zurich et aux Universités de Budapest et de Göttingen, il a obtenu le doctorat de la Faculté des lettres et des

sciences de l'Université de Budapest. Il travaillait comme professeur de lycée à Lőcse et à Budapest jusqu'à 1911, lorsqu'il a été nommé professeur à l'Université de Kolozsvár. A partir de l'année 1920 il continuait son travail comme professeur à l'Université de Szeged. En 1946 il a été appelé par l'Université de Budapest à la chaire de la Théorie des Fonctions où il travaillait malgré sa maladie de plus en plus s'aggravissante jusqu'aux derniers mois de sa vie.

Dès le début de sa carrière scientifique, FRÉDÉRIC RIESZ acquit une brillante renommée dans le monde des mathématiciens. Pendant les dizaines d'années écoulées dès lors, ses découvertes ont exercé une influence si profonde et si considérable sur la littérature de la mathématique et elles ont ouvert une nouvelle voie aux recherches en autant de directions qui ont provoqué les plus vifs mouvements scientifiques que FRÉDÉRIC RIESZ a été reconnu un personnage dirigeant de premier ordre par les mathématiciens du monde entier.

Chacun de ses ouvrages traite de graves problèmes et promet des fruits ultérieurs. Ses plus importants travaux concernent le théorème de Riesz—Fischer, les équations fonctionnelles linéaires, les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnus et les fonctions sousharmoniques. En réalité, il s'agit ici de quatre chapitres de la mathématique dont quelques-uns sont dûs entièrement à FRÉDÉRIC RIESZ, tandis qu'il a développé essentiellement les autres en les enrichissant par des théorèmes fondamentaux.

Les notions d'espaces L^p et C de fonctions qu'il a créées et les propriétés fondamentales des fonctionnelles linéaires et des équations fonctionnelles linéaires de ces espaces qu'il a découvertes ont fournit la matière qui a servi comme fondement à une série de notions (espace linéaire normé complet, fonctionnelle linéaire, transformation linéaire) et de résultats qui constituent la base de l'Analyse Fonctionnelle. Son livre *„Leçons d'Analyse Fonctionnelle"*, écrit en collaboration avec son élève B. SZŐKEFALVI-NAGY, constitue une synthèse de ses idées et de ses méthodes et il montre la richesse et la fécondité de celles-ci. Ses recherches sur les fonctions sousharmoniques, notion créée également par lui, ont donné naissance à un développement imprévisible de la théorie du potentiel.

FRÉDÉRIC RIESZ fut l'un des premiers qui ont créé la notion d'espace topologique général en formulant en 1908 un système d'axiomes pour définir cette notion; la notion d'espace qu'il a introduite embrasse presque tous les espaces dont l'étude conduit à des résultats intéressants en Topologie et constitue jusqu'à nos jours une des plus importantes classes d'espaces topologiques.

FRÉDÉRIC RIESZ a eu une admirable capacité pour saisir l'essentiel des idées, des notions et des méthodes; c'est pourquoi il a réussi d'une part à

donner des généralisations importantes de nombreux théorèmes connus, de l'autre à simplifier les démonstrations parfois très compliquées de bien de résultats fondamentaux de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Il suffit de citer dans cet ordre d'idées la construction de la théorie de l'intégrale de Lebesgue sans s'appuyer sur la théorie de la mesure, la démonstration de la dérivabilité presque partout des fonctions monotones, la démonstration (trouvée en collaboration avec L. FEJÉR) du théorème fondamental de la représentation conforme, la démonstration des théorèmes qui concernent la représentation spectrale des transformations linéaires autoadjointes de l'espace de Hilbert et de quelques théorèmes importants de la théorie ergodique.

Les travaux de FRÉDÉRIC RIESZ ont réussi à intéresser et à saisir les plus éminents mathématiciens de notre époque. Il ne s'agit pas d'une indication cursive ou d'une simple citation, mais d'un développement essentiel et exigeant un dur travail. Des mathématiciens comme H. BOHR, G. H. HARDY, F. HAUSDORFF, H. LEBESGUE, J. E. LITTLEWOOD et E. PICARD ont consacré des périodes entières de recherche aux théories de FRÉDÉRIC RIESZ et ils les ont enrichies par des résultats importants.

La grandiosité de son oeuvre scientifique ne nous permet pas de le faire connaître en détail, tandis qu'un exposé esquissé dans ses grandes lignes serait à peine capable d'en rendre compte. Nous nous bornons à faire mention d'un fait considérable par rapport au théorème de Riesz—Fischer. Ce théorème a trouvé de nombreuses et importantes applications, dues à FRÉDÉRIC RIESZ et à d'autres, dans la théorie des séries de Fourier, des équations différentielles, intégrales et fonctionnelles et dans la théorie des fonctions à variable complexe. En même temps, ce théorème de Riesz—Fischer fournit le fondement à la démonstration du fait de grande importance que les théories dues à HEISENBERG et à SCHRÖDINGER de la mécanique quantique sont équivalentes.

FRÉDÉRIC RIESZ a servi son peuple de toute sa force comme savant, professeur, rédacteur de périodique et président de la Section de Mathématique et de Physique de l'Académie des Sciences de Hongrie. Sa perte nous dépouille d'un des plus brillants personnages scientifiques de notre siècle.

EIN SUMMATIONSSATZ FÜR ORTHOGONALREIHEN

Von

G. ALEXITS (Budapest), Mitglied der Akademie

1. Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges im endlichen Intervall $[a, b]$ definiertes Orthonormalsystem. Das schärfste bisher erzielte Resultat[1] bezüglich der (C, α)-Summierbarkeit von Orthogonalreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

lautet, wenn über das System $\{\varphi_n(x)\}$ nichts vorausgesetzt wird, folgenderweise: Die Reihe (1) ist für ein $\alpha > 0$ fast überall (C, α)-summierbar, wenn ihre Koeffizienten der Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty \tag{2}$$

genügen, und diese Bedingung kann in voller Allgemeinheit nicht mehr verbessert werden. Wir wollen nun zeigen, daß man dieser Summationsbedingung eine zwar speziellere, in gewissen Fällen jedoch schärfere an die Seite stellen kann, wenn man die Abnahme der Koeffizientenfolge durch eine entsprechende monotone Majorantenfolge einschränkt. Unser Resultat ist folgendes:

Bezeichne $\{q_n\}$ eine monoton abnehmende Folge positiver Zahlen mit der Eigenschaft

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty. \tag{3}$$

Ist $c_n = O(q_n)$, so ist die Orthogonalreihe (1) *für jedes $\alpha > 0$ fast überall (C, α)-summierbar.*

2. Es ist leicht eine Orthogonalreihe anzugeben, deren Koeffizienten zwar unserer Summationsbedingung, nicht aber der Bedingung (2), ja sogar

[1] D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales. II, *Fundamenta Math.*, 8 (1926), S. 56—108. S Kaczmarz, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), S. 99—105. Vgl. S. Kaczmarz—H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1931), S. 189—190.

nicht einmal einer Bedingung der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) < \infty$$

genügen, wenn $\{\lambda(n)\}$ eine beliebig vorgegebene positive, monoton nach ∞ wachsende Zahlenfolge bedeutet. Wählen wir nämlich die Indexfolge $\{m_n\}$ derart, daß $\{\sqrt{m_{n+1}}-\sqrt{m_n}\}$ monoton nach ∞ wächst, ferner $\lambda(m_n) \geqq n^3$ ist, und setzen sodann

$$c_k = \frac{1}{(\sqrt{m_{n+1}}-\sqrt{m_n})n^2} \qquad (k = m_n+1, \ldots, m_{n+1}).$$

Dann ist $\{c_n\}$ monoton abnehmend und

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \frac{c_k}{\sqrt{k}} = \frac{1}{(\sqrt{m_{n+1}}-\sqrt{m_n})n^2} O(\sqrt{m_{n+1}}-\sqrt{m_n}) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

also $\sum \frac{c_n}{\sqrt{n}}$ konvergent. Dagegen ist

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} c_k^2 \lambda(k) \geqq \frac{m_{n+1}-m_n}{(\sqrt{m_{n+1}}-\sqrt{m_n})^2 n} = \frac{\sqrt{m_{n+1}}+\sqrt{m_n}}{(\sqrt{m_{n+1}}-\sqrt{m_n})n} > \frac{1}{n},$$

also divergiert die Reihe $\sum c_n^2 \lambda(n)$.

3. Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz, in welchem die Monotonie der Folge $\{q_n\}$ nicht gefordert wird:

Ist $\sum c_n^2$ konvergent und $c_n = O(q_n)$, wobei die positiven Zahlen q_n den Bedingungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,|\Delta q_n| < \infty \qquad (\Delta q_n = q_n - q_{n+1}), \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q_{2^n}^2 < \infty \tag{5}$$

genügen, so ist (1) *für jedes $\alpha > 0$ fast überall (C, α)-summierbar.*

Unser Hilfssatz ist nach bekannten Sätzen[2] mit der Behauptung gleichwertig, daß die Teilfolge $\{s_{2^n}(x)\}$ der Partialsummen $s_n(x)$ der Reihe (1) fast überall konvergiert. Allerdings gibt es eine fast überall konvergente Teilfolge $\{s_{2^{\nu_n}}(x)\}$. Es bleibt zu zeigen, daß die Beziehung

$$s_{2^m}(x) - s_{2^{\nu_n}}(x) = o_x(1)$$

[2] Vgl. S. Kaczmarz—H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 189—190.

für $\nu_n < m \leqq \nu_{n+1}, m \to \infty$ außer den Punkten einer Nullmenge richtig ist. Bei Beachtung von $c_n = O(q_n)$ läßt sich jede Partialsumme $s_N(x)$ in der Form

$$s_N(x) = \sum_{k=1}^{N} q_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

schreiben, wo $\alpha_k = O(1)$ ist. Wenn wir also

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

setzen, so ergibt sich durch Abelsche Umformung die Abschätzung

$$(6) \qquad |s_{2^m}(x) - s_{2^{\nu_n}}(x)| \leqq \sum_{k=2^{\nu_n}+1}^{2^m} |S_k(x)|\,|\varDelta q_k| + q_{2^m}|S_{2^m}(x)| + q_{2^{\nu_n}}|S_{2^{\nu_n}}(x)|.$$

Nach der Bunjakowski—Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\int_a^b |S_k(x)|\,dx \leqq \sqrt{(b-a)\sum_{l=0}^{k} \alpha_l^2} = O(\sqrt{k}),$$

aus (4) folgt daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varDelta q_k| \int_a^b |S_k(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} O(\sqrt{k})\,|\varDelta q_k| < \infty.$$

Die Reihe $\sum |S_k(x)|\,|\varDelta q_k|$ ist also fast überall konvergent und mithin

$$(7) \qquad \sum_{k=2^{\nu_n}+1}^{2^m} |S_k(x)|\,|\varDelta q_k| = o_x(1) \qquad (m \to \infty)$$

außer höchstens einer Nullmenge N_1. Aus (5) ergibt sich weiter

$$\sum_{l=1}^{\infty} q_{2^l}^2 \int_a^b S_{2^l}^2(x)\,dx = \sum_{l=1}^{\infty} O(2^l) q_{2^l}^2 < \infty.$$

Die Reihe $\sum q_{2^l}^2 S_{2^l}^2(x)$ ist also fast überall konvergent, es gibt daher eine Nullmenge N_2, so daß außer N_2 die Beziehung

$$(8) \qquad q_{2^m}|S_{2^m}(x)| + q_{2^{\nu_n}}|S_{2^{\nu_n}}(x)| = o_x(1) \qquad (m \to \infty)$$

besteht. Aus (6), (7) und (8) erhalten wir somit für $\nu_n < m \leqq \nu_{n+1}, m \to \infty$ die Abschätzung

$$s_{2^m}(x) - s_{2^{\nu_n}}(x) = o_x(1)$$

ausgenommen höchstens die Punkte der Nullmenge $N_1 + N_2$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4. Wir leiten nun unseren Summationssatz aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz her. Zunächst ergibt sich wegen (3) und der angenommenen Monotonie der Folge $\{q_n\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\,\Delta q_k < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{q_k}{\sqrt{k}} = O(1),$$

also ist (4) erfüllt. Nach einem Cauchyschen Reihensatz[3] ergibt sich weiter infolge der Monotonie von $\left\{\frac{q}{\sqrt{n}}\right\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n}\, q_{2^n} < \infty,$$

umsomehr besteht daher die Beziehung (5). Um auch $\sum c_n^2 < \infty$ zu beweisen, beachten wir die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k\Delta q_k^2 + nq_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k(q_k + q_{k+1})\Delta q_k + nq_n^2.$$

Wegen der Monotonie folgt aus (3) nach einem klassischen Abelschen Satz $k\frac{q_k}{\sqrt{k}} \to 0$, d. h. $q_k = o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, daher ist

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\,\Delta q_k + o(1) = O(1).$$

Daraus folgt wegen $c_n = O(q_n)$ die Konvergenz der Reihe $\sum c_n^2$. Alle Bedingungen des Hilfssatzes sind also erfüllt, womit unser Summationssatz bewiesen ist.

(Eingegangen am 14. Januar 1956.)

ОДНА ТЕОРЕМА О СУММИРУЕМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Г. Алексич (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ любая ортонормированная система функций, определенная на конечном отрезке $[a, b]$. Известна доказанная Меньшовым и Кацмарзом теорема, согласно которой ортогональный ряд

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

[3] Vgl. K. Knopp, *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, 3. Ausg. (Leipzig, 1931), S. 121.

почти всюду (C, α)-суммируем $(\alpha > 0)$, если

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty,$$

и это условие в общем случае уже не может быть улучшено.

Сейчас мы дадим условие суммируемости, которое в некоторых случаях точнее. Речь идет о следующей теореме:

Ортогональный ряд (1) почти всюду (C, α)-суммируем $(\alpha > 0)$, если $c_n = O(q_n)$, где $\{q_n\}$ положительная, монотонно убывающая последовательность чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty.$$

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА БИКОМПАКТНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

А. ПРЕКОПА (Будапешт), академик А. РЕНЬИ (Будапешт)
и К. УРБАНИК (Вроцлав)

Пусть G—коммутативная бикомпактная топологическая группа. Последовательность $\nu_1, \nu_2, \ldots$ мер Радона (т. е. регулярных мер заданных на σ-алгебре F всех борелевских подмножеств группы G) слабо сходится к мере Радона ν, если для произвольной непрерывной (комплекснозначной) функции f на группе G имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_G f(x)\nu_n(dx) = \int_G f(x)\nu(dx).$$

В настоящей заметке доказывается следующая теорема, являющаяся решением проблемы, поставленной вторым из авторов.

Т е о р е м а. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин на группе G и

$$\mathbf{P}(\xi_k \in U) > 0 \tag{1}$$

для всех непустых открытых подмножеств U группы G, то последовательность вероятностных мер

$$\mu_n(E) = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \in E) \qquad (E \in F)$$

слабо сходится к мере Хаара μ группы G, нормированной условием $\mu(G) = 1$. Иначе говоря, предельное распределение для сумм $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ является равномерным.

Приводим известные частные случаи этой теоремы.

1. При $G = K$, где K—мультипликативная группа комплексных чисел, равных по модулю единице с естественной топологией, теорема вытекает из результатов П. Л е в и [5].

Поскольку в доказательстве общей теоремы мы используем этот частный случай, то для удобства читателей приведем здесь другое его доказательство, предполагая лишь, что распределение величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ нерешетчатое. Именно, мы докажем следующую лемму:

Л е м м а. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$—последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин на прямой, с функцией распре-

деления $F(x)$. Если $F(x)$ — нерешетчатое распределение и

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \pmod 1 \qquad (0 \leqq \zeta_n < 1),$$

то имеет место формула

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta_n < x) = x \quad \text{для} \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Доказательство леммы. Обозначим через $F_n(x)$ функцию распределения величины ζ_n. Положим

$$a_{r,n} = \int_0^1 e^{2\pi i r x} dF_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots; r = 0, \pm 1, \ldots). \tag{2}$$

Из независимости одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, в силу того, что характеристические функции величин $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ и ζ_n совпадают в точках $2\pi r$ $(r = 0, \pm 1, \ldots)$, следует равенство

$$a_{r,n} = (a_{r,1})^n \qquad (n = 1, 2, \ldots; r = 0, \pm 1, \ldots). \tag{3}$$

Поскольку $F(x)$ нерешетчатое распределение, то его характеристическая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)| < 1 \quad \text{для} \quad t \neq 0$$

(см. [2], стр. 64—65). Таким образом в силу формулы $a_{r,1} = \varphi(2\pi r)$ получаем неравенство

$$|a_{r,1}| < 1 \quad \text{для} \quad r = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Отсюда и из формул (2) и (3) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{2\pi i r x} dF_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad r \neq 0, \\ 1 & \text{для} \quad r = 0. \end{cases}$$

Итак для произвольного тригонометрического полинома $f(x) = \sum_{r=-N}^{N} c_r e^{2\pi i r x}$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) dF_n(x) = \int_0^1 f(x) dx. \tag{4}$$

Поскольку всякую непрерывную функцию, принимающую равные значения в точках 0 и 1, можно равномерно приближать в интервале $0 \leqq x \leqq 1$ тригонометрическими полиномами, то формула (4) имеет место для всех непрерывных функций $f(x)$, для которых $f(0) = f(1)$. Если $g(x)$ характеристическая функция (в смысле теории множеств) интервала $[x_1, x_2)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют непрерывные функции f_1 и f_2, равные нулю в точках 0 и 1 и удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} & f_1(x) \leqq g(x) \leqq f_2(x), \\ & \int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx < \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Из неравенств

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 g(x)\,dF_n(x) \leqq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_2(x)\,dF_n(x) = \int_0^1 f_2(x)\,dx \leqq \int_0^1 g(x)\,dx + \varepsilon,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 g(x)\,dF_n(x) \geqq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_1(x)\,dF_n(x) = \int_0^1 f_1(x)\,dx \geqq \int_0^1 g(x)\,dx - \varepsilon$$

в силу произвольности ε следует

$$\lim_{n\to\infty} (F_n(x_2) - F_n(x_1)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(x)\,dF_n(x) = \int_0^1 g(x)\,dx = x_2 - x_1$$

для $0 < x_1 < x_2 < 1$. Отсюда получаем соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leqq \lim_{n\to\infty} (F_n(x) - F_n(x_2)) + \limsup_{n\to\infty} F_n(x_2) \leqq x - x_2 + 1,$$

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \geqq \lim_{n\to\infty} (F_n(x) - F_n(x_1)) = x - x_1$$

для $0 < x_1 < x < x_2 < 1$, из которых при $x_1 \to 0$ и $x_2 \to 1$ вытекает

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = x \quad \text{для} \quad 0 < x < 1.$$

Итак лемма доказана.

2. При $G = Z_r$, где Z_r — конечная циклическая группа порядка r с дискретной топологией, теорему доказали А. Дворецкий и И. Вольфовиц ([1], теорема 2); (см. также Дьиреш [3] и Воробьев [8]).

Доказательство теоремы. Пусть χ—произвольный непрерывный характер группы G. Известно, что либо $\chi(G) = K$, либо $\chi(G) = Z_r$, при некотором $r = 1, 2, \ldots$ (см. [6], стр. 251). Из непрерывности характера следует, что

$$\chi(\xi_1), \chi(\xi_2), \ldots$$

случайные величины со значениями в группе $\chi(G)$ и являются также независимыми. Из равенства

$$\mathbf{P}(\chi(\xi_k) \in V) = \mathbf{P}(\xi_k \in \chi^{-1}(V))$$

следует, что $\chi(\xi_1), \chi(\xi_2), \ldots$ — одинаково распределенные случайные величины и в силу предположения (1)

$$\mathbf{P}(\chi(\xi_k) \in V) > 0$$

для всех непустых открытых подмножеств V группы $\chi(G)$.

Введем обозначение

$$\mathbf{P}_{n,\chi}(E) = \mathbf{P}(\chi(\xi_1)\chi(\xi_2)\cdots\chi(\xi_n) \in E).$$

Из леммы и теоремы Дворецкого и Вольфовица получаем, что меры $\mathbf{P}_{n,\chi}$ при $n \to \infty$ слабо сходятся к мере Хаара m_χ группы $\chi(G)$.

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\chi(G)} h(bu)P_{n,\chi}(du)=\int\limits_{\chi(G)} h(bu)m_\chi(du)=\int\limits_{\chi(G)} h(u)m_\chi(du) \tag{5}$$

для произвольного элемента b группы $\chi(G)$ и произвольной непрерывной функции h, заданной на группе $\chi(G)$.

Пусть f—непрерывная функция на группе G. Из аппроксимационной теоремы Ф. Пэтера—Г. Вейля (см. [6] и [7]) следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ существует конечная линейная комбинация характеров

$$W(x)=\alpha_1\chi_1(x)+\alpha_2\chi_2(x)+\cdots+\alpha_k\chi_k(x),$$

обладающая свойством

$$|f(x)-W(x)|<\varepsilon$$

для всех $x\in G$. Отсюда получаем следующие оценки:

$$\left|\int\limits_G f(x+a)\mu_n(dx)-\int\limits_G f(x)\mu_m(dx)\right|\leqq\int\limits_G\left|f(x+a)-W(x+a)\right|\mu_n(dx)+$$
$$+\int\limits_G\left|f(x)-W(x)\right|\mu_m(dx)+\left|\int\limits_G W(x+a)\mu_n(dx)-\int\limits_G W(x)\mu_m(dx)\right|\leqq$$
$$\leqq 2\varepsilon+\sum_{s=1}^{k}|\alpha_s|\left|\int\limits_G\chi_s(x+a)\mu_n(dx)-\int\limits_G\chi_s(x)\mu_m(dx)\right|.$$

Отсюда и из равенства

$$\int\limits_G\chi(x+a)\mu_n(dx)=\int\limits_{\chi(G)}\chi(a)uP_{n,\chi}(du)\qquad(n=1,2,\ldots)$$

в силу формулы (5) (при $b=\chi(a)$ и $h(u)=u$) следует неравенство

$$\left|\int\limits_G f(x+a)\mu_n(dx)-\int\limits_G f(x)\mu_m(dx)\right|<\varepsilon \tag{6}$$

для $n,m\geqq N(\varepsilon)$.

Всякой мере μ_n $(n=1,2\ldots)$ соответствует линейный функционал

$$L_n(f)=\int\limits_G f(x)\mu_n(dx),$$

являющийся элементом сопряженного пространства к пространству Банаха всех непрерывных функций на группе G. Поскольку μ_n—вероятностные меры, то функционалы L_n имеют норму 1 и в силу этого из (6) следует, что последовательность функционалов L_n слабо сходится к некоторому линейному функционалу L. В силу известных теорем функционал L имеет вид

$$L(f)=\int\limits_G f(x)\mu(dx),$$

где μ—мера Радона (см. [4], § 56).

Таким образом последовательность мер μ_n слабо сходится к мере μ. Из формулы (6) при $n, m \to \infty$ следует, что

$$\int_G f(x+a)\mu(dx) = \int_G f(x)\mu(dx)$$

для произвольной непрерывной функции f и произвольного элемента a группы G. Значит, μ является инвариантной мерой. Поскольку $\mu(G)=1$, то из единственности меры Хаара (см. [4], [7]) вытекает, что μ—нормированная мера Хаара на группе G. Итак, теорема доказана.

Заметим, что в доказательстве теоремы мы не пользовались существованием меры Хаара (теорему Вейля и другие теоремы, использованные нами, можно доказать без помощи меры Хаара (см. [9])). Таким образом из нашей теоремы вытекает существование меры Хаара, если только докажем (очевидно, не используя существования меры Хаара), что можно найти последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ на группе G, удовлетворяющих условиям теоремы. Легко видеть, что существование такой последовательности вытекает из существования хотя бы одной меры, удовлетворяющей условию (1). Существование такой меры тривиально для сепарабельных групп. Таким образом, установленную нами теорему можно рассматривать как теоретико-вероятностное доказательство существования меры Хаара на коммутативных, сепарабельных, бикомпактных группах.

Авторы благодарны Л. Пуканскому за его ценные замечания.

Математический Институт Академии Наук Венгрии,
Математический Институт Польской Академии Наук

(Поступило 11. I. 1956.)

Литература

[1] A. Dvoretzky and J. Wolfowitz, Sums of random integers reduced modulo m, *Duke Math. Journal*, 18 (1951), стр. 501—507.

[2] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин (Москва—Ленинград, 1949).

[3] Б. Дьиреш, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Сообщения Первого Конгресса Венгерских Математиков, (1952), стр. 741—758.

[4] P. R. Halmos, *Measure theory* (New-York, 1950).

[5] P. Lévy, L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, 67 (1939), стр. 1—40.

[6] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы (Москва, 1954).

[7] A. Weil, *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris, 1940).

[8] Н. Н. Воробьев, Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах, *Математический Сборник*, **34** (1) (1954), стр. 89—126.

[9] M. Cotlar and R. Ricabarra, On the existence of characters in topological groups, *Amer. Journal of Math.*, **76** (1954), стр. 375—388.

ON THE LIMITING DISTRIBUTION OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES IN COMMUTATIVE COMPACT TOPOLOGICAL GROUPS

By

A. Prékopa (Budapest), A. Rényi (Budapest) and K. Urbanik (Wrocław)

(Summary)

Let G denote a compact commutative topological group. The following theorem is proved:

If $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *are independent and equidistributed random variables with values belonging to* G, *and* $\mathbf{P}(\xi_k \in U) > 0$ *for every open, non-empty subset* U *of* G, *then the sequence of measures* $\mu_n(E) = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \in E)$, *defined for all Borel subsets of* G, *converges weakly to the Haar measure* μ *on* G, *normed by the condition* $\mu(G) = 1$.

The proof is based on the validity of the theorem for the following two special cases:

1. G is the multiplication group of the complex numbers $e^{i\vartheta}$ $(0 \leq \vartheta < 2\pi)$ which case has been considered previously by P. Lévy [5].

2. G is a finite cyclic group which case has been considered previously by A. Dvoretzky and J. Wolfowitz [1].

The proof makes use also of the theorem of F. Peter and H. Weyl. As there exist proofs of this theorem, which do not make use of the existence of the Haar measure (see e. g. [9]), the theorem proved in the present paper can be considered as containing a new proof of the existence of the Haar measure for commutative compact (separable) groups, by a probabilistic argument.

ON SECONDARY STOCHASTIC PROCESSES GENERATED BY RECURRENT PROCESSES

By
L. TAKÁCS (Budapest)
(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

Let us consider the random function

$$(1)\qquad \eta(t)=\sum_{0<t_n\leqq t} f(t-t_n, \chi_n),$$

defined for all moments $t>0$, where the time instants $\{t_n\}$ are random variables following some probability law and $\{\chi_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ is a sequence of equidistributed random variables which are independent of each other and of the t_n's. Let $\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\}=H(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ denote the common distribution function of the random variables χ_n and let $f(u, x)$ be a given function of two variables. Stochastic processes of the same type have been already investigated in some earlier papers of the author [9] and [10]. [9] deals with the special case when the instants $\{t_n\}$ are forming a Poisson process. In [10] we have investigated the process (1) in the case when the instants $\{t_n\}$ are forming a recurrent process. However, in [10] we have restricted ourselves to the special case

$$(2)\qquad f(u, x)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad u<0 \quad \text{or} \quad x<0, \\ xe^{-\alpha u} & \text{if} \quad u\geqq 0 \quad \text{and} \quad x\geqq 0, \end{cases}$$

α being a positive number.

The present paper contains the generalization of the results of [10] for the case when the form of the function $f(u, x)$ is arbitrary. In the present paper we always suppose $f(u, x)=0$ (if $u<0$), though this does not mean any restrictions. As in [10], we suppose that the sequence $\{t_n\}$ forms a *recurrent process*. This means that in the sequence $\{t_n\}$, the time differences $\xi_n=t_n-t_{n-1}$ $(n=1, 2, \ldots;\ t_0=0)$ are equidistributed independent positive random variables. Let now $\mathbf{P}\{\xi_n \leqq t\}=G(t)$ denote the common distribution function of the variables ξ_n $(n=1, 2, \ldots)$. From the positivity of the variables $\{\xi_n\}$ it follows that $G(0)=0$.

The above processes are extremely important for the theory of particle counters, as well as for the theoretical treatment of anode current fluctua-

tions in vacuum tubes, problems in communication theory and other physical problems. From the point of view of practical applications the stationary case is particularly important; i. e. the equilibrium state which develops after the process being in course since an infinitely long time. Therefore we introduce the following random function:

$$(3) \qquad \eta^*(t) = \sum_{-\infty < t_n \leq t} f(t - t_n, \chi_n),$$

where the summation has to be extended for all instants t_n which occurred before the instant t. We suppose that the time differences $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ are mutually independent equidistributed positive random variables with the common distribution function $G(t)$. We shall show that the process $\eta^*(t)$ exists under general conditions.

It is easy to see that if the process $\eta(t)$ shows a definite stochastic behaviour for $t \to \infty$, then the process $\eta^*(t)$ shows the same stochastic behaviour in every finite moment t.

In the sequel we deal first with the determination of the distribution function and of the moments of the process $\eta(t)$. We give conditions under which the limits of these quantities exist as $t \to \infty$ and we give the limiting values. Following this we deal with the problem of the existence of the process $\eta^*(t)$. We give the correlation function of the process $\eta^*(t)$ in possession of which using the results of A. KHINTCHINE [5] the harmonic analysis of the process $\eta^*(t)$ can be easily performed. It should be mentioned that in [10] we could not perform the harmonic analysis of the process $\eta^*(t)$ even in the special case of the function (2). Namely, for this purpose we need the knowledge of the behaviour of the process $\eta^*(t)$ also for signals which are more general than those in (2). Now we shall perform this analysis additionally.

We introduce the following notations: Let

$$(4) \qquad \mathbf{P}\{\eta(t) \leq x\} = F(t, x)$$

denote the distribution function of the random variable $\eta(t)$. If the limiting distribution function $\lim_{t \to \infty} F(t, x) = F^*(x)$ exists, then, for all t, $\eta^*(t)$ has the distribution function

$$(5) \qquad \mathbf{P}\{\eta^*(t) \leq x\} = F^*(x).$$

Furthermore, let

$$(6) \qquad \Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x F(t, x)$$

be the characteristic function of the variable $\eta(t)$ and, if the limiting distrib-

ution $F^*(x)$ exists, let us put

$$\Phi^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}dF^*(x). \tag{7}$$

We denote by $M_k(t)$ the k-th moment of the random variable $\eta(t)$, i. e.

$$M_k(t)=\mathbf{M}\{(\eta(t))^k\}=\int_{-\infty}^{\infty} x^k d_x F(t,x). \tag{8}$$

Especially, denote $M(t)$ the expectation and $D^2(t)$ the variance of $\eta(t)$, i. e. $M(t)=M_1(t)$ and $D^2(t)=M_2(t)-[M_1(t)]^2$. Finally, let us put $M_k=\lim\limits_{t\to\infty} M_k(t)$ and, especially, $M=\lim\limits_{t\to\infty} M(t)$ and $D^2=\lim\limits_{t\to\infty} D^2(t)$, provided that these limits exist.

§ 1. Investigation of the process $\eta(t)$

As regards the function $f(t,x)$ figuring in (1), we suppose only that it is a Borel measurable function of x for all t.

THEOREM 1. *Let us put*

$$\varphi(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(t,x)}dH(x). \tag{9}$$

Then $\Phi(t,\omega)$ can be determined from the integral equation

$$\Phi(t,\omega)=\int_0^t \Phi(t-x,\omega)\varphi(t-x,\omega)dG(x)+1-G(t). \tag{10}$$

PROOF. The validity of the integral equation (10) may be proved by separating the term according to the instant t_1 in the expression (1) of $\eta(t)$. Then, under the condition that $t_1=x$ holds, we have

$$\eta(t)=\begin{cases} f(t-x,\chi_1)+\bar{\eta}(t-x) & \text{if } x\leqq t,\\ 0 & \text{if } x>t.\end{cases} \tag{11}$$

Here the random variable $\bar{\eta}(t-x)$ is independent of $f(t-x,\chi_1)$ and the distribution of $\bar{\eta}(t-x)$ is the same as that of $\eta(t-x)$. Noticing this fact, the characteristic function of the conditional distribution of $\eta(t)$ under the condition $t_1=x$ can be given by

$$\Phi(t,\omega;x)=\begin{cases} \Phi(t-x,\omega)\varphi(t-x,\omega) & \text{if } x\leqq t,\\ 1 & \text{if } x>t\end{cases} \tag{12}$$

and, by integrating (12) with respect to $dG(x)$ from $x=0$ to $x=\infty$, $\Phi(t,\omega)$, the (unconditional) characteristic function of $\eta(t)$ will be obtained. Thus we obtain (10).

We note that if the limit $\lim_{t\to\infty}\Phi(t,\omega)=\Phi^*(\omega)$ exists and $\Phi^*(\omega)$ is continuous at $\omega=0$, then the limiting distribution $\lim_{t\to\infty}F(t,x)=F^*(x)$ also exists and its characteristic function is $\Phi^*(\omega)$. Knowing $\Phi^*(\omega)$ the distribution function $F^*(x)$ may be uniquely determined. (P. LÉVY's and H. CRAMÉR's theorem.)

For the solution of the integral equation (10) it is often useful to introduce the function $\Psi(t,\omega)=\Phi(t,\omega)\varphi(t,\omega)$. This function will satisfy the integral equation

$$\Psi(t,\omega)=\varphi(t,\omega)\left[\int_0^t\Psi(t-x,\omega)\,dG(x)+1-G(t)\right]. \tag{13}$$

Unfortunately, this equation can not be solved explicitly in general; consequently every special case needs a separate treatment.

Since the determination of $F(t,x)$ can not be performed in general, we have to restrict ourselves to the determination of the expectation, the variance and the moments of $\eta(t)$.

We introduce the following notations: let $m(t)$ be the expected number of events t_n occurring in the time interval $(0,t)$, i. e.

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t), \tag{14}$$

where $G_n(t)$ denotes the n-fold convolution of the distribution function $G(t)$ with itself. Further, let us put

$$\lambda_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t,x)]^j\,dH(x)\qquad (j=1,2,\ldots), \tag{15}$$

provided that the integrals (15) exist.

Now we shall prove some theorems concerning $\eta(t)$.

THEOREM 2. *For the expectation* $\mathbf{M}\{\eta(t)\}=M(t)$ *we have*

$$M(t)=\int_0^t\lambda_1(t-x)\,dm(x). \tag{16}$$

Furthermore, if $G(t)$ is not a lattice distribution function with finite mean value

$$\vartheta=\int_0^{\infty}t\,dG(t) \tag{17}$$

and $\lim_{t\to\infty} t\lambda_1(t)=0$, *then*

$$\lim_{t\to\infty} M(t)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty \lambda_1(t)\,dt, \tag{18}$$

provided that the integral in the right member of (18) *exists.*

PROOF. As it is well known, the expectation of a sum of random variables is equal to the sum of the expectations of the terms. Hence

$$\mathbf{M}\{\eta(t)\}=\sum_{n=1}^\infty \mathbf{M}\{f(t-t_n,\chi_n)\}. \tag{19}$$

(The restriction $t_n<t$ is taken into account automatically since $f(t,x)=0$ for $t<0$.) Here we have

$$\mathbf{M}\{f(t-t_n,\chi_n)\}=\int_0^t \lambda_1(t-x)\,dG_n(x). \tag{20}$$

Hence (16) follows by using (14).

Proving the second part of our theorem we quote a theorem of D. BLACKWELL [1] and J. L. DOOB [4], in which they have proved that if $G(t)$ is not a lattice distribution, then for any $h>0$ we have

$$\lim_{t\to\infty}[m(t+h)-m(t)]=\frac{h}{\vartheta}. \tag{21}$$

Let us write $M(t)$ in the form

$$M(t)=\int_0^{t/2} \lambda_1(t-x)\,dm(x)+\int_{t/2}^t \lambda_1(t-x)\,dm(x); \tag{22}$$

using (21) it can be shown that

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t/2}^t \lambda_1(t-x)\,dm(x)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty \lambda_1(x)\,dx \tag{23}$$

and, by virtue of the conditions stated, for sufficiently large t we have $|t\lambda_1(t)|<\varepsilon$ for any $\varepsilon>0$. Consequently, choosing t sufficiently large, we shall have

$$\left|\int_0^{t/2}\lambda_1(t-x)\,dm(x)\right|\leqq\varepsilon\,\frac{m(t/2)}{t/2}. \tag{24}$$

Since $\lim_{t\to\infty} m(t)/t=1/\vartheta$, the first term of the right member in (22) tends to zero if $t\to\infty$ and thus (18) is proved.

We note that we could have started also from the integral equation

$$M(t)=\int_0^t[\lambda_1(t-x)+M(t-x)]\,dG(x), \tag{25}$$

which is easy to prove; this way would lead us to the same results.

THEOREM 3. *For the variance* $\mathbf{D}^2\{\eta(t)\}=D^2(t)$ *we have*

$$D^2(t)=\int_0^t[\lambda_2(t-x)+2\lambda_1(t-x)M(t-x)]\,dm(x)-M^2(t). \tag{26}$$

Furthermore, if $G(x)$ *is not a lattice distribution function and has the mean value* $\vartheta<\infty$, *further if* $\lim\limits_{t\to\infty} t\lambda_1(t)=0$ *and* $\lim\limits_{t\to\infty} t\lambda_2(t)=0$, *then we have*

$$\lim_{t\to\infty} D^2(t)=\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty[\lambda_2(t)+2\lambda_1(t)M(t)]\,dt-\left(\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty \lambda_1(t)\,dt\right)^2, \tag{27}$$

provided that these integrals exist.

PROOF. By (10) or by the well-known theorem on total expectation we obtain easily the following relation:

$$\begin{aligned} D^2(t)=&\int_0^t D^2(t-x)\,dG(x)+\\ &+\int_0^t[M^2(t-x)+2\lambda_1(t-x)+\lambda_2(t-x)]\,dG(x)-M^2(t). \end{aligned} \tag{28}$$

This is an integral equation of Volterra type for $D^2(t)$. Now it will be more useful to regard the function $D^2(t)+M^2(t)$ as unknown; the corresponding formula for this function is

$$D^2(t)+M^2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t[\lambda_2(t-x)+2\lambda_1(t-x)M(t-x)]\,dG_n(x). \tag{29}$$

Using (29) and the expression (14) of $m(t)$, we obtain the formula (26), which was to be proved.

The proof of (27) is analogous to that of (18).

THEOREM 4. *Denoting by* $M_k(t)=\mathbf{M}\{(\eta(t))^k\}$ *the k-th moment of* $\eta(t)$ *we have*

$$M_k(t)=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\int_0^t M_j(t-x)\lambda_{k-j}(t-x)\,dm(x), \tag{30}$$

provided that the right member of (30) *exists.*

Furthermore, if $G(x)$ is not a lattice distribution function and has the mean value ϑ, further if we have $\lim_{t\to\infty} t\lambda_j(t)=0$ $(j=1, 2, \ldots, k)$, then

(31) $$\lim_{t\to\infty} M_k(t)=\frac{1}{\vartheta}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\int_0^\infty M_j(t)\lambda_{k-j}(t)\,dt,$$

provided that these integrals exist.

PROOF. Let us form the k-th derivative with respect to ω of both sides of (10) and put $\omega=0$; in this way or by the well-known formulae concerning total expectation we obtain

(32) $$M_k(t)=\int_0^t \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} M_j(t-x)\lambda_{k-j}(t-x)\,dG(x).$$

If $M_1(t), M_2(t), \ldots, M_{k-1}(t)$ are already known, then (32) is an integral equation of Volterra type for $M_k(t)$. Its solution may be obtained in the explicit from (30). The existence of the limit (31) may be proved by using (21).

§ 2. Investigation of the process $\eta^*(t)$

We first deal with the question, under what conditions the stochastic process $\eta^*(t)$ exists. We shall prove the following

THEOREM 5. *If $G(t)$ is not a lattice distribution, if its mean value ϑ is finite and*

(33) $$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty |f(t, x)|\,dH(x)\right]dt<\infty,$$

then the process $\eta^*(t)$ exists with probability 1.

PROOF. This theorem is an obvious consequence of the known theorem of BEPPO LEVI, here we give, however, another proof. Let us fix the instant t and divide the time interval $(-\infty, t)$ by means of the points $t-nh$ $(n=1, 2, \ldots)$ into subintervals, each of length h, and put

$$\eta_n=\sum_{t-nh<t_k\leq t-(n-1)h} f(t-t_k, \chi_k),$$

then we have $\eta^*(t)=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n+\cdots$, i. e. $\eta^*(t)$ can be expressed as an infinite sum of random variables. The necessary and sufficient condition for the convergence with probability 1 of this series is

(34) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty}\mathbf{P}\{|\eta_n+\eta_{n+1}+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\ \nu=1, 2, \ldots, p\}=1.$$

Now we shall prove that, under the conditions stated above, (34) is fulfilled and hence the series $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ converges with probability 1. Obviously we have

$$\text{(35)} \qquad \mathbf{P}\{|\eta_n+\eta_{n+1}+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\ \nu=1,2,\ldots,p\} \geqq \\ \geqq \mathbf{P}\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|<\varepsilon\}.$$

Applying the well-known inequality of Markov concerning non-negative random variables, we obtain for the right member of (35)

$$\text{(36)} \quad \mathbf{P}\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|<\varepsilon\} \geqq 1-\frac{\mathbf{M}\{|\eta_n|+|\eta_{n+1}|+\cdots+|\eta_{n+p}|\}}{\varepsilon}$$

Moreover, we have

$$\text{(37)} \qquad \mathbf{M}\{|\eta_n|\} \leqq \frac{1}{\vartheta}\int_{(n-1)h}^{nh}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(u,x)|\,dH(x)\right]du$$

what follows from

$$|\eta_n| \leqq \sum_{t-nh<t_k<t-(n-1)h} |f(t-t_k,\chi_k)|$$

and from the fact that under our conditions the expectation of the number of events occurring in an arbitrary time interval of length u is u/ϑ (Cf. D. BLACKWELL [1] and J. L. DOOB [4]). Now, in consequence of (35), (36) and (37), we have

$$\text{(38)} \qquad \mathbf{P}\{|\eta_n+\eta_{n+1}+\cdots+\eta_{n+\nu}|<\varepsilon;\ \nu=1,2,\ldots,p\} \geqq \\ \geqq 1-\frac{1}{\varepsilon\vartheta}\int_{(n-1)h}^{(n+p)h}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(u,x)|\,dH(x)\right]du.$$

If in (38) $p\to\infty$, $n\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, then the right member of (38) tends to 1 in virtue of the finiteness of (33). Since, further, the left member of (38) is not greater than 1, therefore we obtain (34) which was to be proved.

If the process $\eta^*(t)$ exists, then the distribution function $\mathbf{P}\{\eta^*(t)\leqq x\}=F^*(x)$ also exists and clearly we have $F^*(x)=\lim_{t\to\infty}F(t,x)$. We can obtain by the same way the moments of $\eta^*(t)$ as the limits of the moments of $F(t,x)$.

Thus we can state that under such conditions which ensure the validity of (18) and (27), the expectation and the variance of $\eta^*(t)$ exist and they are given by

$$\text{(39)} \qquad M=\mathbf{M}\{\eta^*(t)\}=\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\infty}\lambda_1(t)\,dt$$

and

$$D^2=\mathbf{D}^2\{\eta^*(t)\}=\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty[\lambda_2(t)+2\lambda_1(t)M(t)]dt-\left(\frac{1}{\vartheta}\int_0^\infty\lambda_1(t)dt\right)^2. \tag{40}$$

Furthermore, if (31) exists, then we have

$$M_k=\mathbf{M}\{(\eta^*(t))^k\}=\frac{1}{\vartheta}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\int_0^\infty M_j(t)\lambda_{k-j}(t)dt. \tag{41}$$

These formulae are wide generalizations of those of N. CAMPBELL well-known in physics. N. CAMPBELL [2], [3], gave only the expectation and variance in a certain special case. His results were generalized by E. N. ROWLAND [8], A. KHINTCHINE [6], S. O. RICE [7] and others for secondary processes generated by a Poisson process. The formula (41) is a further generalization of these results for secondary processes generated by a recurrent process.

Now we wish to determine the correlation function of the process $\eta^*(t)$. It will be defined by

$$R(\tau)=\frac{\mathbf{M}\{\eta^*(t)\eta^*(t-\tau)\}-M^2}{D^2}. \tag{42}$$

THEOREM 6. *If the variance D^2 of the process $\eta^*(t)$ exists, then, for every τ, the correlation function $R(\tau)$ exists, and we have*

$$\begin{aligned}R(\tau)=\frac{1}{\vartheta D^2}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t,x)f(t-\tau,x)\,dH(x)\right]dt+\\+\frac{1}{\vartheta D^2}\int_0^\infty[\lambda_1(t)M(t-\tau)+\lambda_1(t-\tau)M(t)]dt-\frac{M^2}{D^2}.\end{aligned} \tag{43}$$

PROOF. Let us introduce a new process in the following manner:

$$\theta^*(t)=\eta^*(t)+\eta^*(t-\tau).$$

It differs from the process $\eta^*(t)$ merely by taking the signal $g(u,x)=$ $=f(u,x)+f(u-\tau,x)$ instead of $f(u,x)$. Here we suppose $\tau>0$, though all our considerations are valid also for negative values of τ, as the function $R(\tau)$ is an even function. Now, using the formula for the variance of a sum of random variables, we can write

$$\mathbf{D}^2\{\theta^*(\tau)\}=\mathbf{D}^2\{\eta^*(t)\}+\mathbf{D}^2\{\eta^*(t-\tau)\}+2\mathbf{D}\{\eta^*(t)\}\mathbf{D}\{\eta^*(t-\tau)\}R(\tau), \tag{44}$$

i. e.

$$\mathbf{D}^2\{\theta^*(t)\}=2D^2[1+R(\tau)]. \tag{45}$$

On the other hand, by formula (40) we can determine $\mathbf{D}^2\{\theta^*(t)\}$ if we apply it for signals of the form $g(u,x)=f(u,x)+f(u-\tau,x)$ instead of $f(u,x)$. So we can finally compute $R(\tau)$ by the aid of (45). $R(\tau)$ will be generated by (43).

Remark. If we introduce the function

$$\lambda_{11}(\tau)=\int_0^\infty \lambda_1(t)\lambda_1(t+\tau)dt, \tag{46}$$

which is an even function of τ, then we obtain the following substitution, often very useful for computing D^2:

$$\int_0^\infty \lambda_1(t)M(t)dt=\int_0^\infty \lambda_{11}(t)dm(t). \tag{47}$$

The computation of $R(\tau)$ will be facilitated by the substitution

$$\int_0^\infty [\lambda_1(t)M(t-\tau)+\lambda_1(t-\tau)M(t)]dt=\int_0^\infty [\lambda_{11}(t+\tau)+\lambda_{11}(t-\tau)]dm(t). \tag{48}$$

Furthermore, we note that the average function $m(t)$ may also be determined by the following integral equation of Volterra type:

$$m(t)=G(t)+\int_0^t m(t-x)dG(x). \tag{49}$$

It may be easily solved e. g. by Laplace—Stieltjes transforms, namely for $\Re(s)>0$ we have

$$\int_0^\infty e^{-st}dm(t)=\frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)} \tag{50}$$

where

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dG(x). \tag{51}$$

Example. Let be

$$f(u,x)=\begin{cases} xe^{-\alpha u} & \text{if} \quad u\geqq 0 \quad \text{and} \quad x\geqq 0,\\ 0 & \text{if} \quad u<0 \quad \text{or} \quad x<0\end{cases} \tag{52}$$

and $\mathbf{M}\{\chi_n\}=\mu$, $\mathbf{D}^2\{\chi_n\}=\sigma^2$, furthermore let us introduce the notation

$$\beta=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dG(x). \tag{53}$$

Then we have $\lambda_1(t)=\mu e^{-\alpha t}$, $\lambda_2(t)=(\sigma^2+\mu^2)e^{-2\alpha t}$ and $\lambda_{11}(\tau)=\mu^2e^{-\alpha|\tau|}/2\alpha$, fur-

thermore

$$\int_0^\infty \lambda_{11}(t)\,dm(t) = \frac{\mu^2}{2\alpha}\,\frac{\beta}{1-\beta} \tag{54}$$

and, by (40),

$$D^2 = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\alpha\vartheta} + \frac{\mu^2}{\alpha\vartheta}\,\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\mu^2}{\alpha^2\vartheta^2}. \tag{55}$$

Using (43), we obtain for $R(\tau)$

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} + \tag{56}$$

$$+\frac{\mu^2}{2\alpha\vartheta D^2}\left[e^{-\alpha|\tau|}\int_0^{|\tau|} e^{\alpha x}\,dm(x) + e^{\alpha|\tau|}\int_{|\tau|}^\infty e^{-\alpha x}\,dm(x) - \frac{\beta e^{-\alpha|\tau|}}{1-\beta} - \frac{1-e^{-\alpha|\tau|}}{\alpha\vartheta}\right].$$

$R(\tau)$ depends on the special form of $m(t)$. If the underlying process is a Poisson process, i. e. $m(t)=t/\vartheta$, then

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \tag{57}$$

independently of the special form of the distribution function $H(x)$.

If the correlation function $R(\tau)$ of the process $\eta^*(t)$ is known, then its spectral distribution function $F(\omega)$ can also be determined by a well-known formula of A. KHINTCHINE [5]. According to this we have

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega\tau\,dF(\omega). \tag{58}$$

Especially, if $R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$, then

$$F'(\omega) = \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}. \tag{59}$$

We make still some remark about the physical meaning of the spectral distribution function $F(\omega)$. It may be illustrated by the following example: if we regard $\eta^*(t)$ as a current which is led through a unit resistance, then the average dissipated power will be

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{M}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T (\eta^*(t))^2\,dt\right\} = D^2 + M^2, \tag{60}$$

and the fraction of it falling into the frequency band $(0,\omega)$ will be $M^2+D^2[F(\omega)-F(-\omega)]$. Here ω denotes circular frequency, i. e. $\omega=2\pi f$ where f denotes the common frequency.

INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 15 September 1954)

Bibliography

[1] D. Blackwell, A renewal theorem, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), pp. 145—151.

[2] N. Campbell, The study of discontinuous phenomena, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **15** (1909), pp. 117—137.

[3] N. Campbell, Discontinuities in light emission, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **15** (1909), pp. 310—328.

[4] J. L. Doob, Renewal theory from the point of view of the theory of probability, *Transactions of the American Mathematical Society*, **63** (1948), pp. 422—438.

[5] A. Khintchine, Korrelationstheorie der stationär stochastischen Prozesse, *Math. Annalen*, **109** (1934), pp. 604—610.

[6] A. Khintchine, Theorie des abklingenden Spontaneffektes, *Bull. Acad. Sci. URSS, Ser. Math.*, **3** (1938), pp. 312—323.

[7] S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise. I, *Bell System Technical Journal*, **23** (1944), pp. 282—332; II, **24** (1945), pp. 45—156.

[8] E. N. Rowland, The theory of the mean square variation of a function formed by adding known functions with random phases and applications to the theories of the shot effect and of light, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **32** (1936), pp. 580—597.

[9] L. Takács, On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), pp. 203—236.

[10] L. Takács, On stochastic processes connected with certain physical recording apparatuses, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 363—380.

О ВТОРИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ, ПОРОЖДЕННЫХ РЕКУРРЕНТНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Л. Такач (Будапешт)

(Резюме)

Рассмотрим стохастический процесс

$$\eta^*(t) = \sum_{-\infty < t_n \le t} f(t - t_n, \chi_n),$$

определенный для моментов времени t, где t_n случайные моменты времени, а χ_n случайные параметры. Предположим, что $t_n - t_{n-1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — независимые положительные случайные величины с той же функцией распределения $G(x)$ и что случайные переменные χ_n независимы между собой, не зависят от t_n и обладают общей функцией распределения $H(x)$. Пусть далее $f(u, x)$ заданная функция двух переменных такая, что $f(u, x) = 0$ при $u < 0$.

Пусть

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t),$$

где $G_n(t)$ n-кратная композиция $G(t)$ самим собой и

$$\lambda_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t, x)]^j \, dH(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

В настоящей работе доказываются между прочим следующие предложения:

1. Процесс $\eta^*(t)$ существует с вероятностью 1, если

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty |f(t, x)| \, dH(x) \right] dt < \infty.$$

2. Если $G(x)$ — нерешетчатая функция распределения, $\vartheta = \int_0^\infty x \, dG(x) < \infty$ и $\lim_{t \to \infty} t \lambda_j(t) = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), то для k-ого момента от $\eta^*(t)$ имеем:

$$M_k = \mathbf{M}\{(\eta^*(t))^k\} = \frac{1}{\vartheta} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \int_0^\infty M_j(t) \lambda_{k-j}(t) \, dt.$$

Фигурирующие в этой формуле функции $M_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) можно определить, исходя из $M_0(t) \equiv 1$, следующей рекурсивной формулой:

$$M_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \int_0^t M_j(t-x) \lambda_{k-j}(t-x) \, dm(x).$$

Приведенный результат является далеко идущим обобщением хорошо известных из физической литературы формул Н. Кембелла.

3. Пусть M — математическое ожидание от $\eta^*(t)$, D^2 — дисперсия, а его функция корреляции

$$R(\tau) = \frac{\mathbf{M}\{\eta^*(t)\eta^*(t-\tau)\} - M^2}{D^2}.$$

Тогда имеем

$$R(\tau) = \frac{1}{\vartheta D^2} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t, x) f(t-\tau, x) \, dH(x) \right] dt +$$

$$+ \frac{1}{\vartheta D^2} \int_0^\infty [\lambda_1(t) M_1(t-\tau) + \lambda_1(t-\tau) M_1(t)] \, dt - \frac{M^2}{D^2}.$$

4. Пример. Пусть для $\alpha > 0$

$$f(u, x) = \begin{cases} x e^{-\alpha u} & \text{при } u \geq 0, \ x \geq 0, \\ 0 & \text{при } u < 0 \text{ или } x < 0, \end{cases}$$

и пусть $\mathbf{M}\{\chi_n\} = \mu$, $\mathbf{D}^2\{\chi_n\} = \sigma^2$, $\beta = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dG(x)$.

Тогда имеем

$$M = \frac{\mu}{\alpha \vartheta}, \quad D^2 = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2 \alpha \vartheta} + \frac{\mu^2}{\alpha \vartheta} \frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\mu^2}{\alpha^2 \vartheta^2}$$

и

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} + \frac{\mu^2}{2 \alpha \vartheta D^2} \left[e^{-\alpha|\tau|} \int_0^{|\tau|} e^{\alpha x} \, dm(x) + e^{\alpha|\tau|} \int_{|\tau|}^\infty e^{-\alpha x} \, dm(x) - \frac{\beta e^{-\alpha|\tau|}}{1-\beta} - \frac{1 - e^{-\alpha|\tau|}}{\alpha \vartheta} \right].$$

CHARACTERISATION OF THE NINE REGULAR POLYHEDRA BY EXTREMUM PROPERTIES

By

L. FEJES TÓTH (Budapest)

(*Presented by* G. HAJÓS)

To the memory of my brother J. FEJES TÓTH (1913—1944)

The classical theory of regular figures (such as point systems, polyhedra and polytopes, tessellations and honeycombs etc.) attempts to give a complete enumeration of these figures and to determine their metrical and topological properties.[1] It may be considered as the systematology and morphology of the regular figures.

Recently various extremum properties of certain regular figures have been discovered,[2] out of which we mention e. g. the following one. Let us distribute on a sphere twelve points so that the least distance determined by them should attain its maximum. The solution is given by the vertices of a regular icosahedron.

The recognition of the fact that extremum postulates involve, in certain cases, regularity, suggests a natural extension of the classical theory which may be regarded as the genetics of regular figures. Regular arrangements are generated here from unarranged, chaotic sets by the ordering effect of an economy principle, provided we take the word in a sufficiently large sense.

In the present paper we proceed in this direction, showing, first of all, that together with the five Platonic solids also the four Kepler—Poinsot star-polyhedra can be obtained as solutions of natural extremum problems. After some definitions (§ 1) we shall prove a general inequality (§ 2) which is a common source of various extremum properties of the regular polyhedra. The rest of the paper (§ 3) is devoted to some remarks concerning regular polytopes.

§ 1. Star-polygons and polyhedra

Let $O, P_1, \ldots, P_n$ be $n+1$ (>3) coplanar points, such that the rotations (in a given direction) transferring the ray OP_1 in $OP_2, \ldots, OP_n$ in OP_1 have positive angles $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ less than π. We call the circuit formed by

[1] A prominent representation of this theory is given by H. S. M. COXETER, *Regular polytopes* (London, 1948). This book contains a detailed description, with abundant historic references, of all regular figures occurring in the present paper.

[2] Cf. L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953).

the line segments $P_1P_2, \ldots, P_nP_1$ a *star-polygon* with respect to the *pole* O. The total angle of rotations is an integral multiple of 2π:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 2\pi d.$$

The number d is called the *density* of the polygon, as it is the number of times the central projection of the polygon will cover a circle centred at O (see Figures 1 and 2).

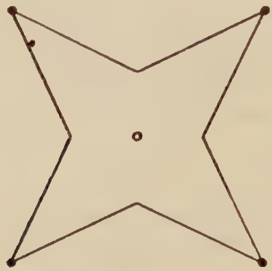


Fig. 1

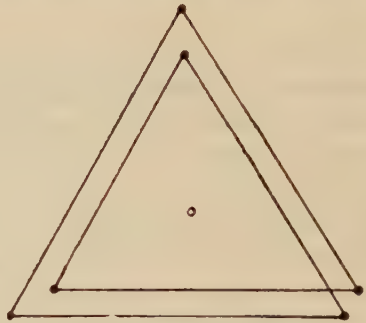


Fig. 2

Besides the above definition of a star-polygon S (which considers S as consisting of its sides and vertices) it is convenient to regard S as consisting of the triangles $OP_1P_2, \ldots, OP_nP_1$, i. e. as a simply ($d=1$) or partly multiply ($d>1$) covered region. In this sense we call the total area of the above triangles the *area* of S.

The intersection of the half planes bounded by the lines $P_1P_2, \ldots, P_nP_1$ and containing the point O will be called the *core* of S. This is a convex polygon covered by S just d-times.

If n and d are co-primes $(n>2d)$, $OP_1 = \cdots = OP_n$ and $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 2\pi d/n$, the polygon is said to be *regular*. It is then denoted by $\left\{\frac{n}{d}\right\}$ (see Figures 3—6). If $d=1$ we have a convex regular n-gon which we denote by $\{n\}$.

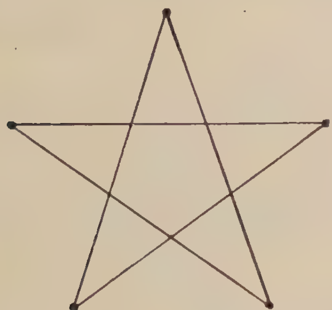
In spherical geometry we make the restriction $OP_i < \pi/2$ $(i=1, \ldots, n)$. Accordingly, the above notions can be transferred without any change to spherical polygons.

A spherical *tessellation* is a finite set of spherical polygons, such that every side of each polygon belongs to just one further polygon, with the restriction that no subset has the same property. The polygons, their sides and vertices are called faces, edges and vertices of the tessellation.

Let us consider the midpoints of all the edges that emanate from a given vertex O and join the midpoints belonging to the same face by segments.

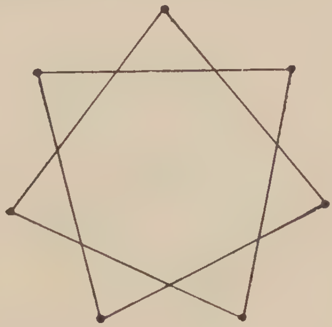
We get a polygon called *vertex figure* of the tessellation at the vertex O. We are now able to define a *star-tessellation* as a spherical tessellation with star faces and star vertex figures (with respect to the corresponding vertex).

We denote in a star-tessellation the total number of face-densities by f and the total number of vertex figure-densities by v. We shall find it conve-



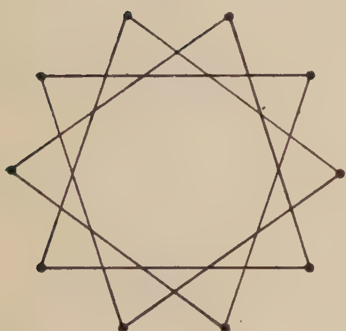
$\left\{\frac{5}{2}\right\}$

Fig. 3



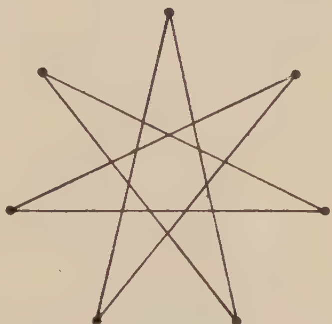
$\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Fig. 4



$\left\{\frac{10}{3}\right\}$

Fig. 5



$\left\{\frac{7}{3}\right\}$

Fig. 6

nient to regard f and v as the number of faces and vertices, weighted by the corresponding densities.

We decompose each face of a star-tessellation into triangles based upon the sides and meeting at the pole of the face. There are together $2e$ such triangles, where e denotes the number of edges. Summing up the spherical excesses of these triangles we obtain for the total area T of the faces the expression

$$T = 2\pi f - 2\pi e + 2\pi v.$$

We introduce the notion of the *density* $d = T/4\pi$ *of the tessellation*, and obtain

$$f - e + v = 2d.$$

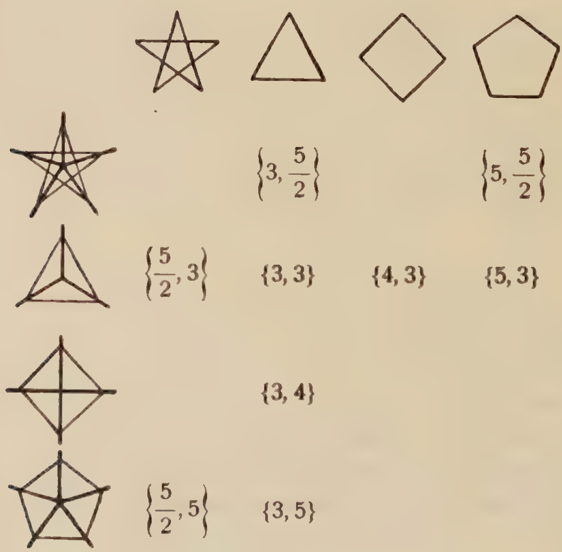
This is a generalisation of Euler's Formula.

If all faces and vertex figures of a star-tessellation are regular, the tessellation is said to be *regular*. This definition involves the equality of the faces and of the vertex figures. If the faces are $\{p\}$-s and the vertex figures $\{q\}$-s, the tessellation is denoted by the Schläfli symbol $\{p, q\}$.

The definition of a polyhedron is the same as that of a spherical tessellation, replacing the word „spherical polygon" by „polygon". Projecting the faces of a polyhedron from a point O (not laying in the planes of the faces) onto a sphere centred at O, we obtain a spherical tessellation. If the point O can be chosen so that the projection is a star-tessellation, we speak of a *star-polyhedron*.

Let us suppose that there is a sphere which touches all the faces of a star-polyhedron and that the tangent points are all situated in the cores of the corresponding faces. Then the polyhedron is said to be *circumscribed* about this sphere. If besides this the polyhedron has as projection onto this sphere a regular tessellation, we call the polyhedron *regular*.

A regular polyhedron is denoted by the same symbol as the corresponding tessellation. The nine regular polyhedra can be arranged in the following scheme:

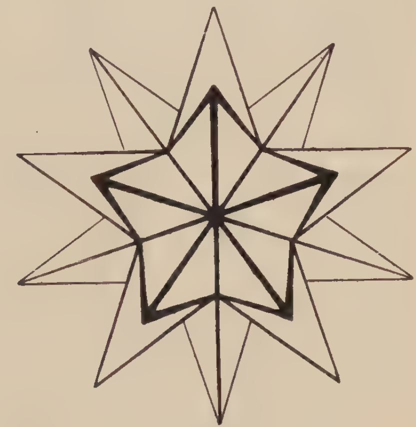


$\left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$ and $\left\{5, \frac{5}{2}\right\}$ have density 3, while $\left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$ and $\left\{3, \frac{5}{2}\right\}$ have density 7 (see Figures 7—10).

In what follows we shall denote a domain (body) and its area (volume) by the same symbol.

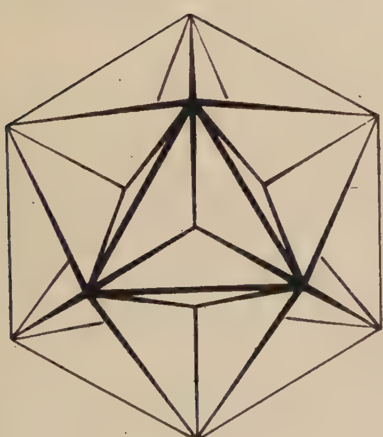
$\left\{3, \frac{5}{2}\right\}$

Fig. 7



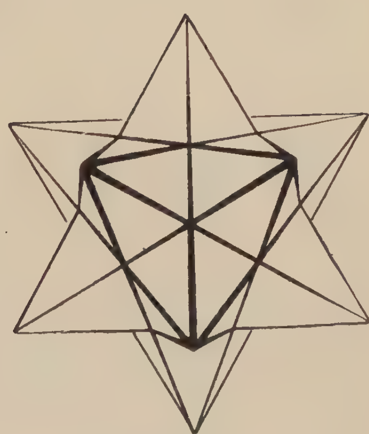
$\left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$

Fig. 8



$\left\{5, \frac{5}{2}\right\}$

Fig. 9



$\left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$

Fig. 10

§ 2. An inequality for star-tessellations

We shall prove the following[3]

THEOREM 1. *Let* $S_1, \ldots, S_k$ *denote the faces of a star-tessellation with* f *faces,* e *edges and* v *vertices, counting* f *and* v *with the multiplicity of the densities of the faces and vertices, respectively. Further, let* $O_1, \ldots, O_k$ *be the poles of* $S_1, \ldots, S_k$*, respectively, and* $g(x)$ *a strictly increasing function defined for* $0 \leqq x < \pi/2$*. Then*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} g(O_i P)\, da \geqq 4e \int_{\Delta} g(AP)\, da,$$

where da *denotes the area element at the variable point* P*, and* Δ *a spherical triangle* ABC *with angles* $A = \pi f/2e$, $B = \pi v/2e$, $C = \pi/2$*. Equality holds only if the tessellation is regular and* $O_1, \ldots, O_k$ *are the centres of the faces.*

In accordance with § 1, where we have considered S_i as consisting generally of overlapping sheets, $\int_{S_i} g(O_i P)\, da$ denotes here the sum of the integrals extended over the triangles determined by O_i and the sides of S_i.

Naturally, the above inequality continues to hold for any function not decreasing, but then the case of equality is to be examined separately. For decreasing functions the inequality holds in the opposite sense.

The proof of Theorem 1 rests upon two lemmas.

LEMMA 1. *Let* s *be a segment of a circle* Γ $(< 2\pi)$ *with centre* O*. Then the function*

$$G(s) = \int_{s} g(OP)\, da$$

is concave for $0 \leqq s \leqq \Gamma/2$.

PROOF. Let s_1, s_1^*, s_2, s_2^* be four segments of Γ cut off by great circles passing through the same diametrically opposite points equally distant from O so that $0 < s_1 < s_1^* < s_2 < s_2^* < \Gamma/2$ and $\Delta s_1 = s_1^* - s_1 = \Delta s_2 = s_2^* - s_2$. It is easy to give an area-preserving mapping of Δs_1, upon Δs_2, so that for any point P_2 of Δs_2 corresponding to an inner point P_1 of Δs_1 we have $OP_1 > OP_2$ (Figure 11). Hence by the monotony of $g(x)$

$$\int_{\Delta s_1} g(OP)\, da > \int_{\Delta s_2} g(OP)\, da$$

and thus $G'(s_1) \geqq G'(s_2)$.

[3] In the special case of convex tessellation Theorem 1 has been found previously by the author (cf. the book quoted in footnote [2]).

LEMMA 2. *Let t be the intersection of the circle Γ and of a triangle one vertex of which is diametrically opposite to the centre O of Γ. Then*

$$\int_t g(OP)\,da \leqq G(t).$$

PROOF. Let M and N be two points on the boundary of t, such that $OM = ON$ and that the area of the segment s cut off from Γ by the great circle MN equals t (Figure 12). If t is not identical with s, the region $t-ts$ has positive area equal to the area of $s-st$. These two regions have the points M and N in common, but any other point of $t-ts$ lies nearer to O than every point of $s-st$. Therefore, writing for abbreviation $\int = \int g(OP)\,da$, we have the desired inequality

$$\int_t = \int_{ts} + \int_{t-ts} \leqq \int_{st} + \int_{s-st} = \int_s .$$

Let us now turn to the

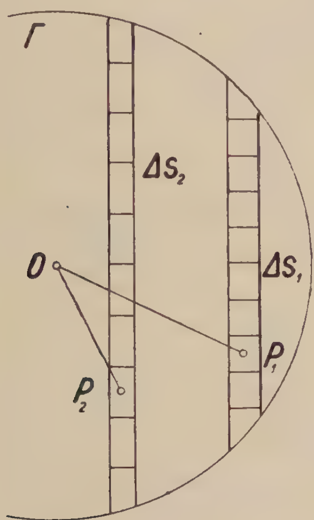


Fig. 11

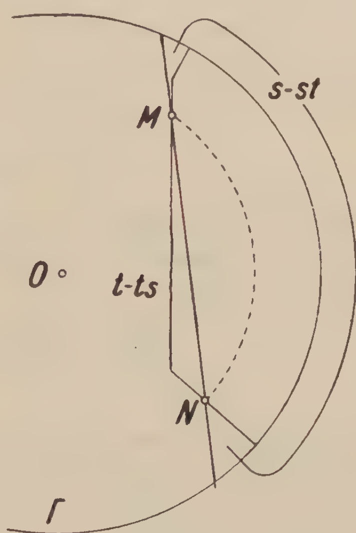


Fig. 12

PROOF of THEOREM 1. Denote the vertices of S_i in cyclical order by $P_1, \ldots, P_n$, and its density by d_i. Draw a circle Γ_i around O_i with radius equal to the hypotenuse AB of the triangle ABC (Figure 13) and consider the sectors $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ of Γ_i determined by the consecutive „rays" $O_iP_1, \ldots, O_iP_n$. These sectors cover Γ_i just d_i times. Denote the triangles $O_iP_1P_2, \ldots, O_iP_nP_1$ by $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ and the intersection of Γ_i and the triangles $O'P_1P_2, \ldots, O'P_nP_1$ by $t_1, \ldots, t_n$, where O' is the point opposite to O_i. Denoting finally the part

of S_i lying outside Γ_i by S_i' and omitting $g(O_iP)da$ under the integral signes, we have

$$\int\limits_{S_i} = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Delta_j} = \sum_{j=1}^{n} \Big(\int\limits_{\gamma_j} - \int\limits_{t_j} \Big) + \int\limits_{S_i'} = d_i \int\limits_{\Gamma} - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{t_j} + \int\limits_{S_i'}; \quad \Gamma \equiv \Gamma_i.$$

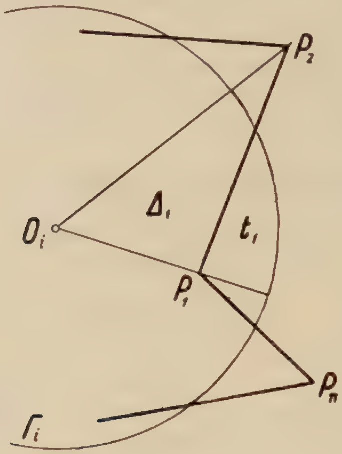


Fig. 13

There are in our tessellation altogether $2e$ domains of the type t_1 (some of which may be empty). Denoting them by $t_1, \ldots, t_{2e}$, we obtain by addition of the above equalities

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i} = f \int\limits_{\Gamma} - \sum_{i=1}^{2e} \int\limits_{t_i} + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i'}.$$

Hence we get by our lemmas and Jensen's inequality

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i} \geqq f \int\limits_{\Gamma} - \sum_{i=1}^{2e} G(t_i) + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i'} \geqq f \int\limits_{\Gamma} - 2eG\Big(\frac{1}{2e} \sum_{i=1}^{2e} t_i\Big) + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i'}.$$

On the other hand, the total area of the faces is given by

$$T = \sum_{i=1}^{k} S_i = f\Gamma - \sum_{i=1}^{2e} t_i + \sum_{i=1}^{k} S_i' = f\Gamma - \sum_{i=1}^{2e} t_i + T'$$

where $T' = \sum_{i=1}^{k} S_i'$. Therefore

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i} \geqq f \int\limits_{\Gamma} - 2eG\Big(\frac{f\Gamma - T + T'}{2e}\Big) + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i'}.$$

Later on we shall show that $f\Gamma - T > 0$. Hence we may write

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \geqq f \int_{\Gamma} - 2eG\left(\frac{f\Gamma - T}{2e}\right) - 2e \int_{u} + \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i'},$$

denoting by u a subdomain of Γ of area $u = T'/2e$ which completes the segment of Γ of area $(f\Gamma - T)/2e$ to the segment of area $(f\Gamma - T + T')/2e$. But in view of the monotony of $g(x)$

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i'} - 2e \int_{u} \geqq T' g(AB) - 2eu\, g(AB) = 0$$

whence

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \geqq f \int_{\Gamma} - 2eG\left(\frac{f\Gamma - T}{2e}\right) = 4e \left\{ \frac{f}{4e} \int_{\Gamma} - \frac{1}{2} G\left(\frac{f\Gamma - T}{2e}\right) \right\}.$$

Let us place the circle Γ in a position concentric with the vertex A of the triangle $\Delta \equiv ABC$ (Figure 14) and remark that $\frac{f\Gamma}{2e} = \frac{\pi f}{e} \frac{\Gamma}{2\pi}$ equals the area of the sector of Γ of angle $2A = \pi f/e$. On the other hand, we have by „Euler's Formula"

$$\frac{T}{2e} = \frac{\pi f}{e} + \frac{\pi v}{e} - \pi = 2\Delta.$$

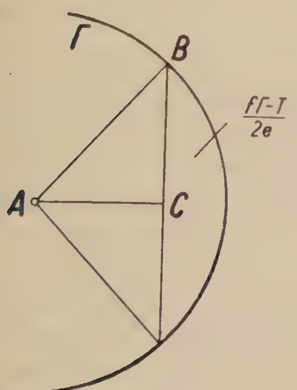


Fig. 14

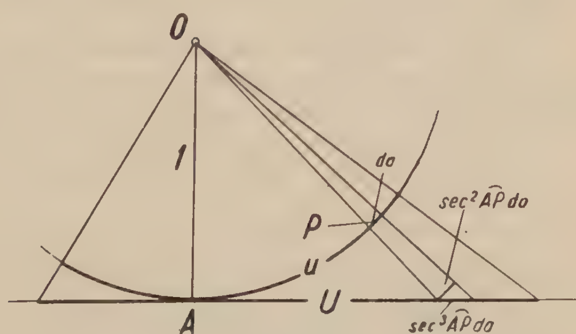


Fig. 15

Therefore $(f\Gamma - T)/2e$ equals the area of the segment cut off from Γ by the great circle BC, and we have really $f\Gamma - T > 0$. Thus

$$\frac{f}{4e} \int_{\Gamma} - \frac{1}{2} G\left(\frac{f\Gamma - T}{2e}\right) = \int_{\Delta} g(AP)\, da.$$

This completes the proof of our inequality.

The above proof shows that equality holds only if $T'=0$ and the domains $t_1, \ldots, t_{2e}$ are all congruent circle-segments, i. e. if $S_1, \ldots, S_k$ are equal regular star-polygons centred at $O_1, \ldots, O_k$. This is just the case indicated in Theorem 1.

Let U be a domain in a plane touching the unit sphere of centre O at the point A and let u be the central projection of U upon the sphere (Figure 15). Obviously, the area of U is given by a surface integral

$$U = \int_u g(AP)\,da,$$

$g(x)$ being a strictly increasing function, namely $\sec^3 x$. Applying our inequality in case of this function to the projection of a star-polyhedron circumscribed around the unit sphere with tangent points $O_1, \ldots, O_k$, the left side yields the surface area of the polyhedron, while the right side gives the $4e$-fold area of the projection of Δ onto a plane touching the sphere at A. Hence, by some elementary computation, we obtain from Theorem 1 the following

COROLLARY 1. *Let F be the surface area of a star-polyhedron circumscribed about the unit sphere having f faces, e edges and v vertices, counting f and v with the corresponding multiplicities. Then*

$$F \geqq e \sin \frac{\pi f}{e} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi f}{2e} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi v}{2e} - 1 \right).$$

Equality holds only for the nine regular polyhedra.

The volume of our polyhedron is $V = F/3$, provided we define V as the total volume of the pyramids which join the point O to the sheets of the faces. Therefore the above inequality remains to hold if we replace F by $3V$.

In non-Euclidean spaces the area of the domain U considered above and the volume of the cone of base U and apex O cease to be proportional. But both can still be expressed in terms of a surface integral $\int_u g(AP)\,da$ with an increasing integrand g. Therefore the above results can be extended to non-Euclidean spaces, though the corresponding estimating formulae are more complicated.[4] We emphasize the following special case: *in a space of constant curvature among all convex dodecahedra containing a given sphere, the circumscribed regular dodecahedron has the least volume.* To prove this we have only to mention that we can restrict ourselves a priori to circumscribed dodecahedra with trihedral vertices ($f=12, e=30, v=20$).

[4] The formula concerning the volume involves the non elementary functions of SCHLÄFLI and LOBATSCHEWSKY.

Returning now to the case of equality in Theorem 1, we shall show that the single condition $T'=0$ suffices to assure the regularity of the tessellation. Indeed, if Γ_i contains S_i, then

$$S_i \leqq a(\varphi_1)+\cdots+a(\varphi_n),$$

where

$$a(\varphi)=\varphi-2\operatorname{arc\,tg}\left(\gamma \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$$

denotes the area of an isosceles triangle with sceles of length $AB=\operatorname{arc\,cos}\gamma$, enclosing the angle φ, and $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ are the angles at O_i subtended by the sides of S_i. Since the function $a(\varphi)$ is on account of

$$a''(\varphi)=-\frac{\gamma(1-\gamma^2)\sin\varphi}{2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\gamma^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2}<0 \qquad (0<\varphi<\pi)$$

concave, we can make use of Jensen's inequality, obtaining

$$T=\sum_{i=1}^{k} S_i \leqq 2ea\left(\frac{2\pi f}{2e}\right)=4e\Delta.$$

Equality holds only if $S_1, \ldots, S_k$ are equal regular polygons inscribed in $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, respectively. On the other hand, the sign of equality must hold by Euler's Formula; this completes the proof of our assertion.

The condition $T'=0$ for the regularity of the tessellation enables us to complete Theorem 1 by the following

REMARK. Theorem 1 remains true for any non-decreasing function $g(x)$ satisfying the condition $g(x_1)<g(x_2)$ whenever $0\leqq x_1<AB<x_2<\pi/2$.

In fact, if $T'>0$, then we have for such a function $g(x)$ with the notations of the proof of Theorem 1

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{S_i'}-2e\int_{u}>0.$$

Consequently, equality cannot stand in our inequality, except for the case $T'=0$, i. e. only in the regular cases.

Consider again the projection of our circumscribed polyhedron. If the polyhedron is not regular there must be a face S_i in the tessellation which stretches out of Γ_i. This means that the polyhedron stretches out of the sphere of radius

$$\sec AB=\operatorname{tg}\frac{\pi f}{2e}\operatorname{tg}\frac{\pi v}{2e}$$

concentric with the unit sphere. We introduce $p=2e/f$ as the average number of the sides of the faces and $q=2e/v$ as the average number of the edges of the vertices, obtaining the following

COROLLARY 2. *If a star-polyhedron is circumscribed about the unit sphere, then the radius R of the least concentric sphere containing the polyhedron satisfies the inequality*

$$R \geqq \operatorname{tg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{\pi}{q},$$

where p and q denote the average number of the sides of the faces and the average number of the edges of the vertices, respectively. Equality holds only for a $\{p,q\}$,

With respect to the investigations of the following paragraph we draw from Theorem 1 a further conclusion, showing that[5] *the sphere cannot be packed so densely, nor covered so thinly by at least three equal circles as the Euclidean plane.*

The case of $k=3$ circles being trivial, we restrict ourselves to the case of $k \geqq 4$ circles. Furthermore, we may suppose that the centres $O_1, \ldots, O_k$ lie not all on a hemi-sphere, so that the k planes which touch the sphere at $O_1, \ldots, O_k$ bound a convex k-hedron. This k-hedron may be supposed to have only trihedral vertices; this means that $f=k$, $v=2k-4$ and $e=3k-6$. We apply Theorem 1 to the spherical net of this polyhedron with the non-increasing function

$$g(x)=\begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leqq x \leqq r, \\ 0 & \text{for } r < x < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

r being the radius of the circles. Then $\sum_{i=1}^{k}\int_{S_i} g(O_iP)\,da$ yields the area W covered by the circles, while $\int_{\varDelta} g(AP)\,da$ gives the area w of the part of the triangle $\varDelta \equiv ABC$ $\left(\text{of angles } A=\frac{k}{k-2}\frac{\pi}{6},\ B=\frac{\pi}{3},\ C=\frac{\pi}{2}\right)$ covered by the circle $\varGamma$ of radius r with centre A (Figure 16). Therefore $W \leqq 4ew$ whence, by $T=4\pi=4e\varDelta$,

$$\frac{W}{4\pi} \leqq \frac{w}{\varDelta}.$$

Let us still observe that the density of the circles is given by

$$\frac{k\varGamma}{4\pi}=\frac{\pi k}{2e}\frac{\varGamma}{2\pi}:\varDelta=\frac{\gamma(r)}{\varDelta},$$

[5] For the sake of completeness we give here the proofs of these results found previously by the author. See footnote [2].

where $\gamma(r)$ denotes the area of the circular sector cut out from Γ by the rays AB and AC.

Suppose now that the circles do not overlap. Then

$$\frac{\gamma(r)}{\Delta} = \frac{W}{4\pi} \leqq \frac{w}{\Delta},$$

i. e. $\gamma(r) \leqq w$. This involves $r \leqq AC$, on account of which the packing density cannot be greater than

$$\frac{\gamma(AC)}{\Delta} = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{k}{k-2}\frac{\pi}{6}\right).$$

This bound tends for $k \to \infty$ increasingly to the density of the closest circle-packing of the Euclidean plane, namely to $\pi/\sqrt{12} = 0{,}906\ldots$.

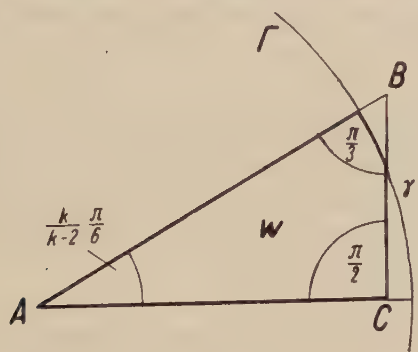


Fig. 16

If, on the other hand, the sphere is entirely covered by the circles, we have by $W = 4\pi$ the inequality $\Delta \leqq w$. This implies $r \geqq AB$, on account of which the covering density cannot be smaller than

$$\frac{\gamma(AB)}{\Delta} = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{k}{k-2}\frac{\pi}{6}\right).$$

This bound tends for $k \to \infty$ decreasingly to the density of the thinnest circle-covering of the Euclidean plane, namely to $2\pi/\sqrt{27} = 1{,}209\ldots$.

Herewith our assertions are proved.

§ 3. An extremum property of the regular polytopes

The concept of a higher dimensional space implies immediately the existence of the analogues of the regular tetrahedron, octahedron and cube in these spaces. Besides these polytopes there are only 13 further regular

polytopes in more than three dimensions, all in four dimensions, 3 of which are convex and the remaining ones star-polytopes. Some extremum properties of the regular polygons can be easily transferred to the regular tetrahedron, octahedron, cube and to their higher dimensional analogues. But very little is known in this direction about the „non-trivial" regular polytopes.

In what follows we restrict our attention to convex polytopes. Let R and r denote the radii of two concentric spheres, the first containing, the second contained in a convex polytope. We call the part of the space bounded by the spheres having the least value of R/r *the spherical shell of the polytope.* If for another polytope the minimum of R/r is greater, we shall say that it has a greater spherical shell than the first. This terminology enables us to give to our result a concise form:

THEOREM 2. *Among those convex polytopes which are topologically isomorphic with a convex regular polytope, the regular one has the least spherical shell.*

This theorem, which is closely related to the Corollary 2 of § 2, holds for all numbers of dimension, but the most interesting cases are the three non-trivial convex regular polytopes: the self-dual 24-cell[6] $\{3, 4, 3\}$, the 120-cell $\{5, 3, 3\}$ and its dual, the 600-cell $\{3, 3, 5\}$. In the remaining cases even more general results are known.[7]

Starting with the 600-cell, let Π^* be a $\{3, 3, 5\}$ circumscribed about the (4-dimensional) unit sphere S, and Π another convex polytope not congruent with Π^* containing S and having 600 tetrahedron cells $t_1, \ldots, t_{600}$. Further, let $\tau_1, \ldots, \tau_{600}$ be the spherical tetrahedra arising from $t_1, \ldots, t_{600}$ by radial projection onto S. The total volume of these tetrahedra equals the surface area (3-dimensional content) of S:

$$\tau_1 + \cdots + \tau_{600} = 2\pi^2.$$

We shall say that a tetrahedron has a regular position if 1. it is regular, 2. the hyperplane (3-space) of it touches S and 3. the tangent point coincides with the centre of it. Since Π is not congruent with Π^*, among $t_1, \ldots, t_{600}$ there is either a non regularly positioned tetrahedron having a projection $\geqq 2\pi^2/600$ or a tetrahedron (of regular position) with a projection $> 2\pi^2/600$. We shall show that this tetrahedron has in both cases a vertex lying outside of the circumsphere of Π^*.

[6] $\{p, q, r\}$ denotes a 4-dimensional regular polytope having $\{p, q\}$ cells and $\{q, r\}$ vertex figures. If r is an integer, it denotes the number of cells surrounding an edge.

[7] See footnote [2] and L. FEJES TÓTH, Extremum properties of the regular polytopes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6 (1955), pp. 143—146. Cf. the following proof with this paper.

Denote the radius of the least sphere concentric with S and containing a given tetrahedron t by R. We have to show that among the tetrahedra t whose hyperplanes do not intersect S and whose projection is $\geqq 2\pi^2/600$, the regularly situated tetrahedron of projection equal to $2\pi^2/600$ furnishes the least value of R.

Obviously, we may suppose that t touches S at a point O, since otherwise it may be approached to the centre of S by a translation so that its projection increases. The problem is then reduced to the problem of determining the minimum of the radius $\varrho = \sqrt{R^2 - 1}$ of the least (3-dimensional) sphere of centre O containing t. The existence of an extremal tetrahedron t' being assured by the theorem of WEIERSTRASS, we assert that t' must be a regular tetrahedron with centre O.

Supposing the opposite case, there is a (2-dimensional) plane p through O orthogonal to an edge of t' which is not a symmetry-plane of t'. Translate each chord c' of t' orthogonal to p in its own line into a position c'' symmetrical with respect to p. This process, called symmetrisation of STEINER, transfers t' in a new tetrahedron t'' to which belongs a value of ϱ not greater than that of t'.

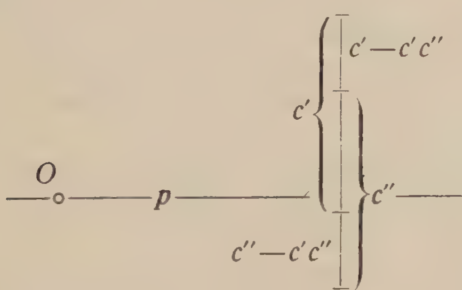


Fig. 17

Let us observe that each inner point of the segment c''—$c'c''$ lies nearer to O than any point of c'—$c'c''$ (Figure 17). This involves a volume-preserving representation of t' upon t'' which leaves the points of $t't''$ invariant and carries the others into points lying nearer to O. But, since among two equal volume elements of the 3-space of t' the volume element lying nearer to O has a greater projection upon S, the projection of t'' is greater than the projection of t'.

Hence t'' is also extremal. But it can be seen at a glance that the projection of an extremal tetrahedron must be equal to $2\pi^2/600$. This contradiction proves our assertion and therewith Theorem 2 in the considered case.

The above proof can be extended by pure analogy to each convex polytope with simplex (segment, triangle, tetrahedron, ...) cells.[8] Then the extremum property in question may be inferred by reciprocation to polytopes having simplex vertex figures.

Consider e. g. a 4-dimensional convex polytope Π' with 600 tetrahedral vertices, such as for instance any convex polytope isomorphic with $\{5, 3, 3\}$. A reciprocation with respect to a sphere concentric with the spherical shell of Π' yields a convex polytope Π with 600 tetrahedron cells, the spherical shell of which has the same magnitude (quotient of the radii of the bounding spheres) as that of Π'. Therefore this spherical shell cannot be smaller than that of $\{3, 3, 5\}$. Since Π and Π' are either both regular or both irregular, equality occurs only if Π' is regular.

Thereby all cases are settled with the exception of $\{3, 4, 3\}$. In this last case the proof runs as above, making use of the corresponding extremum property of the regularly situated octahedron.

We call a convex polyhedron isomorphic with $\{3, 4\}$ an octahedron. Symmetrising an octahedron with respect to a plane through O and ortogonal to a diagonal of it, we obtain a new octahedron. Two further such symmetrisations yield an octahedron of centre O with mutually perpendicular diagonals. Among the octahedra of this property there is, evidently, a best one and a symmetrisation with respect to a plane passing through O and orthogonal to an arbitrarily chosen edge shows that it must be regular. Thus Theorem 2 is proved.

Two of the most interesting instances of regular star-polytopes are $\left\{3, 3, \frac{5}{2}\right\}$ and $\left\{\frac{5}{2}, 3, 3\right\}$. They are isomorphic with $\{3, 3, 5\}$ and $\{5, 3, 3\}$, respectively; on account of this they have the same numerical properties as their convex equivalents, apart from their common density which equals 191. Our above proof shows immediately that *among the star-polytopes of density* 191 *having either* 600 *tetrahedron cells or* 600 *tetrahedral vertices,* $\left\{3, 3, \frac{5}{2}\right\}$ *and* $\left\{\frac{5}{2}, 3, 3\right\}$ *have the smallest spherical shell.*

Turning now to sphere packings and sphere coverings in the 3-dimensional spherical space (i. e. on the surface of a 4-dimensional sphere) we

[8] In case of a tetrahedron, octahedron or their analogues Theorem 2 may be proved more directly by applying the symmetrisation immediately to the polytope, instead of the bounding simplices.

find here relations[9] essentially different from those in the 2-dimensional case, considered at the end of § 2. In fact, the inspheres and circumspheres of the cells of the spherical honeycomb $\{5, 3, 3\}$ form a packing and a covering of density

$$\frac{60}{\pi}\left(\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}\right)=0{,}774\ldots$$

and

$$\frac{60}{\pi}(\delta-\sin\delta)=1{,}439\ldots,\quad \delta=\frac{2\pi}{3}-\arc\cos\frac{1}{4},$$

respectively, whereas in Euclidean space the greatest known packing density and the smallest known covering density is $\pi/\sqrt{18}=0{,}740\ldots$ and $\sqrt{125}\pi/24=1{,}464\ldots$, respectively.

It may be supposed that the above arrangements of 120 spheres yield the absolute maximum and minimum of the packing and covering densities of at least three equal spheres in spherical space. We shall show that they are locally the best arrangements:[10]

An irregular packing (covering) of 120 equal spheres arising from the inspheres (circumspheres) of the cells of the honeycomb $\{5, 3, 3\}$ *by a small variation of the spheres will have a smaller (greater) density than that of the regular packing (covering).*

In proving this, consider the polytope Π bounded by the hyperplanes of the boundaries of the 120 spheres arranged irregularly on the 4-dimensional unit sphere S. Since a polytope with merely tetrahedral vertices does not change its topologic type by little variation of their cells, Π is isomorphic with $\{5, 3, 3\}$.

If none of the spheres penetrates into another, then the spheres are contained in the cells of the honeycomb arising by radial projection of Π onto S. These cells are spherical dodecahedra of total volume $2\pi^2$, not all of them being regular. But since among the spherical dodecahedra containing a sphere the circumscribed regular dodecahedron has the least volume, the spheres must be smaller than the inspheres of the honeycomb $\{5, 3, 3\}$.

If, on the other hand, the spheres cover S, then the polytope Π is contained in S. On the other hand, it is circumscribed around the concentric sphere of radius $r=\sqrt{1-\varrho^2}$, denoting by ϱ the Euclidean radius of the

[9] H. S. M. Coxeter, Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), pp. 263—274.

[10] The statement concerning the packing was already noticed in the paper of L. Fejes Tóth, On close-packings of spheres in spaces of constant curvature, *Publ. Math. Debrecen,* **3** (1953), pp. 158—167. The statement concerning the covering seems to be new.

covering spheres. But, on account of Theorem 2, r is less than it is in the regular case. Hence the spheres of an irregular covering must be greater than the circumspheres of the honeycomb $\{5, 3, 3\}$.

Considering the inspheres of the honeycomb $\{5, 3, 3\}$ as being material spheres (spheres unable to overlap), it is evident that none of them can be moved separately. Now we have proved that the whole configuration is *rigid*. Our result concerning the circumspheres of the honeycomb $\{5, 3, 3\}$ can be interpreted analogously: the condition that no „vacuum" does arise admits no other motions of the spheres than rigid motions of the whole configuration.

(Received 30 March 1955)

ОХАРАКТЕРИЗОВАНИЕ 9 ПРАВИЛЬНЫХ ТЕЛ ИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Л. Фееш Тот (Будапешт)

(Резюме)

Пусть f, e и v означают число граней, ребер и вершин описанного вокруг сферы единичного радиуса выпуклого многогранника. Тогда, как автор уже ранее доказал, для поверхности многогранника имеет место неравенство

$$F \geqq e \sin \frac{\pi f}{e}\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi f}{e} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi v}{2e} - 1\right).$$

В настоящей работе автором между прочим доказывается, что с помощью удобно выбранного определения можно распространить это неравенство и на случай невыпуклых многогранников, причем так, чтобы равенство имело место только для 9 правильных тел.

UNTERSUCHUNG DER INTEGRALE UND DERIVIERTEN GEBROCHENER ORDNUNG MIT DEN METHODEN DER KONSTRUKTIVEN FUNKTIONENTHEORIE

Von

D. KRÁLIK (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

1. Einleitung

Die Untersuchung der reellen Funktionen mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie geht auf S. BERNSTEIN zurück. Von ihm stammen die ersten wichtigen Ergebnisse, welche die einer Lipschitzbedingung α-ter Ordnung $(0<\alpha<1)$ genügende Funktion auf Grund ihres Annäherungsgrades durch gewöhnliche oder trigonometrische Polynome zu charakterisieren gestatten. Diese Ergebnisse wurden später auf Funktionen, die eine verallgemeinerte Lipschitzbedingung erfüllen, ausgedehnt, womit auch die sogenannten Lip (α, p)-Funktionenklassen[1] $(0<\alpha<1\,;\ p\geqq 1)$ auf ähnliche Weise zu charakterisieren gelang.[2] Das Problem des Falles $\alpha=1$ nimmt eine Sonderstellung ein. Es wurde von G. ALEXITS[3] dadurch gelöst, daß er in diesem Fall statt der Fourierreihe selbst den Annäherungsgrad der Fejérschen Mittel der konjugierten Reihe betrachtet hat.

Diese Charakterisierungen der Klassen Lip (α, p) besagen kaum etwas über die Annäherung in einzelnen Punkten, da sie die Abweichung der Fejérschen Mittel von den Funktionen in der Metrik des Raumes $L^p[0, 2\pi]$ betrachten. Im Fall der Funktionenklasse Lip $(1, p)$ gelang es aber G. ALEXITS[4] auch die Frage der punktweise Annäherung zu beantworten, indem er zeigte, daß eine Funktion $f(x)$ dann und nur dann zur Klasse Lip $(1, p)$ $(p>1)$ gehört,

[1] Eine Funktion $f(x)$ gehört im Intervall $[a, b]$ zur Funktionenklasse Lip (α, p) $(0<\alpha\leqq 1;\ p\geqq 1)$, wenn sie in einem, das Intervall $[a, b]$ in seinem Inneren enthaltenden größeren Intervall definiert, dort L-integrierbar ist und für genügend kleine h der Bedingung

$$\left(\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqq C|h|^\alpha$$

genügt.

[2] S. z. B. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации (Москва—Ленинград, 1947), S. 226.

[3] G. ALEXITS, Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), S. 29—40.

[4] G. ALEXITS, Sur la caractérisation de certaines classes de fonctions au sens de la théorie constructive des fonctions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6 (1955), S. 41—46.

wenn es eine L^p-integrierbare Funktion $\Psi(x)$ gibt, so daß die folgenden Ungleichungen für alle x und n erfüllt sind:

$$|\sigma_n(f;x)-f(x)| \leqq \frac{\Psi(x)}{n}; \quad |\tilde{\sigma}_n(f;x)-\tilde{f}(x)| \leqq \frac{\Psi(x)}{n},$$

wo $\sigma_n(f;x)$ das n-te Fejérsche Mittel der Fourierreihe, $\tilde{\sigma}_n(f;x)$ das der konjugierten Reihe bedeutet. ALEXITS bedient sich beim Beweise unter anderem eines sehr einfachen reihentheoretischen Hilfssatzes,[5] der kurz folgenderweise formuliert werden kann: Damit die arithmetischen Mittel der Teilsummen einer Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu$ in der Metrik eines Banach-Raumes beschränkt seien, ist notwendig und hinreichend, daß die arithmetischen Mittel der Teilsummen der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu}{\nu}$ in der Metrik des betreffenden Banach-Raumes gegen ein Grenzelement Φ konvergieren und die Abweichung des n-ten arithmetischen Mittels von Φ die Größenordnung $\frac{1}{n}$ hat.

Im folgenden werden wir durch Erweiterung dieses Hilfssatzes auf die Reihen

$$\sum \varphi_\nu \quad \text{und} \quad \sum \frac{\varphi_\nu}{\nu^\alpha} \quad \text{mit} \quad 0<\alpha<1$$

neue Ergebnisse aus dem Gebiet der konstruktiven Funktionentheorie erhalten. Die ersten beziehen sich auf Integrale und Derivierte gebrochener Ordnung. Diese Begriffe gehen auf RIEMANN und LIOUVILLE zurück. Ihre ausführliche Betrachtung befindet sich bei HARDY und LITTLEWOOD,[6] wo viele interessante Ergebnisse bezüglich der Struktur der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung festgestellt wurden. Wir werden den Approximationsgrad der Integrale bzw. Derivierten α-ter Ordnung $(0<\alpha<1)$ durch die Fejérschen Mittel ihrer Fourierreihen untersuchen, aus diesem auf ihre Struktur schließen und so zu Ergebnissen gelangen, welche von HARDY und LITTLEWOOD auf direktem, aber komplizierterem Wege gewonnen wurden.

Nach dem Ergebnis von ALEXITS hinsichtlich der Charakterisierung der Klasse Lip$(1,p)$ durch punktweise Annäherung erhebt sich die Frage, ob nicht etwa eine analoge Charakterisierung der Funktionenklasse Lip(α,p) $(0<\alpha<1)$ möglich wäre. Die Erzielung einer derartigen Charakterisierung nur auf Grund reihentheoretischer Hilfssätze, wie bei ALEXITS, scheint aber nicht möglich zu sein. Wir werden aber auf ähnliche einfache Weise eine

[5] L. c. [3], S. 32—34.

[6] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Some properties of fractional integrals. I., *Math. Zeitschr.*, **27** (1928), S. 565—606.

weitere Funktionenklasse, nämlich die Klasse Lip $(\alpha-0, p)$ charakterisieren. Zu dieser gehören alle Funktionen, die in jeder Klasse Lip $(\alpha-\varepsilon, p)$ mit $\varepsilon>0$ enthalten sind. Unser Ergebnis ist folgendes:

Eine Funktion $f(x)$ gehört zur Funktionenklasse Lip $(\alpha-0, p)$ $(0<\alpha<1, 1<p<+\infty)$ *genau dann, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon>0$ eine L^p-integrierbare Funktion $\Psi_\varepsilon(x)$ gibt, so daß für alle x und n die Ungleichungen*

$$|\sigma_n(f;x)-f(x)|\leqq \frac{\Psi_\varepsilon(x)}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \quad |\tilde{\sigma}_n(f;x)-\tilde{f}(x)|\leqq \frac{\Psi_\varepsilon(x)}{n^{\alpha-\varepsilon}}$$

gelten.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Charakterisierung dieser Funktionenklasse auch auf andere Art möglich ist, bei welcher wir die Funktion nicht durch die Fejérschen Mittel, sondern einfach durch die Teilsummen ihrer Fourierreihe approximieren; dann muß aber die Abweichung der Teilsummen von der Funktion wieder in der Metrik des Raumes $L^p[0, 2\pi]$ gerechnet werden.

2. Zwei Hilfssätze über die Summierung von Reihen

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ Elemente eines beliebigen Banachschen Raumes E und betrachten wir die folgenden Reihen:

$$\text{(A)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu, \qquad \text{(B)} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu}{\nu^\alpha},$$

wo $0<\alpha<1$ ist. Wir wollen die Norm eines beliebigen Elementes U von E mit $\|U\|$ bezeichnen; das arithmetische Mittel der ersten n Teilsummen von (A) bezeichnen wir mit σ_n, das von (B) mit $\sigma_n(\alpha)$. Es besteht der folgende

HILFSSATZ 1. *Wenn die arithmetischen Mittel σ_n der Reihe* (A) *in der Metrik von E gegen ein Element S von E konvergieren, wobei*

$$\|\sigma_n-S\|=O\left(\frac{1}{n^\beta}\right),$$

so konvergieren die arithmetischen Mittel $\sigma_n(\alpha)$ der Reihe (B) *auch gegen ein Element $S(\alpha)$ von E und es ist*

$$\|\sigma_n(\alpha)-S(\alpha)\|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\right),$$

vorausgesetzt, daß außer der Bedingung $0<\alpha<1$ auch die Bedingungen $0\leqq\beta<1$ und $\alpha+\beta<1$ erfüllt sind.

Bezeichnen wir das ν-te Glied der Reihe

$$(\varphi_1 - S) + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots$$

mit φ_ν^* $(\nu = 1, 2, \ldots)$, die n-te Teilsumme bzw. das n-te arithmetische Mittel mit S_n^* bzw. σ_n^* und das n-te arithmetische Mittel der Reihe $\sum \frac{\varphi_\nu^*}{\nu^\alpha}$ mit $\sigma_n^*(\alpha)$. Nach einfacher Rechnung erhalten wir durch eine Abel-Transformation[7]

$$\sigma_m^*(\alpha) - \sigma_n^*(\alpha) = \sum_{\nu=n+1}^{m} [\sigma_\nu^*(\alpha) - \sigma_{\nu-1}^*(\alpha)] = \sum_{\nu=n+1}^{m} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{\nu(\nu+1)} k^{1-\alpha} \varphi_k^* =$$
$$= \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu-1} (k^{1-\alpha} - [k+1]^{1-\alpha}) S_k^* + \nu^{1-\alpha} S_\nu^* \right\}.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} = (\alpha - 1)(k + \theta_k)^{-\alpha}$, $0 < \theta_k < 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, woraus sich

$$\sigma_m^*(\alpha) - \sigma_n^*(\alpha) = (\alpha - 1) \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \sum_{k=1}^{\nu-1} (k + \theta_k)^{-\alpha} S_k^* +$$
$$+ \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{S_\nu^*}{\nu^\alpha (\nu+1)} = A_{mn} + B_{mn}$$

ergibt. Unterwerfen wir das erste Glied der rechten Seite wieder einer Abel-Transformation, so kann es wegen

$$\sum_{j=1}^{k} S_j^* = (k+1)\sigma_k^*$$

auch folgenderweise geschrieben werden:

$$A_{mn} = (\alpha - 1) \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu-2} [(k+\theta_k)^{-\alpha} - (k+1+\theta_{k+1})^{-\alpha}](k+1)\sigma_k^* + \right.$$
$$\left. + (\nu - 1 + \theta_{\nu-1})^{-\alpha} \nu \sigma_{\nu-1}^* \right\}.$$

Hierbei ist $(k+\theta_k)^{-\alpha} - (k+1+\theta_{k+1})^{-\alpha} = \alpha(1 + \theta_{k+1} - \theta_k)\xi^{-\alpha-1}$, wo ξ einen geeigneten Zahlenwert zwischen $k + \theta_k$ und $k + 1 + \theta_{k+1}$ bedeutet, und offenbar gelten auch die Ungleichungen:

$$|\alpha(1 + \theta_{k+1} - \theta_k)\xi^{-\alpha-1}| \leqq 2k^{-\alpha-1}, (\nu - 1 + \theta_{\nu-1})^{-\alpha} < (\nu-1)^{-\alpha} \leqq 2\nu^{-\alpha} (\nu \geqq 2).$$

Da definitionsgemäß

$$\sigma_k^* = \sigma_k - S + \frac{S}{k+1}$$

[7] Wir verstehen unter σ_n^* den Wert von $\frac{S_1^* + S_2^* + \cdots + S_n^*}{n+1}$ anstatt $\frac{S_1^* + S_2^* + \cdots + S_n^*}{n}$, was das Wesen der Sache nicht berührt, erleichtert aber die Rechnungen.

gilt und nach unserer Annahme

$$\|\sigma_k - S\| \leqq \frac{C}{k^\beta}$$

ist, läßt sich $\|\sigma_k^*\|$ durch

$$\|\sigma_k^*\| \leqq \frac{C}{k^\beta} + \frac{\|S\|}{k+1}$$

abschätzen. Wir erhalten somit für A_{mn} die folgende Abschätzung:

$$\|A_{mn}\| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \left[\sum_{k=1}^{\nu-2} (4Ck^{-\alpha-\beta} + 2k^{-\alpha-1}\|S\|) + 4C\nu^{1-\alpha-\beta} + 2\nu^{-\alpha}\|S\|\right].$$

Daraus ergibt sich sofort, wenn wir die auf α und $\alpha+\beta$ gemachten Bedingungen beachten:

$$\|A_{mn}\| \leqq C_1(\alpha, \beta)\left[\frac{1}{n^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{m^{\alpha+\beta}}\right] + C_2(\alpha)\|S\|\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right],$$

wo $C_1(\alpha, \beta)$ und $C_2(\alpha)$ nur von α und β abhängige Konstanten sind. — Die Abschätzung von B_{mn} geschieht auf ähnliche Weise. Wenn wir nämlich B_{mn} einer Abel-Transformation unterwerfen, können wir es in folgender Form schreiben:

$$B_{mn} = \sum_{\nu=n+1}^{m-1} \left[\frac{1}{\nu^\alpha(\nu+1)} - \frac{1}{(\nu+1)^\alpha(\nu+2)}\right](\nu+1)\sigma_\nu^* + \frac{\sigma_m^*}{m^\alpha} - \frac{\sigma_n^*}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Daraus ergibt sich wegen

$$\left|\frac{1}{\nu^\alpha(\nu+1)} - \frac{1}{(\nu+1)^\alpha(\nu+2)}\right| < 3\nu^{-\alpha-2}$$

die Abschätzung

$$\|B_{mn}\| \leqq C_3(\alpha, \beta)\left[\frac{1}{n^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{m^{\alpha+\beta}}\right] + C_4(\alpha)\|S\|\left[\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \frac{1}{m^{\alpha+1}}\right],$$

wo $C_3(\alpha, \beta)$ und $C_4(\alpha)$ nur von α und β abhängige Konstanten bedeuten. Mit Rücksicht auf

$$\|\sigma_m(\alpha) - \sigma_n(\alpha)\| \leqq \|\sigma_m^*(\alpha) - \sigma_n^*(\alpha)\| + \|S\|\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right],$$

erhalten wir zusammenfassend

$$\|\sigma_m(\alpha) - \sigma_n(\alpha)\| \leqq C_5(\alpha, \beta)\left[\frac{1}{n^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{m^{\alpha+\beta}}\right] + C_4(\alpha)\|S\|\left[\frac{1}{n^{1+\alpha}} + \frac{1}{m^{1+\alpha}}\right] +$$
$$+ [C_2(\alpha) + 1]\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right]\|S\|,$$

wo $C_5(\alpha, \beta) = C_1(\alpha, \beta) + C_3(\alpha, \beta)$ gesetzt wurde. Da nach unserer Voraussetzung $\alpha + \beta < 1$ ist, haben wir damit den Hilfssatz 1 bewiesen.

Die Umkehrung unseres Hilfssatzes ist im allgemeinen nicht richtig. Nur im Fall $\alpha=1, \beta=0$ gilt, wie G. ALEXITS[8] bewiesen hat, auch die Umkehrung. Wenn $0<\alpha<1$ und das n-te arithmetische Mittel der Reihe (B) gegen irgendein Element von E konvergiert und die Abweichung von $\sigma_n(\alpha)$ vom Grenzelement die Größenordnung $\frac{1}{n^\alpha}$ hat, so können wir nur behaupten, daß die Norm des n-ten arithmetischen Mittels der Reihe (A) von der Größenordnung $\log n$ ist.

HILFSSATZ 2. *Wenn die arithmetischen Mittel σ_n der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu$ in der Metrik des Raumes E gegen ein Element S von E konvergieren und*

$$\|\sigma_n - S\| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

ist, so konvergieren im Fall $0<\gamma<\alpha\leqq 1$ auch die arithmetischen Mittel $\sigma_n(\gamma)$ der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\gamma \varphi_\nu$ gegen ein Element $S(\gamma)$ von E, und es ist

$$\|\sigma_n(\gamma) - S(\gamma)\| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}\right).$$

Der Beweis verläuft fast wörtlich wie beim Hilfssatz 1.

3. Einiges über Integrale und Derivierte gebrochener Ordnung

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ L-integrierbare Funktion. Unter dem α-ten Integral von $f(x)$ versteht man die Funktion[9]

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,$$

wo $\Gamma(\alpha)$ die Eulersche Gammafunktion bedeutet. Man kann beweisen,[10] daß $f_\alpha(x)$ für fast alle x existiert und L-integrierbar ist. In der Theorie der periodischen Funktionen ist es zweckmäßiger, die Definition von H. WEYL[11] zugrunde zu legen. Nehmen wir nämlich an, daß $f(x)$ eine L-integrierbare,

[8] L. c. [3], S. 32—34.

[9] Vgl. A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series* (Warszawa—Lwów, 1935), S. 222—225.

[10] L. c. [9], wo sich auch die Literaturangaben befinden.

[11] H. WEYL, Bemerkungen zum Begriff der Differentialquotienten gebrochener Ordnung, *Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. in Zürich*, **62** (1917), S. 296—302. S. auch das Buch von ZYGMUND.

periodische Funktion mit der Periode 2π bedeutet, für welche

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$$

ist, so hat H. WEYL gezeigt, daß man in der Definition von $f_\alpha(x)$ auch $a = -\infty$ setzen darf. Ist dann $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} C_\nu e^{i\nu x}$ die Fourierreihe von $f(x)$, so gilt nach WEYL[12] für fast alle x

$$f_\alpha(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} C_\nu \frac{e^{i\nu x}}{(i\nu)^\alpha}.$$

Setzt man $2C_\nu = a_\nu - ib_\nu$, ferner $A_\nu(x) = a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$, $B_\nu(x) = a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x$, so läßt sich dies in reeller Form folgenderweise schreiben:

$$f_\alpha(x) = \cos\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu(x)}{\nu^\alpha} + \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu(x)}{\nu^\alpha}.$$

Die Definition der Derivierten α-ter Ordnung geschieht folgendermaßen: Ist $f_{1-\alpha}(x)$ fast überall differenzierbar, so heißt die Funktion

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x)$$

die Derivierte α-ter Ordnung von $f(x)$. Ist $f_{1-\alpha}(x)$ absolut stetig, so ist $f^{(\alpha)}(x)$ integrierbar und

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (i\nu)^\alpha C_\nu e^{i\nu x}$$

die Fourierreihe von $f^{(\alpha)}(x)$. In diesem Fall ist $f(x)$ offensichtlich das Integral α-ter Ordnung von $f^{(\alpha)}(x)$. Wissen wir von der letzten Reihe, daß sie die Fourierreihe einer L-integrierbaren Funktion ist, so existiert $f^{(\alpha)}(x)$ und hat die vorangehende Reihe zur Fourierreihe. In reeller Form ist sie von der Gestalt:

$$\cos\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\alpha A_\nu(x) - \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\alpha B_\nu(x).$$

12 L. c. 9, S. 223.

4. Annäherungsgrad der Fejérschen Mittel der Fourierreihen von Integralen und Derivierten gebrochener Ordnung

Wir setzen voraus, daß die Funktionen, über welche wir im folgenden sprechen werden, nach 2π periodisch und L-integrierbar sind, ferner daß ihr über $[0, 2\pi]$ erstrecktes Integral verschwindet. Als Raum E betrachten wir den Raum $L^p[0, 2\pi]$ $(p \geqq 1)$ oder kurz L^p, wobei wir den Raum der in $[0, 2\pi]$ stetigen periodischen Funktionen mit L^∞ bezeichnen. Mit $\sigma_n(f; x)$ bezeichnen wir das n-te Fejérsche Mittel der Fourierreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(x)$ einer beliebigen L-integrierbaren Funktion $f(x)$, mit $\tilde{\sigma}_n(f; x)$ und $\tilde{f}(x)$ die entsprechenden konjugierten Ausdrücke.

Satz 1. *Ist* $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(x)$ *eine Fourierreihe, so ist die Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu(x)}{\nu^\alpha}$ *die Fourierreihe einer Funktion* $g(x)$, *und für* $0 < \alpha < 1$ *gilt außerdem*

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(g; x) - g(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Aus dem Hilfssatz 1 folgt nämlich, daß die Fejérschen Mittel $\sigma_m(x)$ und $\sigma_n(x)$ der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu(x)}{\nu^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ die folgende Beziehung erfüllen:

$$\|\sigma_m(x) - \sigma_n(x)\|_1 = O\left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{m^\alpha}\right) = o(1).$$

Daraus folgt,[13] daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu(x)}{\nu^\alpha}$ Fourierreihe einer Funktion $g(x)$ ist und wegen $\sigma_n(x) = \sigma_n(g; x)$ gilt

$$\|\sigma_n(g; x) - g(x)\|_1 = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Daraus ergibt sich das folgende

Korollar. *Sind beide Funktionen* $f(x)$ *und* $\tilde{f}(x)$ *integrierbar, so gilt im Fall* $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Nach Voraussetzung sind beide Reihen $\sum A_\nu(x)$ und $\sum B_\nu(x)$ Fourierreihen und nach Satz 1 konvergieren in der Metrik des Raumes L die n-ten

[13] L. c. [9], S. 84—85 (Theorem 4. 34).

arithmetischen Mittel der Reihen $\sum \frac{A_\nu(x)}{\nu^\alpha}$ und $\sum \frac{B_\nu(x)}{\nu^\alpha}$ gegen ihre Grenzfunktionen in der Größenordnung $\frac{1}{n^\alpha}$, woraus die Behauptung folgt.

Es ist klar, daß man statt der Normen der im Hilfssatz 1 vorkommenden Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ ihre Absolutbeträge nehmen kann, falls diese Größen reelle Zahlen sind. Daraus folgt der

SATZ 2. *Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt fast überall*

$$|\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)| = O_x\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

wo die in O_x vorkommende Konstante von Punkt zu Punkt variieren kann.

Es konvergieren nämlich die Fejérschen Mittel der Reihe $\sum A_\nu(x)$ bzw. $\sum B_\nu(x)$ laut bekannter Summationssätze fast überall gegen $f(x)$ bzw. $\tilde{f}(x)$. Infolgedessen sind sie fast überall von der Größenordnung $O_x(1)$, woraus auf Grund des Hilfssatzes 1 die Behauptung folgt.

Nehmen wir $f \in L^p$ $(1 < p < +\infty)$ an, so können wir etwas mehr behaupten. In diesem Fall gehört nämlich die konjugierte Funktion $\tilde{f}(x)$ auch zu L^p.[14] Daraus folgt einerseits in derselben Weise wie vorher

$$\left(\int_0^{2\pi} |\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = \|\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

andererseits bleiben die Absolutbeträge von $\sigma_n(f; x)$ und $\tilde{\sigma}_n(f; x)$ nach einem bekannten Satz von HARDY und LITTLEWOOD[15] unter je einer L^p-integrierbaren Funktion:

$$|\sigma_n(f; x)| \leqq \psi_1(x), \quad |\tilde{\sigma}_n(f; x)| \leqq \psi_2(x)$$

mit $\psi_1 \in L^p$ und $\psi_2 \in L^p$. Da die Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ fast überall endlich sind, folgt auf Grund des Hilfssatzes 1, daß die $\sigma_n(f_\alpha; x)$ in fast allen Punkten gegen $f_\alpha(x)$ konvergieren und in diesen Punkten ist

$$|\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)| \leqq \frac{\Psi(x)}{n^\alpha},$$

wo $\Psi(x) = C_\alpha \cdot \mathrm{Max}\,\{\psi_1(x), \psi_2(x)\}$ und C_α eine nur von α abhängige Konstante bedeutet. Wenn wir in der Nullmenge von Punkten, in welchen die $\sigma_n(f_\alpha; x)$ nicht konvergieren, $\Psi(x) = +\infty$ setzen, erhalten wir den folgenden

[14] L. c. [9], S. 147.
[15] L. c. [9], S. 248 (Theorem ix).

Satz 3. *Ist* $f \in L^p$ $(1 < p < +\infty)$, *ferner* $0 < \alpha < 1$. *so bestehen beide Ungleichungen*

$$\|\sigma_n(f_\alpha;\, x) - f_\alpha(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

und

$$|\sigma_n(f_\alpha;\, x) - f_\alpha(x)| \leqq \frac{\Psi(x)}{n^\alpha},$$

wobei die zweite Ungleichung für alle x-Werte mit $\Psi \in L^p$ *gültig ist.*

Aus diesem folgt leicht ein von Hardy und Littlewood bewiesener Satz bezüglich der Struktur der Funktionen $f_\alpha(x)$. Aus

$$\|\sigma_n(f_\alpha;\, x) - f_\alpha(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad (0 < \alpha < 1\,;\ p \geqq 1)$$

folgt nämlich nach einem bekannten Satz von Bernstein—Achieser,[16] daß die Funktion $f_\alpha(x)$ zur Funktionenklasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ gehört. Dieses Ergebnis hinsichtlich der Klassenzugehörigkeit von $f_\alpha(x)$ wurde von Hardy und Littlewood entdeckt, aber auf einem anderen direkten, jedoch schwierigeren Weg bewiesen.[17]

Satz 4. *Ist* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\beta, p)$ *mit* $0 < \beta < 1$ *und* $1 \leqq p \leqq +\infty$, *ist ferner* $0 < \alpha < 1$ *und* $\alpha + \beta < 1$, *so approximieren die Mittel* $\sigma_n(f_\alpha; x)$ *die Funktion* $f_\alpha(x)$ *in der Metrik von* L^p *in der Größenordnung* $\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}$, *d. h.*

$$\|\sigma_n(f_\alpha;\, x) - f_\alpha(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\right).$$

Da in diesem Fall $\tilde{f}(x) \in \mathrm{Lip}\,(\beta, p)$, so haben wir auf Grund des schon zitierten Satzes von Bernstein—Achieser:

$$\|\sigma_n(f;\, x) - f(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \quad \|\tilde{\sigma}_n(f;\, x) - \tilde{f}(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Nach unserem Hilfssatz 1 konvergieren die n-ten arithmetischen Mittel der Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu(x)}{\nu^\alpha}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu(x)}{\nu^\alpha}$ in der Metrik von L^p und außerdem ist ihre Abweichung von ihrem Grenzelement von der Größenordnung $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\right)$, woraus unsere Behauptung folgt.

Aus unserem Ergebnis erhalten wir $f_\alpha(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha + \beta, p)$, zu welchem Resultat Hardy und Littlewood auf einem anderen Weg gelangt sind.[18]

16 L. c. ^{2}.

17 L. c. ^{6}, S. 601.

18 L. c. ^{6}, S. 601 (Theorem 25).

SATZ 5. *Sei* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$, *wo* $0 < \alpha \leqq 1$ *und* $1 < p < +\infty$. *Bedeutet* γ *eine beliebige der Ungleichung* $0 < \gamma < \alpha$ *genügende Zahl, so existiert die Derivierte* $f^{(\gamma)}(x)$ *und es gilt*

$$\|\sigma_n(f^{(\gamma)}; x) - f^{(\gamma)}(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}\right).$$

Die Funktion $\tilde{f}(x)$ gehört nämlich auch zur Funktionenklasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ und es bestehen die Beziehungen

$$\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right); \quad \|\tilde{\sigma}_n(f; x) - \tilde{f}(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Nach Hilfssatz 2 konvergieren also die n-ten arithmetischen Mittel der Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\gamma \cdot A_\nu(x)$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\gamma \cdot B_\nu(x)$ in der Metrik des Raumes L^p gegen je ein Element desselben Raumes und zwar in der Größenordnung $\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}$. Die Normen der arithmetischen Mittel der beiden vorigen Reihen sind also in L^p beschränkt, woraus folgt,[19] daß diese Reihen Fourierreihen von L^p-integrierbaren Funktionen sind. Es existiert also $f^{(\gamma)}(x)$ sie gehört zu L^p und es besteht die im Satz 5 ausgesprochene Relation. Wir bemerken noch, daß im Fall $0 < \alpha < 1$ unser Satz auch dann gültig bleibt, wenn $p = 1$ oder $p = +\infty$ ist, denn in diesem Fall gehört die konjugierte Funktion auch zur Klasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$.

Nach BERNSTEIN—ACHIESER folgt aus unserem Satz $f^{(\gamma)}(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha - \gamma, p)$, zu welchem Ergebnis HARDY und LITTLEWOOD auf direktem, aber längerem Weg gelangt sind.[20]

SATZ 6. *Die Funktion* $f(x)$ *gehört zur Klasse* $\mathrm{Lip}\,(\alpha - 0, p)$ $(0 < \alpha \leqq 1;$ $1 < p < +\infty)$ *genau dann, wenn es zu jeder Zahl* $\varepsilon > 0$ *eine* L^p-*integrierbare, im allgemeinen von der Zahl* ε *abhängende Funktion* $\Psi_\varepsilon(x)$ *gibt, so daß für alle* x *und* n *die Ungleichungen*

$$(1) \quad |\sigma_n(f; x) - f(x)| \leqq \frac{\Psi_\varepsilon(x)}{n^{\alpha-\varepsilon}} \quad \text{und} \quad (2) \quad |\tilde{\sigma}_n(f; x) - \tilde{f}(x)| \leqq \frac{\Psi_\varepsilon(x)}{n^{\alpha-\varepsilon}}$$

erfüllt sind.

Genauer: das Bestehen beider Ungleichungen ist für $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha - 0, p)$ notwendig; ist aber nur eine von ihnen erfüllt, so folgt schon, daß sowohl $f(x)$ als auch $\tilde{f}(x)$ zur Klasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha - 0, p)$ gehören.

19 L. c. 9, S. 84.

20 L. c. 6, S. 602 - 604 (Theorem 26).

Wenn $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha - 0, p)$, so gehört sie für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ zur Klasse $\mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, p\right)$ und dasselbe gilt auch für $\tilde{f}(x)$. Da

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(x) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(x)$$

Fourierreihen von Funktionen der Klasse $\mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, p\right)$ sind, so folgt nach BERNSTEIN—ACHIESER aus Satz 5, daß die Reihen

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha-\varepsilon} A_\nu(x) \quad \text{und} \quad (4) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha-\varepsilon} B_\nu(x)$$

Fourierreihen von Funktionen der Klasse $\mathrm{Lip}\left(\frac{\varepsilon}{2}, p\right)$ sind. Auf Grund eines schon zitierten Satzes von HARDY und LITTLEWOOD bleiben die Absolutbeträge der Fejérschen Mittel der Reihen (3) und (4) unter je einer L^p-integrierbaren Funktion. Aus Hilfssatz 1 folgt dann, daß die Beziehungen (1) und (2) fast überall bestehen. Wenn wir in der Nullmenge von Punkten, wo $\sigma_n(f; x)$ bzw. $\tilde{\sigma}_n(f; x)$ nicht konvergieren, $\Psi_\varepsilon(x) = +\infty$ setzen, so gelten (1) und (2) in allen Punkten.

Nehmen wir nun an, daß mindestens eine der Ungleichungen (1) oder (2), z. B. (1) für alle Punkte x und beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt. Integrieren wir beide Seiten dieser Ungleichung, so erhalten wir:

$$\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_p \leqq \frac{\|\Psi_\varepsilon(x)\|_p}{n^{\alpha-\varepsilon}} = \frac{C}{n^{\alpha-\varepsilon}},$$

woraus nach BERNSTEIN—ACHIESER folgt, daß $f(x)$ (und auch $\tilde{f}(x)$) zur Klasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha - \varepsilon, p)$ gehört. Da ε beliebig war, haben wir $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha - 0; p)$ und analoges gilt für $\tilde{f}(x)$, woraus die Gültigkeit von (2) folgt. Damit haben wir den Satz 6 bewiesen.

In der Einleitung haben wir schon bemerkt, daß eine ähnliche Charakterisierung der Funktionenklasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ $(0 < \alpha < 1)$ allein mit Hilfe reihentheoretischer Betrachtungen nicht möglich zu sein scheint. Das hat seinen Grund einerseits darin, daß die Umkehrung des Hilfssatzes 1 im allgemeinen nicht gilt, andererseits sind die Reihen $\sum \nu^\alpha A_\nu(x)$ und $\sum \nu^\alpha B_\nu(x)$ im Fall $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ im allgemeinen nicht Fourierreihen von L^p-integrierbaren Funktionen,[21] wie man es durch einfache Beispiele zeigen kann. Sei z. B.[22]

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^{1/2+\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

[21] Der Umstand, daß für $\alpha = 1$ die differenzierte Reihe und die differenzierte konjugierte Reihe der Fourierreihe von $f(x)$ selbst Fourierreihen von L^p-integrierbaren Funktionen sind, spielt eine wesentliche Rolle bei der Charakterisierung der Klasse $\mathrm{Lip}\,(1, p)$.

[22] Auf dieses Beispiel hat mich G. ALEXITS aufmerksam gemacht.

Es ist

$$f(x)-\sigma_n(f;x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu^{1/2-\alpha}}{n+1}\sin\nu x+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu^{1/2+\alpha}},$$

woraus sich

$$\|f(x)-\sigma_n(f;x)\|_2=\left[\pi\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu^{1-2\alpha}}{(n+1)^2}+\pi\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+2\alpha}}\right]^{1/2}=O(n^{-\alpha})$$

ergibt, also ist $f(x)\in\mathrm{Lip}\,(\alpha,2)$. Bei unserem Beispiel entsprechen den Reihen $\sum\nu^{\alpha}A_\nu(x)$ bzw. $\sum\nu^{\alpha}B_\nu(x)$ die Reihen $\sum\nu^{-\frac{1}{2}}\sin\nu x$ bzw. $-\sum\nu^{-\frac{1}{2}}\cos\nu x$, die nicht Fourierreihen L^2-integrierbarer Funktionen sind.

Obzwar wir unseren Satz nicht auf die Klasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha,p)$ $(0<\alpha<1;\ 1<p<+\infty)$ ausdehnen können, doch ist das Bestehen einer der Ungleichungen

$$|\sigma_n(f;x)-f(x)|\leqq\frac{\Psi(x)}{n^{\alpha}},\qquad|\tilde{\sigma}_n(f;x)-\tilde{f}(x)|\leqq\frac{\Psi(x)}{n^{\alpha}}$$

mit $\Psi\in L^p$, z. B. der ersten, für $f(x)\in\mathrm{Lip}\,(\alpha,p)$ hinreichend. Nach Integration auf beiden Seiten erhalten wir nämlich

$$\|\sigma_n(f;x)-f(x)\|_p\leqq\frac{\|\Psi(x)\|_p}{n^{\alpha}}=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

woraus nach BERNSTEIN—ACHIESER schon $f(x)\in\mathrm{Lip}\,(\alpha,p)$ folgt.

Ergänzung

In der schon zitierten Arbeit[23] von G. ALEXITS kommt ein Lemma vor, mit dessen Hilfe ihm eine Charakterisierung der Klasse $\mathrm{Lip}\,(1,p)$ gelungen ist. Wir wollen dieses Lemma verallgemeinern und dadurch zu einer Charakterisierung der Funktionenklasse $\mathrm{Lip}\,(\alpha-0,p)$ gelangen.

Es sollen wiederum die Größen $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$ die Elemente eines Banach-Raumes E bedeuten und betrachten wir die Reihen (A) und (B). Dann gilt der folgende

HILFSSATZ 3. *Ist für alle* $m\geqq n+2$

$$\left\|\sum_{\nu=n+1}^{m}\varphi_\nu\right\|=O(\lambda_n),$$

wo $0<\lambda_n$ *und*

$$\lambda_n=o(n^{\alpha})\qquad(0<\alpha\leqq 1),$$

[23] L. c. [3], S. 37.

so gilt die Abschätzung

$$\|S_n - S\| = O\left(\frac{\lambda_n}{n^\alpha}\right)$$

mit

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu}{\nu^\alpha}.$$

Es ist nämlich

$$\| S_m - S_n \| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{m-1} \left| \frac{1}{\nu^\alpha} - \frac{1}{(\nu+1)^\alpha} \right| \left\| \sum_{k=n+1}^{\nu} \varphi_k \right\| + \frac{1}{m^\alpha} \left\| \sum_{\nu=n+1}^{m} \varphi_\nu \right\| =$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{m-1} O(\nu^{-\alpha-1}) \left\| \sum_{k=n+1}^{\nu} \varphi_k \right\| + \frac{1}{m^\alpha} \left\| \sum_{\nu=n+1}^{m} \varphi_\nu \right\| =$$

$$= O(\lambda_n) \sum_{\nu=n+1}^{m-1} \nu^{-\alpha-1} + O\left(\frac{\lambda_n}{m^\alpha}\right) = O\left(\frac{\lambda_n}{n^\alpha} + \frac{\lambda_n}{m^\alpha}\right),$$

woraus unsere Behauptung folgt.

SATZ 7. *Damit die Funktion $f(x)$ der Funktionenklasse* $\mathrm{Lip}\,(\alpha - 0, p)$ *zugehört* $(0 < \alpha \leqq 1;\ 1 < p < +\infty)$, *ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die n-te Teilsumme ihrer Fourierreihe die Funktion $f(x)$ in der Metrik von L^p in der Größenordnung $o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right)$ approximiert, wo die in o enthaltene Konstante im allgemeinen von ε abhängt.*

Es sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(x)$ die Fourierreihe von $f(x)$ und nehmen wir an, daß $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha - 0, p)$. Dann ist $f(x) \in \mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, p\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$, so daß nach dem im Beweis des Satzes 5 gesagten die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha-\varepsilon} A_\nu(x)$ Fourierreihe einer Funktion $g(x)$ aus $\mathrm{Lip}\left(\frac{\varepsilon}{2}, p\right)$ ist. Dann konvergieren[24] aber die Teilsummen der letzten Reihe in der Metrik von L^p gegen $g(x)$, so daß

$$\left\| \sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{\alpha-\varepsilon} A_\nu(x) \right\|_p \leqq \sup_{k \geqq n+1} \left\| \sum_{\nu=n+1}^{k} \nu^{\alpha-\varepsilon} A_\nu(x) \right\|_p = \lambda_n = o(1)$$

ist. Schreiben wir in unserem Hilfssatz 3 für φ_ν den Wert $\nu^{\alpha-\varepsilon} A_\nu(x)$, für $\frac{\varphi_\nu}{\nu^\alpha}$ den Wert $A_\nu(x)$, so erhalten wir

$$\| S_n(x) - f(x) \|_p = O\left(\frac{\lambda_n}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

[24] L. c. [9], S. 153.

mit

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x).$$

Wissen wir umgekehrt von einer Funktion $f(x)$, daß für sie

$$\| S_n(x) - f(x) \|_p = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right)$$

gilt, so folgt nach BERNSTEIN—ACHIESER, da $S_n(x)$ ein trigonometrisches Polynom höchstens n-ter Ordnung ist, $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha-\varepsilon, p)$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha - 0, p)$, womit der Satz 7 bewiesen ist.

Zum Schluß möchte ich Professor G. ALEXITS meinen besten Dank dafür aussprechen, daß er mich auf den Gegenstand aufmerksam gemacht und mit seinen wertvollen Ratschlägen unterstützt hat.

(Eingegangen am 12. April 1955.)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ МЕТОДАМИ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Д. Кралик (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $f \in L[0, 2\pi]$, периодична по 2π, и такая, что $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$. Если $f_\alpha(x)$ означает интеграл порядка α, а $f^{(\gamma)}(x)$ производную порядка γ функции $f(x)$ $(\alpha > 0, \gamma > 0)$, то имеют место следующие теоремы аппроксимации:

1. Если $f(x)$ и сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ обе интегрируемы, то почти всюду имеют место соотношения

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)|\,dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

и

2. $|\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)| = O_x\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$,

где $\sigma_n(f_\alpha; x)$ означает n-ое среднее Фейера ряда Фурье функции $f_\alpha(x)$.

3. Если $f \in L^p$ $(1 < p < +\infty)$ и $0 < \alpha < 1$, то для всех x и n

$$\|\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

и

$$|\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)| \leqq \frac{\Psi(x)}{n^\alpha},$$

где $\psi \in L^p[0, 2\pi]$.

4. Если $f(x) \in \mathrm{Lip}(\beta, p)$ $(0 < \beta < 1,\ 1 \leqq p \leqq \infty)$ и $0 < \alpha < 1$ и $\alpha + \beta < 1$, то

$$\|\sigma_n(f_\alpha; x) - f_\alpha(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\right).$$

5. Пусть $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $(0 < \alpha \leqq 1,\ 1 < p < +\infty)$; если $0 < \gamma < \alpha$, то $f^{(\gamma)}(x)$ существует и

$$\|\sigma_n(f^{(\gamma)}; x) - f^{(\gamma)}(x)\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}\right).$$

6. Мы говорим, что функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}(\alpha - 0, p)$ $(0 < \alpha \leqq 1,$ $1 < p < +\infty)$, если она принадлежит классу $\mathrm{Lip}(\alpha - \varepsilon, p)$ для всякого $\varepsilon > 0$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы было $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha - 0, p)$ является существование при любом $\varepsilon > 0$ функции $\psi_\varepsilon(x)$, зависящей вообще от ε, интегрируемой L^p, и такой, что неравенства

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| \leqq \frac{\Psi_\varepsilon(x)}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \qquad |\tilde{\sigma}_n(f; x) - \tilde{f}(x)| \leqq \frac{\Psi_\varepsilon(x)}{n^{\alpha-\varepsilon}}$$

имеют место при всех n.

7. $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha - 0, p)$ тогда и только тогда, если

$$\|s_n(x) - f(x)\|_p = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right),$$

где $s_n(x)$ n-ая частичная сумма ряда Фурье $f(x)$, а постоянная в o вообще зависит от ε.

Эти теоремы доказываются с помощью трех простых лемм из теории рядов, являющихся по существу обобщениями лемм, опубликованных в работе Г. Алексича (*Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), стр. 29—40).

HYPERBOLISCHE TRIGONOMETRIE AN DEM POINCARÉSCHEN KREISMODELL ABGELESEN

Von

PAUL SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Durch die Arbeiten von H. POINCARÉ[1] verbreitete sich als eine Verwirklichung der hyperbolischen ebenen Geometrie ein wohlbekanntes Modell, wir möchten sagen *Pseudogeometrie*, oder *Bildgeometrie*, die *Poincarésches Kreismodell* jener Geometrie genannt wird, und auch elementargeometrisch leicht angegeben werden kann. Man hat auch die Äquivalenz dieser Pseudogeometrie mit der hyperbolischen ebenen Geometrie in verschiedener Weise erwiesen, und zwar ohne Verwendung der hyperbolischen Trigonometrie.[2] Eine Herleitung der Trigonometrie dieses Modells gilt deshalb für einen Beweis der Formeln der hyperbolischen Trigonometrie. Solche Herleitungen sind mehrere angegeben worden. Besonders elegant gestaltet sich die von J. HJELMSLEV.[3] Später haben auch HOWARD EVES und V. E. HOGGATT,[4] und in einfacherer Weise der Verfasser[5] eine derartige Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie dargetan.

In vorliegender Note wird gezeigt, daß im Besitze drei elementargeometrischer Hilfssätze zwei trigonometrische Formeln für das rechtwincklige *Pseudodreieck*, die schon die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge haben, an diesem Kreismodell sozusagen abzulesen sind. Diese Hilfssätze haben folgenden Wortlaut.

HILFSSATZ 1. *Ist X ein vom Mittelpunkt M verschiedener Punkt im Innern eines Kreises k und wird durch X ein Kreis gelegt, der k in den Punk-*

[1] H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica*, **1** (1882), S. 1—62, besonders § 2, S. 6—8, und § 12, S. 58—61; Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, *ebenda*, S. 193—294, besonders S. 201—202; Mémoire sur les groupes kleinéens, *ebenda*, **3** (1883), S. 49—92, besonders S. 55—56.

[2] Siehe z. B. PAUL SZÁSZ, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), S. 243—250, besonders § 1, S. 244—247.

[3] J. HJELMSLEV, *Grundlag for den projektive Geometri* (Kobenhavn, 1943), § 8, S. 38—39.

[4] HOWARD EVES and V. E. HOGGATT, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *The American Mathematical Monthly*, **58** (1951), S. 469—474.

[5] PAUL SZÁSZ, Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), S. 29—34.

ten Ξ, H *rechtwinklig schneidet, so ist der Schnittpunkt Y der Geraden* ΞH, *MX von der Wahl des durch X gelegten Kreises unabhängig* (Fig. 1).

HILFSSATZ 2. *Ist auf einem Kreis der Bogen* $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ *kleiner als der Halbkreis und bezeichnet M den Schnittpunkt der in* Ξ *bzw.* H *an den Kreis gelegten Tangenten, so ist bei beliebiger Wahl des Zwischenpunktes X auf* $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ *für den Schnittpunkt Y der Geraden* ΞH, *MX stets*

$$\left(\frac{\Xi X}{X\mathrm{H}}\right)^2 = \frac{\Xi Y}{Y\mathrm{H}}.$$

(Fig. 2).

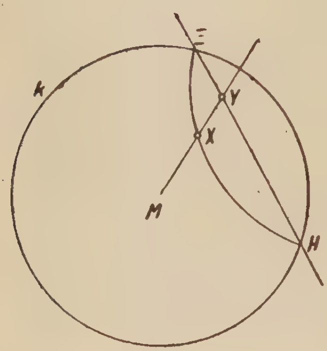


Fig. 1

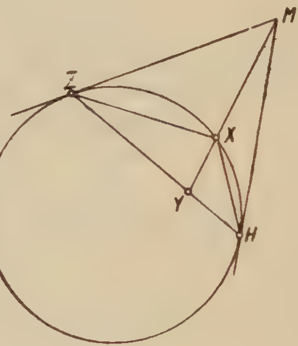


Fig. 2

HILFSSATZ 3. *Ist X ein vom Mittelpunkt M verschiedener Punkt im Innern des Kreises k und sind* Ξ_0, H_0 *die Schnittpunkte der Geraden MX mit k, so bezeichnet, daß X zwischen M und* H_0 *liegt, so gilt für den durch Hilfssatz 1 bestimmten Punkt Y*

$$\left(\frac{\Xi_0 X}{X\mathrm{H}_0}\right)^2 = \frac{\Xi_0 Y}{Y\mathrm{H}_0}$$

(Fig. 3).

Die Beweise dieser Hilfssätze haben wir[6] in einer früheren Arbeit mitgeteilt.

Es sei der Kreis k mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r der *Fundamentalkreis* des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen Ebene. In der Pseudogeometrie dieses Modells ist der *Pseudoabstand* zweier Punkte P_1, P_2 bekanntlich

(1) $$\overline{P_1P_2} = \log (UVP_2P_1),$$

[6] PAUL SZÁSZ, Elementargeometrische Herstellung des Klein—Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **16** (1955), S. 1—8, besonders S. 4—5.

wobei U, V die Schnittpunkte von k und des durch P_1 und P_2 gelegten *Orthogonalkreises*[7] sind, so bezeichnet, daß P_2 auf dem Bogen $\widehat{UV}$ zwischen P_1 und V liegt (Fig. 4), und (UVP_2P_1) das Doppelverhältnis

$$(UVP_2P_1) = \frac{UP_2}{P_2V} : \frac{UP_1}{P_1V}$$

bedeutet. Ist $X \neq O$ irgendein Punkt des Modells und Y der entsprechende

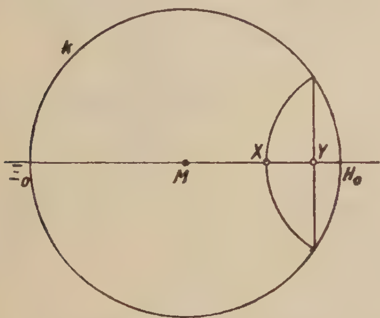


Fig. 3

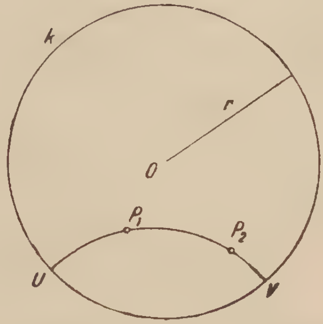


Fig. 4

Punkt im Sinne von Hilfssatz 1, so können wir den euklidischen Abstand OY durch den Pseudoabstand $t = \overline{OX}$ leicht ausdrücken. Es seien nämlich U, V die Schnittpunkte der Geraden OX mit dem Kreis k, wobei X zwischen O und V liegt (Fig. 5). So ist wegen $UO = OV$, nach der Abstandsformel (1)

$$e^t = (UVXO) = \frac{UX}{XV},$$

also durch Verwendung des Hilfssatzes 3

$$e^{2t} = \left(\frac{UX}{XV}\right)^2 = \frac{UY}{YV} = \frac{r+OY}{r-OY},$$

woher sich

$$OY = r\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = r \operatorname{th} t \tag{2}$$

ergibt.

Wir betrachten nun ein rechtwinkliges Pseudodreieck ABC ($C\sphericalangle = 90°$) mit den Bestimmungsstücken

$$\overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ \overline{AB} = c,\ A\sphericalangle = \lambda,\ B\sphericalangle = \mu. \tag{3}$$

Ist der Punkt A von O verschieden, so kann durch eine geeignete Inversion,

[7] Die k rechtwinklig schneidenden Kreise bzw. Geraden wollen wir gemeinsam *Orthogonalkreise* nennen.

bei der k sowie das Innere von k in sich selbst übergehen, A immer in O gebracht werden. Da dabei die Größe der Winkeln und auch die Doppelverhältnisse von je vier Punkten erhalten bleiben, so geht ABC bei dieser Inversion in ein Pseudodreieck $A_1B_1C_1$ mit $A_1=O$ über, dessen Bestimmungsstücken der Reihe nach dieselben sind.[8] Wir können deshalb $A=O$ annehmen (Fig. 6).

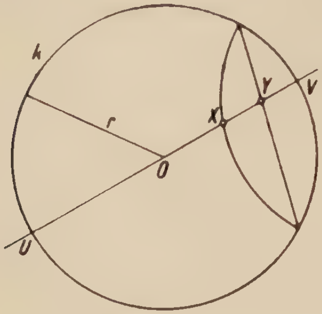


Fig. 5

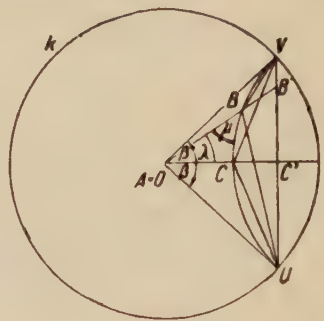


Fig. 6

Bezeichnen U, V die Schnittpunkte von k und des durch B und C gelegten Orthogonalkreises derart, daß C auf dem Bogen $\widehat{UV}$ zwischen U und B liegt, so ist mit Rücksicht auf $UC=CV$ für die Seite $\overline{BC}=a$ des Pseudodreiecks ABC im Sinne von (1)

$$e^a=(UVBC)=\frac{UB}{BV}. \tag{4}$$

Wird ferner UV von den Geraden AB, AC in B' bzw. C' geschnitten, so gilt nach Hilfssatz 2 offenbar

$$\left(\frac{UB}{BV}\right)^2=\frac{UB'}{B'V}=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\lambda}, \tag{5}$$

wobei $\beta=COV\sphericalangle=UOC\sphericalangle$ dem Pseudoabstand $\overline{OC}=b$ entsprechender *Parallelwinkel* ist. Aus (4) folgt jetzt auf Grund von (5)

$$e^{2a}=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\lambda},$$

woraus man

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{th}a\operatorname{tg}\beta \tag{6}$$

erhält. Da aber wegen $\overline{OC}=b$ durch Verwendung von (2)

$$r\cos\beta=OC'=r\operatorname{th}b \tag{7}$$

[8] Vgl. Howard Eves and V. E. Hoggatt, a. a. O. [4], S. 470—471.

ausfällt, so ist $\cos\beta = \operatorname{th} b$, also

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{sh} b}$$

Aus (6) entsteht daher durch Einsetzen die erste Grundformel

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b} \tag{I}$$

für das rechtwinklige Dreieck in der hyperbolischen Ebene.

Weiter besteht im Sinne von (2) infolge $\overline{OB} = c$ neben (7) auch noch

$$OB' = r \operatorname{th} c,$$

also ergibt sich aus

$$\cos\lambda = \frac{OC'}{OB'}$$

(Fig. 6) gleich die zweite Grundformel

$$\cos\lambda = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} \tag{II}$$

Die vier übrigen Gleichungen, die außer (I) und (II) zwischen je drei der Bestimmungsstücken (3) des rechtwinkligen Dreiecks in der hyperbolischen Ebene noch bestehen, sind Folgen von diesen. Die Formeln (I) und (II), die hier an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen wurden, haben also die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge.

(Eingegangen am 3. Oktober 1955.)

ВЫВОД ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ИЗ КРУГОВОЙ МОДЕЛИ ПУАНКАРЕ

П. Сас (Будапешт)

(Резюме)

Пусть на гиперболической плоскости задан прямоугольный треугольник ABC ($C\sphericalangle = 90°$), элементы которого суть $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $A\sphericalangle = \lambda$, $B\sphericalangle = \mu$. В настоящей работе на круговой модели Пуанкаре гиперболической плоскости доказываются основные формулы

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b} \tag{I}$$

и

$$\cos\lambda = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}, \tag{II}$$

откуда следует вся гиперболическая тригонометрия.

О ПРОСТЫХ ИДЕАЛАХ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

ЙОРДАН ДУЙЧЕВ (София)

(Представлено Л. Редеи)

В настоящей заметке дадим элементарное доказательство известной теоремы о существовании бесконечного множества простых идеалов первой степени во всяком конечном алгебраическом расширении поля рациональных чисел.

Предварительно установим следующую вспомогательную теорему: Обозначим через K алгебраическое расширение степени n поля рациональных чисел K_0 и через ξ целый примитивный элемент поля K. Далее обозначим через D дискриминант примитивного многочлена степени n над K_0, корнем которого является ξ. В таком случае всякий простой идеал P поля K, который делит ξ, но не делит D, будет первой степени.

Доказательство. Известно, что всякое целое число α поля K можно представить в виде:

$$\alpha=\frac{a_0}{D}+\frac{a_1}{D}\xi+\frac{a_2}{D}\xi^2+\cdots+\frac{a_{n-1}}{D}\xi^{n-1},$$

где через a_i $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ обозначены целые числа из K_0.

Пусть целые числа

$$\alpha_i=\frac{a_0^{(i)}}{D}+\frac{a_1^{(i)}}{D}\xi+\frac{a_2^{(i)}}{D}\xi^2+\cdots+\frac{a_{n-1}^{(i)}}{D}\xi^{n-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

составляют полную систему представителей всех классов, на которые распадаются по модулю P целые числа поля K. Принимая во внимание, что $(D, P)=1$, заключаем, что числа

$$\beta_i=D\alpha_i=a_0^{(i)}+a_1^{(i)}\xi+a_2^{(i)}\xi^2+\cdots+a_{n-1}^{(i)}\xi^{n-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

тоже составляют такую систему.

Целые рациональные числа $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, \ldots, a_0^{(m)}$ в свою очередь составляют полную систему представителей всех классов по модулю P в K, так как по предположению $\xi\equiv 0 \pmod P$. Очевидно эти числа несравнимы между собой по модулю p, где через p обозначено единственное простое целое рациональное число, которое делится на P, и таким образом $m\leqq p$. С другой стороны $m\geqq p$ и следовательно $m=p$, т. е. простой идеал P в K первой степени.

Переходим к доказательству теоремы существования бесконечного множества простых идеалов первой степени.

Обозначим через ξ целый примитивный элемент некоторого алгебраического расширения K степени n поля рациональных чисел K_0. Рассмотрим последовательность

$$(1) \qquad M\xi+q_1,\ M\xi+q_2,\ M\xi+q_3, \ldots,$$

где $M = DN(\xi)$, причем через D обозначен дискриминант примитивного многочлена степени n над K_0, корнем которого является число ξ, через $N(\xi)$ обозначена норма числа ξ в K, а $q_1, q_2, q_3, \ldots$ — последовательность всех взаимно простых с M натуральных чисел.

Очевидно все члены последовательности (1) являются целыми числами из K, неравными нулю, среди которых может находиться только конечное число единиц. В самом деле, если x целое число из K_0 и число $M\xi+x$ является единицей, то норма его $N(M\xi+x)$ в K будет удовлетворять условию

$$(2) \qquad N(M\xi+x) = \pm 1.$$

Левая же часть равенства (2) есть многочлен неизвестного x степени n, и следовательно это условие может выполняться только для конечного числа значений x.

Докажем существование бесконечного множества простых идеалов из K, каждый из которых делит по меньшей мере один член последовательности (1).

Будем доказывать от противного. Предположим, что существует конечное множество таких идеалов. По меньшей мере один такой идеал существует, так как мы установили, что последовательность (1) содержит члены, не являющимися единицами. Обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_s$ эти идеалы. Ни один из них не делит M, так как в противном случае он делил бы по крайней мере одно из чисел $q_1, q_2, q_3, \ldots$ в то время как все эти числа взаимно простые с M. Обозначая через p_i единственное простое целое рациональное число делящееся на P_i, будем иметь $(M, p_1 p_2 \ldots p_s) = 1$.

Составим число $M\xi + \lambda p_1 p_2 \ldots p_s$, являющееся членом последовательности (1), где λ натуральное, взаимно простое с M число, которое выберем так, чтобы $M\xi+\lambda p_1 p_2 \ldots p_s$ не было единицей. Это возможно, так как мы установили, что последовательность (1) может содержать лишь конечное число единиц. Но в таком случае ни один из простых идеалов $P_1, P_2, \ldots, P_s$ не делит число $M\xi+\lambda p_1 p_2 \ldots p_s$, и так как это число не является единицей, то оно делится на простой идеал из K, неравный ни одному из идеалов $P_1, P_2, \ldots, P_s$. Таким образом мы пришли к противоречию, что устанавливает существование бесконечного множества простых идеалов, каждый из которых делит какой-либо член последовательности (1).

Рассмотрим ближе члены этой последовательности. Все они являются целыми числами и примитивными элементами в K. В самом деле, учитывая, что число ξ, являясь примитивным элементом в K, отличается от своих сопряженных в K, заключаем, что числа $M\xi+q_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ тоже отличаются от своих сопряженных в K, т. е. являются примитивными элементами в K. С другой стороны, обозначая через D_i дискриминант примитивного многочлена степени n над K_0, корнем которого является число $M\xi+q_i$, будем иметь:

$$D_i = \prod_{1\leq k<l\leq n} [(M\xi^{(k)}+q_i)-(M\xi^{(l)}+q_i)]^2 = M^{n(n-1)} \prod_{1\leq k<l\leq n} (\xi^{(k)}-\xi^{(l)})^2,$$

где $\xi^{(1)}=\xi$, а через $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots, \xi^{(n)}$ обозначены сопряженные с ξ в K числа. Таким образом получим:

$$D_i = DM^{n(n-1)} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots).$$

Принимая во внимание, что $M=DN(\xi)$ и $(M, q_i)=1$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ заключаем, что ни один простой идеал из K, делящий некоторое из чисел $M\xi+q_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$, не может делить D_i.

Таким образом в поле K существует бесконечное множество простых идеалов, каждый из которых делит некоторый целый примитивный элемент поля, но не делит дискриминант примитивного многочлена степени n над K_0, корнем которого является этот элемент. Применяя вспомогательную теорему, которую мы доказали в начале, заключаем, что все эти простые идеалы первой степени. Этим доказательство закончено.

В заключение отметим, что из доказанного следует, как это известно, чисто арифметическим путем существование бесконечного множества простых чисел во всякой арифметической прогрессии вида $nx+1$.

(Поступило 20. X. 1955.)

ON PRIME IDEALS OF DEGREE 1

J. Duyčev (Sophia)

(Summary)

The author gives an elementary proof of the following well-known result of algebraic number theory:

Every algebraic extension, of finite degree, of the rational number field contains an infinite number of prime ideals of degree 1.

The proof rests on the following lemma:

Let K be an algebraic extension, of finite degree, of the rational number field. Every prime ideal P of K which divides an integral primitive element ξ of K, but does not divide the discriminant D of ξ, is necessarily of degree 1.

BEWEIS EINES ZAHLENGEOMETRISCHEN SATZES VON G. SZEKERES

Von

P. SZÜSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

G. SZEKERES [1] bewies den folgenden

SATZ. *Es seien α und β zwei verschiedene Richtungstangenten; ferner sei K eine positive Zahl, für die*

$$K < 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \tag{1}$$

gilt. Dann gibt es ein in Bezug auf den Nullpunkt zentralsymmetrisches Parallelogramm I, welches folgendes erfüllt:

1. *Die Seiten von I sind parallel zu den Geraden $y=\alpha x$ bzw. $y=\beta x$;*
2. $M(I)>K$,

wobei $M(I)$ (hier und im folgenden) den Flächeninhalt von I bezeichnet;

3. *außer dem Nullpunkt enthält I keinen weiteren Gitterpunkt im Inneren.*

Im folgenden gebe ich für diesen Satz einen kurzen, auf dem Gesetz der besten Näherung der Kettenbruchlehre beruhenden Beweis.

Ist α rational, so gibt es ein Parallelogramm I, welches 1, 2 und 3 genügt, statt 2 sogar schärfer mit

2'. $M(I)=4$.

Dies läßt sich durch eine einfache Rechnung bestätigen.

Ich nehme daher an, daß α irrational ist und führe folgende Bezeichnungen ein: $a_0, a_1, \ldots$ bzw. $\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ bzw. $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \ldots$ bedeuten die Kettenbruchnenner bzw. vollständigen Quotienten bzw. die Näherungsbrüche von α. Wir nehmen an, daß die Näherungsbrüche schon in irreduzibler Gestalt geschrieben sind. Zunächst beweise ich den folgenden

HILFSSATZ. *Das durch die Relationen*

$$\begin{cases} -B_{n+1} < x < B_{n+1}, \\ \alpha x - \dfrac{\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} < y < \alpha x + \dfrac{\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} \end{cases} \tag{2}$$

definierte Parallelogramm I_1 enthält für $n=0,1,\ldots$ außer dem Nullpunkt keinen weiteren Gitterpunkt.

Beweis. Nach einem bekannten Lagrangeschen Satz[1] gilt für ganzes x mit $0<|x|<B_{n+1}$ und ganzes y

$$|\alpha x-y| \geqq |B_n\alpha-A_n| = \frac{1}{B_n\zeta_{n+1}+B_{n-1}} = \frac{\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Es bezeichne (hier und im folgenden) I ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den Geraden $y=\alpha x$ bzw. $y=\beta x$ sind; ferner bezeichne I_1 ein durch (2) definiertes Parallelogramm. Ist $\varepsilon>0$, aber sonst beliebig klein gegeben, so kann durch Wahl einer genügend großen Zahl n offenbar erreicht werden, daß es zu I_1 ein I mit

$$I\subset I_1, \tag{3}$$

$$M(I_1)-M(I)<\varepsilon \tag{4}$$

gibt. (Siehe Fig. 1.)

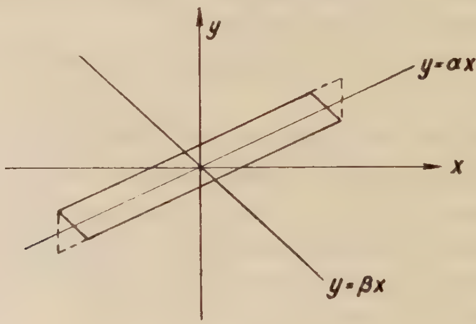


Fig. 1

Daher genügt es, unseren Satz für ein zu einem beliebig großen n gehöriges Parallelogramm I_1 zu beweisen.

Es gilt

$$M(I_1) = 4\,\frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n}. \tag{5}$$

Um den Beweis unseres Satzes zu vollenden, genügt es zu zeigen, daß für unendlich viele n

$$\frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} \geqq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \tag{6}$$

stattfindet. Ist $\zeta_{n+2}>3$, so gilt wegen der Monotonie der Funktion $\dfrac{x}{x+B_n}$

[1] Vgl. Perron [2], S. 52.

für $x > 1$ und wegen $B_{n+1} > B_n$

$$\frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} > \frac{3}{4} > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right). \tag{7}$$

Nun zeigen wir, daß aus

$$\zeta_{n+2} \geqq 2 \tag{8}$$

und

$$\frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \tag{9}$$

folgt, daß

$$\zeta_n > 3; \tag{10}$$

dann gilt wegen (7)

$$\frac{B_{n-1}\zeta_n}{B_{n-1}\zeta_n+B_{n-2}} > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Aus (8) und (9) folgt

$$\frac{2B_{n+1}}{2B_{n+1}+B_n} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

oder nach einer leichten Umformung

$$a_{n+1}B_n + B_{n-1} = B_{n+1} < \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\,B_n.$$

Da der Faktor $\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ kleiner ist als 2, gilt $a_{n+1} = 1$. Daher ist

$$B_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - 1\right)B_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-1)}\,B_n,$$

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} > \frac{2(\sqrt{5}-1)}{3-\sqrt{5}} > 3,$$

also

$$\zeta_n > a_n \geqq 3,$$

womit wir (10) bewiesen haben. Damit haben wir den Fall erledigt, wenn für unendlich viele n $\zeta_{n+2} = 2$ gilt. Wir nehmen nun an, es gilt von irgendeinem Index an $a_n = 1$. Dann gilt für genügend großes n

$$\zeta_{n+2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}};$$

da $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ derart gegen $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ konvergiert, daß $\frac{B_n}{B_{n+1}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ abwechselnd positív und negatív ist, gilt für unendlich viele n

$$\frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n-2}+B_n} > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

womit wir unseren Satz bewiesen haben. Daß in (1) die Zahl $2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ durch keine größere ersetzt werden kann, hat G. SZEKERES an einem Beispiel von CHAO KO gezeigt.

Wir möchten noch folgendes bemerken: Aus dem obigen Beweis wird es klar, daß unser Satz mit dem folgenden äquivalent ist: Es gibt ein I mit 1, 3 und

$$2''.\quad M(I) > \overline{\lim_{n\to\infty}}\, 4\, \frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} - \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon > 0$, aber sonst beliebig klein ist. Wir haben gezeigt, daß stets

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_{n+1}\zeta_{n+2}}{B_{n+1}\zeta_{n+2}+B_n} \geqq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

gilt; 2″ besagt, daß der Flächeninhalt des größten in Bezug auf den Nullpunkt zentralsymmetrischen Parallelogramms, dessen Seiten zu den Geraden $y=\alpha x$ und $y=\beta x$ parallel sind und welches außer dem Nullpunkt keinen weiteren Gitterpunkt enthält, nur von dem Anwachsen der Teilnenner der Kettenbruchentwicklungen von α und β abhängt. Sind insbesondere die Kettenbruchnenner von α oder β nicht beschränkt, so gibt es ein I mit 1, 3 und

$$2'''.\quad M(I) > 4-\varepsilon$$

mit beliebig kleinem positivem ε. Nach einem bekannten Satz von KHINTCHINE [3] sind die Kettenbruchnenner fast aller α nicht beschränkt. Daher gilt 2‴ für fast alle α.

BUDAPEST, FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(Eingegangen am 30. November 1955.)

Literaturverzeichnis

[1] G. Szekeres, On a problem of the lattice-plane, *Journ. of the London Math. Soc.*, 12 (1937), S. 88—93.
[2] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, II. Aufl. (Berlin—Leipzig, 1929).
[3] A. Khintchine, Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen, *Math. Annalen*, 92 (1924), S. 115—125.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Г. СЭКЭРЭША

П. Сюс (Будапешт)

(Резюме)

В настоящей работе автор дает новое доказательство, использующее „правило наилучшего приближения“ теории цепных дробей, следующей теоремы Г. Сэкэрэша:

Как бы не были выбраны два разных направления α и β, существует такой центральносимметричный параллелограмм, который обладает следующими свойствами:

1. Его стороны параллельны прямым $y=\alpha x$ и $y=\beta x$;
2. его пл шадь превосходит $2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\varepsilon$, где ε любое положительное число;
3. кроме начала координат он не содержит точек решетки.

A GENERALIZATION OF A LEMMA OF BELLMAN AND ITS APPLICATION TO UNIQUENESS PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

By

I. BIHARI (Budapest)

(*Presented by* P. TURÁN)

1. The original lemma in question is as follows:

Let $Y(x)$ *and* $F(x)$ *be positive continuous functions in* $a \leqq x \leqq b$ *and let be* $k > 0$, $M \geqq 0$, *then the inequality*

$$Y(x) \leqq k + M \int_a^x F(t)\, Y(t)\, dt \tag{1}$$

involves the other inequality

$$Y(x) \leqq k e^{M \int_a^x F(t)\, dt} \tag{2}$$

$$(a \leqq x \leqq b).$$

It was first made use of this lemma in discussions of stability problems of differential equations.[1] Later[2] it was applied to investigations of uniqueness and dependence of the solutions of differential equations and systems on the initial conditions and parameters, but only for the case of Lipschitz condition with the exponent 1.

One can deduce by means of this lemma the lemma of GRONWALL[3] too.

The purpose of this paper is to establish — by means of the Bellman lemma and its generalized form — a bound for the difference of the solutions of the equations $y' = f(x, y) + \varepsilon_1$ and $y' = f(x, y) + \varepsilon_2$ (ε_1 and ε_2 are constants) with the same or different initial conditions, provided that $f(x, y)$ satisfies the „Osgood condition"

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq \omega(|y_2 - y_1|)$$

in a domain G where, of course, $\omega(u)$ is subjected to certain conditions. Further we shall give simple proofs for the uniqueness theorems of NAGUMO, OSGOOD etc.

[1] R. BELLMAN, The stability of solutions of linear differential equations, *Duke Math. Journal*, 10 (1943), pp. 643—647. However, the lemma holds for arbitrary continuous $Y(x)$ and non-negative continuous $F(x)$. The value $k = 0$ is also possible.

[2] E. g. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория диффеоенциальных уравнений (Москва, 1947), p. 19.

[3] E. g. E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, p. 93.

2. The uniqueness theorem of Nagumo[4] is the following:

If the function $f(x, y)$ is continuous in a domain $G(x, y)$ and all points ξ, η of G have a neighbourhood where

$$|x-\xi|\,|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqq |y_2-y_1| \tag{3}$$

holds whenever the points (x, y_1) and (x, y_2) belong to this neighbourhood, then the equation

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

has at most one solution $\varphi(x)$ satisfying the initial condition $\varphi(\xi) = \eta$.

Proof. Assuming there exists another solution $\psi(x)$ too with the same initial condition $\psi(\xi) = \eta$, we should have

$$\varphi(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, \varphi(t))\,dt, \qquad \psi(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, \psi(t))\,dt$$

whence

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqq \int_\xi^x |f(t, \varphi(t))-f(t, \psi(t))|\,dt \qquad (x > \xi).$$

Taking (3) into account we get

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqq \int_\xi^x \left|\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-\xi}\right| dt \tag{5}$$

for sufficiently small $x-\xi > 0$. Here the integrand has a limit for $t = \xi$, since

$$\lim_{t=\xi+0} \frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-\xi} = \lim_{t=\xi+0} \frac{\varphi'(t)-\psi'(t)}{1} = f(\xi, \eta)-f(\xi, \eta) = 0,$$

i. e. the function $\dfrac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-\xi}$ may be completed to a continuous function by taking 0 for its value at $t = \xi$. Therefore one can determine to all $\varepsilon > 0$ a number $\delta > 0$ such that $\left|\dfrac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-\xi}\right| < \varepsilon$ if $|t-\xi| < \delta$ and $\xi+\delta < x$. Then we get from (5)

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqq \int_\xi^{\xi+\delta} \left|\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-\xi}\right| dt +$$

$$+ \int_{\xi+\delta}^x \left|\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-\xi}\right| dt \leqq \varepsilon\cdot\delta + \int_{\xi+\delta}^x |\varphi(t)-\psi(t)| \frac{1}{t-\xi}\,dt.$$

[4] M. Nagumo, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, *Japanese Journal of Math.*, **3** (1926), pp. 107—112.

Applying the Bellman lemma we obtain

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq \delta\cdot\varepsilon e^{\int\limits_{\xi+\delta}^{x}\frac{1}{t-\xi}dt} = \delta\cdot\varepsilon\frac{x-\xi}{\delta} = \varepsilon(x-\xi)$$

for a certain right hand neighbourhood of ξ and any positive number ε. For $x \leq \xi$ we conclude in the same way by replacing $\left|\int\limits_{\xi}^{x} u(t)\,dt\right|$ by $\int\limits_{x}^{\xi} u(t)\,dt$ $(u(t) \geq 0)$. In this neighbourhood of ξ we have $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ and — in a known way — we can conclude that this holds for their whole existence intervals.[5] Q. e. d.

Let us remark that if instead of condition (3) we supposed

$$|x-\xi|\,|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leq M|y_2-y_1| \quad \text{with} \quad M>1,$$

then by a similar calculation we should obtain

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq \varepsilon\cdot\delta\left|\frac{x-\xi}{\delta}\right|^{M} = \varepsilon\frac{|x-\xi|^{M}}{\delta^{M-1}}$$

and since this depends on δ, the further conclusion is impossible. Therefore the constant $M=1$ cannot be increased[6] in this way.

3. Generalization of the Bellman lemma.

Let $Y(x), F(x)$ be positive continuous functions in $a \leq x \leq b$ and $k \geq 0, M \geq 0$, further $\omega(u)$ a non-negative non-decreasing continuous function for $u \geq 0$. Then the inequality

$$Y(x) \leq k + M\int\limits_{a}^{x} F(t)\,\omega(Y(t))\,dt \qquad (a \leq x \leq b) \tag{6}$$

implies the inequality

$$Y(x) \leq \Omega^{-1}\Big(\Omega(k) + M\int\limits_{a}^{x} F(t)\,dt\Big) \qquad (a \leq x \leq b' \leq b) \tag{7}$$

where

$$\Omega(u) = \int\limits_{u_0}^{u}\frac{dt}{\omega(t)} \qquad (u_0>0,\ u \geq 0) \tag{8}$$

[5] This procedure may be generalized: If in (1) $k=0$, $F(t)$ is continuous in $a<x\leq b$ and $\lim\limits_{x=a+0} F(x)\,Y(x)=A$ exists and $\overline{\lim\limits_{\delta\to 0}}\,\delta e^{\int\limits_{a+\delta}^{x}F(t)\,dt} \leq K(x)$, then $Y(x) \leq A K(x)$.

[6] O. Perron, Eine hinreichende Bedingung für Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, *Math. Zeitschrift*, **28** (1928), pp. 216—219. Perron has shown that $M=1$ cannot be increased at all.

and $\Omega^{-1}(u)$ means the inverse function of $\Omega(u)$ ($\Omega^{-1}(u)$ exists certainly owing to the monotonity of $\Omega(u)$). Of course, x must be in a subinterval (a, b') of (a, b) so that the argument $\Omega(k)+M\int_a^x F(t)\,dt$ be within the domain of definition of $\Omega^{-1}(u)$. Therefore (7) holds for $a \leqq x < b' \leqq b$ with a certain b'.

PROOF. Denoting the right hand member of (6) by $V(x)=V$, we have $Y \leqq V$ or $\omega(Y) \leqq \omega(V)$, being $\omega(u)$ non-decreasing. This may be written as follows

$$\frac{M\omega(Y)F(x)}{\omega(V)} \leqq MF(x) \quad \text{or} \quad \frac{V'}{\omega(V)} \leqq MF(x).$$

By making use of the notation (8)

$$\frac{d\Omega(V)}{dx} \leqq MF(x)$$

and integrating between a and x

$$\Omega(V(x))-\Omega(V(a)) \leqq M\int_a^x F(t)\,dt,$$

or, since $V(a)=k$,

$$\Omega(V(x)) \leqq \Omega(k)+M\int_a^x F(t)\,dt$$

whence, being $\Omega^{-1}(u)$ increasing also,

$$V(x) \leqq \Omega^{-1}\Big(\Omega(k)+M\int_a^x F(t)\,dt\Big);$$

finally, from (6), we obtain

$$Y(x) \leqq \Omega^{-1}\Big(\Omega(k)+M\int_a^x F(t)\,dt\Big) \qquad (a \leqq x \leqq b' \leqq b).$$

The boundary furnished by (7) is independent of u_0 because, taking $\bar{u}_0$ in (8) instead of u_0, we get

$$\bar{\Omega}(u)=\int_{\bar{u}_0}^{u}\frac{dt}{\omega(t)}=\Omega(u)-\delta \text{ where } \delta=\int_{u_0}^{\bar{u}_0}\frac{dt}{\omega(t)} \text{ and } \bar{\Omega}^{-1}(u)=\Omega^{-1}(u+\delta).$$

Thus

$$\bar{\Omega}^{-1}(\bar{\Omega}(k)+A)=\bar{\Omega}^{-1}(\Omega(k)-\delta+A)=\Omega^{-1}(\Omega(k)+A).$$

It is easy to see that the theorem holds also if we suppose only that $Y(x)$ is continuous and $F(x)$ is non-negative and continuous. For the function $\bar{Y}=\frac{Y+|Y|}{2} \geqq Y$ (6) and consequently (7) are valid too, therefore (7) holds

for Y. Putting $\bar{F}(x) = F(x) + \varepsilon$, the theorem is true for $\bar{F}(x)$ and by the passage of limit $\varepsilon \to +0$ we can see its validity for $F(x)$ too.

4. The uniqueness theorem of Osgood[7] is the following:

If in a domain $G(x, y)$ the function $f(x, y)$ satisfies the condition

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq \omega(|y_2 - y_1|) \tag{9}$$

where $\omega(u)$ is continuous for $u \geqq 0$, $\omega(u) > 0$ for $u > 0$ and $\omega(0) = 0$, further if $\int_0^u \frac{dt}{\omega(t)}$ is divergent for $u > 0$, then the equation $y' = f(x, y)$ has at most one solution $\varphi(x)$ in G with $\varphi(\xi) = \eta$ where (ξ, η) is a point of G.

In the proof we shall *restrict* ourselves to the case where $\omega(u)$ is non-decreasing.

PROOF.[8] Suppose there exist two different solutions $\varphi(x), \psi(x)$ with $\varphi(\xi) = \psi(\xi) = \eta$. That is to say, there exist points $\bar{\xi}$ (e. g. $\bar{\xi} \geqq \xi$) where $\varphi(\bar{\xi}) \neq \psi(\bar{\xi})$. Let the lower bound of these $\bar{\xi}$ be ξ_0. We have then $\xi_0 \geqq \xi$ and $\varphi(\xi_0) = \psi(\xi_0)$, but $\varphi(x) \neq \psi(x)$ for $\xi_0 < x \leqq \xi_0 + \gamma$ with a certain number $\gamma > 0$.

By virtue of our hypotheses

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) \leqq \omega(|\varphi(x) - \psi(x)|)$$

whence

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq \int_{\xi_0}^{x} \omega(|\varphi(t) - \psi(t)|)\, dt \quad \text{or} \quad \Delta \leqq \int_{\xi_0}^{x} \omega(\Delta)\, dt = V(x) = V > 0.$$

Hence

$$\frac{\omega(\Delta)}{\omega(V)} \leqq 1 \quad \text{or} \quad \frac{V'}{\omega(V)} \leqq 1.$$

Introducing the notation

$$\int_{u_0}^{u} \frac{dt}{\omega(t)} = \Omega(u) \qquad (u_0 > 0,\ u \geqq 0)$$

we have

$$\frac{d\Omega(V)}{dx} \leqq 1$$

whence by integration

$$\Omega(V(x)) \leqq \Omega(V(\xi_0 + \delta)) + x - (\xi_0 + \delta) \qquad \delta > 0 \text{ and } \xi_0 + \delta < x. \tag{10}$$

7 W. F. OSGOOD, Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ohne Hinzuname der Cauchy—Lipschitz Bedingung, *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, 9 (1898), pp. 331—345.

8 We make use of the procedure applied to prove the generalized Bellman lemma.

If $\delta \to +0$, then

$$V(\xi_0+\delta)\to 0, \quad \Omega(V(\xi_0+\delta))\to \int\limits_{u_0}^{0} \frac{dt}{\omega(t)} = -\infty \qquad (u_0>0),$$

but $\Omega(V(x))$ is a finite number for $x>\xi_0$, i. e. (10) leads to a contradiction. We obtain the same contradiction for $x<\xi$. Therefore $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ in some neighbourhood of ξ, consequently, also in their whole existence intervals too. Q. e. d.

If $\int\limits_0^u \frac{dt}{\omega(t)}$ is convergent for $u>0$, then we get from (10) for $\delta\to+0$

$$\Omega(V)\leq\Omega(0)+x-\xi_0.$$

Assuming e. g. $u_0=0$, it is

$$\Omega(0)=0, \quad \Omega(V(x))\leq x-\xi_0$$

whence

$$\Delta=|\varphi(x)-\psi(x)|\leq V\leq\Omega^{-1}(x-\xi_0) \qquad (x\geqq\xi_0).$$

Therefore, if uniqueness does not hold, the difference of two solutions is subdue to this estimation.

5. *If $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are the solutions of the equations*

$$y'=f(x,y)+\varepsilon_1 \quad \textit{and} \quad y'=f(x,y)+\varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_1\geqq 0, \varepsilon_2\geqq 0)$$

satisfying the initial conditions $\varphi(\xi_1)=\eta_1$, $\psi(\xi_2)=\eta_2$ and existing in $a\leqq x\leqq b$, further if

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqq\omega(|y_2-y_1|) \quad \textit{and} \quad |f(x,y)|\leqq A \quad \textit{in} \quad G,$$

then

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqq\Omega^{-1}(\Omega(k)+|x-\xi_2|)$$
$$(k=|\xi_1-\xi_2|A+|\eta_1-\eta_2|+(b-a)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)).$$

PROOF.[9] We have

$$\varphi(x)=\eta_1+\int\limits_{\xi_1}^{x} f(t,\varphi(t))dt+\varepsilon_1(x-\xi_1), \quad \psi(x)=\eta_2+\int\limits_{\xi_2}^{x} f(t,\psi(t))dt+\varepsilon_2(x-\xi_2),$$

whence

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqq|\eta_1-\eta_2|+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(b-a)+$$
$$+\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}|f(t,\varphi(t))|dt+\int\limits_{\xi_2}^{x}|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))|dt\right| \qquad (x\geqq\xi_2).$$

[9] Here $\omega(u)$ is subjected to the same conditions as in 3 and $\Omega(u)$ is also the same function as in 3.

further

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqq |\eta_1-\eta_2|+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(b-a)+|\xi_1-\xi_2|A+\int_{\xi_2}^{x}\omega(|\varphi(t)-\psi(t)|)dt$$
$$(x \geqq \xi_2)$$

or

$$\Delta \leqq k+\int_{\xi_2}^{x}\omega(\Delta)dt.$$

Hence, applying the generalized Bellman lemma with $F(t)\equiv 1$, $M=1$, we conclude

$$\Delta = \Omega^{-1}(\Omega(k)+x-\xi_2) \qquad (x \geqq \xi_2).^{10}$$

This formula holds also if $\int_0^u \frac{dt}{\omega(t)}$ is divergent $(u>0)$. In this case, if $(\xi_2, \eta_2) \to (\xi_1, \eta_1)$ and $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, then $k \to 0$, $\Omega(k) \to -\infty$ and

$$\Omega^{-1}(\Omega(k)+x-\xi_2) \to \Omega^{-1}(-\infty)=0,$$

i. e. $\Delta \to 0$. Therefore, if the the function $f(x, y)$ satisfies the „Osgood condition" in all points of G, the solution of the equation $y'=f(x, y)$ is a continuous function of the initial values ξ, η and of the parameter ε.

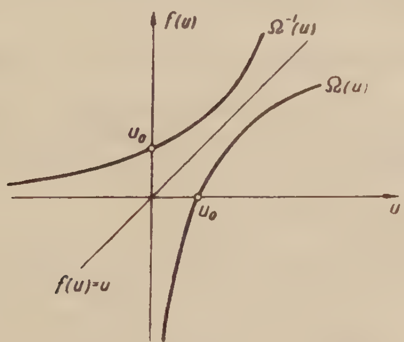


Fig. 1

From this fact one can deduce — as known — the following general dependence theorem too:

Let $f(x, y)$ satisfy (9) *in $G(x, y)$ and let $\varphi(x, 0, \xi_0, \eta_0)$ be the (unique) solution of $y'=f(x, y)$ with $\varphi(\xi_0, 0, \xi_0, \eta_0)=\eta_0$, existing in $a \leqq x \leqq b$, and $\varphi(x, \varepsilon, \xi, \eta)$ the unique solution of $y'=f(x, y)+\varepsilon$ with $\varphi(\xi, \varepsilon, \xi, \eta)=\eta$ and $a<\alpha<\beta<b$, then $\varphi(x, \varepsilon, \xi, \eta)$ exists in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ for sufficiently small*

[10] A similar formula holds for $x \leqq \xi_2$.

$\varepsilon > 0$ and $|\xi-\xi_0|+|\eta-\eta_0|$, further $\varphi(x, \varepsilon, \xi, \eta)$ tends to $\varphi(x, 0, \xi_0, \eta_0)$ uniformly in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ if $\xi, \eta \to \xi_0, \eta_0$ and $\varepsilon \to 0$.

The same theorem may be proved[11] if the right hand member of the differential equation depends on an arbitrary parameter μ, i. e. we have the equation $y' = f(x, y, \mu)$ and we have $f(x, y, \mu) \to f(x, y, \mu_0)$ uniformly in G if $\mu \to \mu_0$. If, especially, we take $\omega(u) = M \cdot u^\alpha$ where $M > 0$, $0 < \alpha < 1$, then $\int_0^u \frac{d(t)}{\omega(t)}$ $(u > 0)$ is convergent, therefore we cannot conclude that the Lipschitz condition with the exponent α

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqq M|y_2-y_1|^\alpha \qquad (M > 0,\ 0 < \alpha < 1)$$

implies uniqueness (moreover, one can find easily examples where this condition is satisfied and there are more solutions).

By the above results we obtain as application the following bound estimation:

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqq (k^{1-\alpha}+M(1-\alpha)|x-\xi_2|)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

where

$$k = |\xi_2-\xi_1|A+|\eta_1-\eta_2|+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(b-a).$$

Assuming identical initial conditions and $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, we have

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqq (M(1-\alpha)|x-\xi|)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1,\ a \leqq x \leqq b).$$

E. g. the so-called maximal and minimal integrals[12] have a difference subdue to this bound estimation. It is easy to see also that the limit of the right hand member is 0 for $\alpha \to 1-0$.

6. Consider now the condition

$$|x-\xi|^\alpha\, |f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqq \omega(|y_2-y_1|) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{11}$$

in place of

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqq \omega(|y_2-y_1|).$$

We assume that this condition is valid for a certain neighbourhood of all points ξ, η of G. The function $\omega(u)$ is the same as in the theorem of Osgood but we assume further that $\omega'(0)$ exists. In this case (one equation and identical initial conditions)

$$\lim_{t\to\xi+0} \frac{\omega(\Delta)}{(t-\xi)^\alpha} = \lim_{t\to\xi+0} \frac{D_+\omega(|\varphi(t)-\psi(t)|)}{\alpha(t-\xi)^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\,\omega'(0)[\pm|\varphi'(\xi)-\psi'(\xi)|]\cdot 0 = 0$$

[11] Kamke, loc. cit., p. 87.
[12] Kamke, loc. cit., p. 78.

(D_+ means the right hand derivative), that is, the function $\dfrac{\omega(\Delta)}{(t-\xi)^\alpha}$ may be completed to a continuous function for $t=\xi$ too.

By a similar way as above we get (two equations and arbitrary initial conditions)

$$\Delta \leqq k+\int_{\xi_2}^{x} \omega(\Delta)\frac{1}{(t-\xi_2)^\alpha}\,dt \quad \text{for sufficiently small} \quad x-\xi_2 \geqq 0$$

$$(k=|\xi_1-\xi_2|A+|\eta_1-\eta_2|+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(b-a)).$$

The hypotheses of the generalized Bellman lemma are not satisfied here $\left(\text{e. g. } \dfrac{1}{(t-\xi_2)^\alpha} \text{ is not continuous in } \xi_2 \leqq t \leqq x\right)$. However, one can easily obtain — by a little modification of the procedure (as in the case of the NAGUMO theorem) — the following inequality:

$$\Delta \leqq \Omega^{-1}\left(\Omega(k)+\frac{(x-\xi_2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right),$$

i. e. also condition (11) assures the uniqueness of the solution under identical initial conditions and $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$. If these are not identical or $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, or else $\int_0^u \dfrac{dt}{\omega(t)}$ is convergent for $u>0$, then we obtain a bound for Δ in the neighbourhood of ξ_2 in which (11) is valid.

The uniqueness theorem discussed here is not a special case of PERRON's theorem.[13]

7. Uniqueness theorem of Perron.

Let the function $f(x,y)$ — defined in the domain $|x-\xi|<a, |y-\eta|<b$ (domain $G(x,y)$) — satisfy the condition

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \leqq \omega(|x-\xi|, |y_2-y_1|) \tag{12}$$

for points (x,y_1) and (x,y_2) of G, and let $\omega(x,u)$ be a continuous function for $0 \leqq x < a$, $u \geqq 0$. If $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are integrals of the equation

$$y'=f(x,y) \tag{13}$$

with $\varphi(\xi)=\psi(\xi)=\eta$ and belonging to $G(x,y)$, then

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqq Z(x),$$

[13] O. PERRON, Über Ein- und Mehrdeutigkeit des Integrals eines systems von Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **95** (1926), pp. 98—101.

where $Z(x)$ means the maximal integral of the equation

$$u' = \omega(x-\xi, u) \tag{14}$$

with $Z(\xi)=0$. — Therefore, if $\omega(x,0)=0$ and $u\equiv 0$ is the unique solution of (14) *with $u(\xi)=0$, then $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ in $G(x,y)$.*

E. Bompiani[14] has found this theorem before Perron but has made use of the restriction that $\omega(x,u)$ is non-decreasing function of u. We shall make use of the same restriction but the proof will be very simple.

Proof. Being

$$\varphi'(x)-\psi'(x)=f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\leqq \omega(|x-\xi|,|\varphi(x)-\psi(x)|) \qquad (x\geqq\xi)$$

we have

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqq\int_\xi^x \omega(t-\xi,|\varphi(t)-\psi(t)|)dt \qquad (x\geqq\xi)$$

or

$$\Delta\leqq\int_\xi^x\omega(t-\xi,\Delta)dt \quad \text{where} \quad \Delta=\Delta(x)=|\varphi(x)-\psi(x)|. \tag{15}$$

Denoting the right member of (15) by $V(x)=V$, we have $\Delta\leqq V$. But

$$V'(x)=\omega(x-\xi,\Delta(x))$$

and, on account of the monotonity of $\omega(x,u)$ in u,

$$V'(x)\leqq\omega(x-\xi,V(x)) \qquad (x\geqq\xi),$$

i. e. $V(x)$ is a lower function of the equation

$$u'=\omega(x-\xi,u)+\varepsilon \qquad (\varepsilon>0) \tag{16}$$

for $x\geqq\xi$ and $V(\xi)=0$, and therefore[15]

$$V(x)\leqq z_\varepsilon(x) \qquad (x\geqq\xi)$$

where $z_\varepsilon(x)$ means the *minimal* integral of (16) for $x\geqq\xi$ with $z_\varepsilon(\xi)=0$ and — as known[16] — $z_\varepsilon(x)$ tends uniformly to $Z(x)$ if $\varepsilon\to+0$.

Consequently

$$0\leqq\Delta(x)\leqq V(x)\leqq Z(x).$$

Similar proof holds for $x\leqq\xi$.

[14] E. Bompiani, Un teorema di confronto ed un teorema di unicità per l'equazione differenziale $y'=f(x,y)$. *Rendiconti dell'Accad. dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche*, (6), **1** (1925), pp. 298—302.

[15] O. Perron, Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y'=f(x,y)$, *Math. Ann.*, **76** (1915), pp. 471—484, especially pp. 473 and 479.

[16] Kamke, loc. cit., p. 83.

It is easy to see that the theorem of OSGOOD is a special case of this theorem. — Taking once again the case of paragraph 5 we have

$$\Delta \leqq k + \int_{\xi_2}^{x} \omega(t-\xi_2, \Delta)\,dt \quad \text{for} \quad x \geqq \xi_2,$$

provided that (12) holds with $\xi = \xi_2$ and $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are in G. Then

$$0 \leqq \Delta(x) \leqq \bar{Z}(x) \quad \text{in} \quad G$$

where $\bar{Z}(x)$ means the maximal integral of (14) with $\bar{Z}(\xi_2) = k$.

These results may be extended to systems of differential equations too.

(Received 1 December 1955)

8. Finally consider a theorem due to TAMARKIN[17] and corrected by LAVRENTIEV:[18]

Let $f(x, y)$ be continuous for $|x| < a, |y| < b$ (domain D) with $a > 0, b > 0$ satisfying the condition

$$|f(x, y) - f(x, \varphi(x))| \geqq \omega(|y - \varphi(x)|) \tag{17}$$

where $\varphi(x)$ is an integral curve (passing through the origin and defined for $|x| < a$) of the differential equation

$$y' = f(x, y) \tag{18}$$

and $\omega(u)$ is an increasing continuous function for $u \geqq 0$, further $\omega(0) = 0$ and the integral $\int_0^u \frac{dt}{\omega(t)}$ is convergent for $u > 0$.

Then the equation (18) *has at least two (and thus an infinite number of) integral curves passing through the origin. Moreover — as* LAVRENTIEV[18] *notes — the same is valid concerning all the points of the curve $\varphi(x)$ (in D).*

We give a simple proof of the above theorem, further we give a lower bound estimation for the difference of the maximal integral $G(x)$ and the minimal integral $g(x)$ of (18) with the initial conditions $G(0) = g(0) = 0$.

On account of (17) the function $h(x, y) = f(x, y) - f(x, \varphi(x))$ can not vanish in the connected domain $|x| < a, y > \varphi(x)$ and therefore has a constant sign. We distinguish case a) ($h(x, y) > 0$) and case b) ($h(x, y) < 0$).

Let a fixed integral of the equation

$$y' = f(x, y) + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \tag{19}$$

[17] J. TAMARKINE, Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires, *Math. Zeitschrift*, **16** (1923), pp. 207—212.

[18] M. LAVRENTIEV, Sur une équation différentielle du premier ordre, *Math. Zeitschrift*, **23** (1925), pp. 197—198.

passing through the origin be denoted by $\psi_\varepsilon(x)$. As known,[19] one can determine to all $a_1 < a$ a number ε such that $\psi_\varepsilon(x)$ exists for $|x| < a_1$ and satisfies $|\psi_\varepsilon(x)| < b$, and we have[19]

$$\psi_\varepsilon(x) > G(x) \geqq \varphi(x) \qquad (0 < x < a_1),$$
$$\psi_\varepsilon(x) < g(x) \leqq \varphi(x) \qquad (-a_1 < x < 0).$$

We obtain immediately

$$\psi_\varepsilon(x) - \varphi(x) = \int_0^x [f(t, \psi_\varepsilon(t)) - f(t, \varphi(t))]\, dt + \varepsilon x. \tag{20}$$

Take now the case a) and $0 < x < a_1$. Then

$$\psi_\varepsilon(x) - \varphi(x) > \int_0^x [f(t, \psi_\varepsilon(t)) - f(t, \varphi(t))]\, dt \geqq \int_0^x \omega(\psi_\varepsilon(t) - \varphi(t))\, dt \quad (0 < x < a_1)$$

whence applying lemma of paragraph 3

$$\psi_\varepsilon(x) - \varphi(x) > \overset{-1}{\Omega}(x) \quad (0 < x < a_1) \quad \text{where} \quad \Omega(u) = \int_0^u \frac{dt}{\omega(t)},$$

consequently (since $\psi_\varepsilon(x) \Longrightarrow G(x)$ for $\varepsilon \to +0$ and $0 \leqq x < a_1$[20])

$$G(x) - \varphi(x) \geqq \overset{-1}{\Omega}(x) \qquad (0 \leqq x < a_1)$$

for all $0 < a_1 < a$ and thus for $0 \leqq x < a$. We have a fortiori

$$G(x) - g(x) \geqq \overset{-1}{\Omega}(x) \qquad (0 \leqq x < a).$$

Considering the case b) and again $0 < x < a_1$, equation (20) gives

$$0 < \psi_\varepsilon(x) - \varphi(x) < \varepsilon x < \varepsilon a_1 < \varepsilon a \qquad (0 < x < a_1)$$

whence

$$G(x) - \varphi(x) \equiv 0 \qquad (0 \leqq x < a).$$

Regard now both cases a) and b) for $-a < x < 0$. By the linear transformation $x = -\xi$ equation (18) will have the form

$$\frac{dy}{d\xi} = -f(-\xi, y(\xi)) = F(\xi, y), \tag{18'}$$

and here the function $F(\xi, y)$ satisfies the condition (17) and $H(\xi, y) = F(\xi, y) - F(\xi, \varphi(-\xi))$ has an opposite sign as $h(x, y) = f(x, y) - f(x, \varphi(x))$. Therefore we have in case a)

$$G(x) \equiv \varphi(x) \qquad (-a < x \leqq 0)$$

and in case b)

$$G(x) - \varphi(x) \geqq \overset{-1}{\Omega}(-x) \qquad (-a < x \leqq 0).$$

[19] KAMKE, loc. cit., p. 82, Satz 1.
[20] KAMKE, loc. cit., p. 83.

Instead of the domain $|x| < a, y > \varphi(x)$ (domain D_1) we could have considered the domain $|x| < a$, $y < \varphi(x)$ (domain D_2) without any change in the above reasoning.

We have four cases corresponding to the signs of $h(x, y)$ in D_1 and D_2, resp.:

1. $G-\varphi \geqq \Omega^{-1}(x)\ (0 \leqq x < a)$, $\varphi - g \geqq \Omega^{-1}(-x)\ (-a < x \leqq 0)\ (+ +)$,
2. $G-\varphi \geqq \Omega^{-1}(x)$ „ , $\varphi - g \equiv 0$ „ $(+ -)$,
3. $G-\varphi \equiv 0$ „ , $\varphi - g \geqq \Omega^{-1}(-x)$ „ $(- +)$,
4. $G-\varphi \equiv 0$ „ , $\varphi - g \equiv 0$ „ $(- -)$.

E. g. in the fourth case and for $\varphi(x) \equiv \begin{cases} g(x)\ (0 \leqq x < a), \\ G(x)\ (-a < x \leqq 0) \end{cases}$ uniqueness $G(x) \equiv g(x)$ follows.

(Added in proof 24 May 1956)

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ЛЕММЫ БЕЛЛМАНА И ПРИМЕНЕНИЕ К ВОПРОСАМ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Бихари (Будапешт)

(Резюме)

В работе обобщается следующая лемма:

Пусть $Y(x)$ и $F(x)$ положительные непрерывные функции на отрезке $x_0 < x < X_0$, $k \geqq 0$, $M \geqq 0$, $x_0 < a \leqq x < X_0$. Тогда из неравенства

$$Y(x) \leqq k + M \int_a^x F(t) Y(t)\, dt$$

следует неравенство

$$Y(x) \leqq k e^{M \int_a^x F(t) dt}$$

Если $k = 0$, то, конечно, $Y(a) = 0$.

Эта лемма играет большую роль при исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений и зависимости их от начальных условий и параметров, если выполняется условие Липшица с показателем $\alpha = 1$.

Эта лемма может быть обобщена следующим образом:

Пусть $Y(x)$, $F(x)$, k, M, x_0, X_0, a таковы же, как и выше, функция $\omega(u)$ возрастающая, неотрицательна и непрерывна при $u \geqq 0$. Тогда из неравенства

$$Y(x) \leqq k + M \int_a^x F(t)\, \omega[Y(t)]\, dt \qquad (x_0 < a \leqq x < X_0)$$

следует неравенство

$$Y(x) \leqq \Omega^{-1}\left[\Omega(k) + M\int_a^x F(t)\,dt\right] \qquad (x_0 < a \leq x < X_0' \leqq X_0).$$

Здесь $\Omega(u) = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{dt}{\omega(t)}$ $(u_0, u > 0)$ и $\Omega^{-1}(u)$ есть функция, обратная функции $\Omega(u)$. Если $k = 0$, то $Y(a) = 0$.

В работе доказываются, с некоторыми ограничениями, теоремы о единственном Осгуда и Перрона, и дается оценка отклонения решений $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих одинаковым или различным граничным условиям, уравнений $y' = f(x, y) + \varepsilon_1$ и $y' = f(x, z) + \varepsilon_2$, если выполняется условие Липшица с показаталем $0 < \alpha < 1$ или условие Осгуда

(1) $$(f(x, y_2) - f(x, y_1)) \leqq \omega(|y_2 - y_1|).$$

Если, например, выполнено условие

(2) $$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq M|y_2 - y_1|^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1,\ M > 0),$$

начальные условия совпадают и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, то

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq (M(1-\alpha)|x - \xi|)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

где (a, b) промежуток, где существуют $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, и $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$. Если $\alpha \to 1 - 0$, то легко показать, что эта граница стремится к нулю.

Если условие (2) заменить условием (1), то получается следующее неравенство:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqq \Omega^{-1}(|x - \xi|) \qquad (u_0 = 0).$$

Работа содержит еще доказательство теоремы о единственности Нагумо, использующее исходную лемму и, наконец, дает простое доказательство одной из теорем Тамаркина,[17] относящейся к многозначности решения дифференциальных уравнений первого порядка.

ÜBER DIE DÜNNSTE HOROZYKLENÜBERDECKUNG

Von
L. FEJES TÓTH (Budapest)
(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Wird die hyperbolische Ebene durch kongruente Kreise völlig bedeckt, so ist die (in geeigneter Weise definierte) Überdeckungsdichte stets $>\sqrt{12}/\pi = 1,1026\ldots$[1] Es ist zu erwarten, daß diese Ungleichung mit Zulassung des Gleichheitszeichens auch für Grenzkreise gültig bleibt. Im vorliegenden Aufsatz bestätigen wir diese Vermutung durch den Beweis des folgenden Satzes:

In der hyperbolischen Ebene sei eine Menge von Horozyklen so angegeben, daß jeder Punkt der Ebene in wenigstens einem Horozyklus, aber in höchstens endlich vielen enthalten ist. Dann läßt sich die Ebene so in asymptotische Dreiecke zerlegen, daß die Dichte der Horozyklen in jedem Dreieck $\geqq \sqrt{12}/\pi$ *ausfällt.*

Die Voraussetzung, daß jeder Punkt nur durch eine endliche Anzahl von Horozyklen überdeckt ist, bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da im entgegengesetzten Falle der Überdeckung eine unendliche Dichte zuzuschreiben wäre.

Unter einem Horozyklus verstehen wir im folgenden stets einen Horozyklus einer bestimmten Horozyklenmenge, die den Voraussetzungen des obigen Satzes Genüge leistet. Wir nennen einen Kreis *schwarz*, wenn er wenigstens drei Horozyklen von innen berührt, ohne ganz im Inneren eines Horozyklus enthalten zu sein. Wir fassen dabei einen Randpunkt eines Horozyklus ebenfalls als einen, den Horozyklus von innen berührenden Kreis auf. Wir zeigen zunächst die Existenz eines schwarzen Kreises.

Wir betrachten zu jedem Horozyklus den inneren Parallelbereich vom Abstand r. Da ein beliebiger Punkt P nur in einer endlichen Anzahl von Horozyklen enthalten ist, liegt P für einen genügend großen Wert von r außerhalb sämtlicher Parallelbereiche. Es gibt daher einen Wert $r_0 \geqq 0$ so, daß die Parallelbereiche vom Abstand r_0 die Ebene noch bedecken, aber für die Parallelbereiche von einem größeren Abstand das nicht mehr zustimmt.

[1] L. FEJES TÓTH, Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), S. 111—114.

Dann gibt es einen Punkt Q, der außerhalb aller Parallelbereichen vom Abstand $> r_0$ liegt. Da Q nicht im Inneren eines Parallelbereiches vom Abstand r_0 liegen kann, ist er ein gemeinsamer Randpunkt von wenigstens drei Parallelbereichen vom Abstand r_0, da sonst die Umgebung von Q nicht durch die Parallelbereiche vom Abstand r_0 überdeckt wäre. Der um Q geschlagene Kreis vom Halbmesser r_0 ist offenbar schwarz.

Die „Mittelpunkte“ der Horozyklen, die von einem schwarzen Kreis von innen berührt werden, sind Ecken eines asymptotischen Vielecks, das wir *schwarz* nennen wollen. Wir zeigen, daß die schwarzen Vielecke die Ebene schlicht und lückenlos bedecken.

Es sei zunächst gezeigt, daß zwei schwarze Vielecke nicht übereinandergreifen können. Zwei verschiedene schwarze Kreise können gleichzeitig höchstens zwei Horozyklen von innen berühren. Folglich haben zwei schwarze Vielecke höchstens zwei gemeinsame Ecken. Hätten sie daher einen gemeinschaftlichen inneren Punkt, so gebe es zwei Seiten, die einander schneiden würden. Wir bezeichnen diese beiden Seiten mit AB und CD und die entsprechenden Horozyklen mit H_A, H_B, H_C und H_D. Der zu H_A und H_B gehörende schwarze Kreis vom Mittelpunkt M_{AB} kann weder in H_C noch in H_D enthalten sein. Ebenso kann der zu H_C und H_D gehörige schwarze Kreis vom Mittelpunkt M_{CD} nicht ganz in H_A oder H_B liegen. Wir betrachten die Gerade g, deren Punkte gleichen Abstand von H_A und H_C besitzen. Da, wegen der eben erwähnten Eigenschaft der schwarzen Kreise A und M_{AB} auf der einen, C und M_{CD} auf der anderen Seite von g liegen, haben die Halbgeraden $M_{AB}A$ und $M_{CD}C$ keinen gemeinsamen Punkt. Dasselbe gilt für $M_{AB}A$ und $M_{CD}D$, für $M_{AB}B$ und $M_{CD}C$, sowie für $M_{AB}B$ und $M_{CD}D$. Das ist aber unmöglich, weil die gebrochenen Linien $AM_{AB}B$ und $CM_{CD}D$ mit Rücksicht auf die zyklische Reihenfolge $ACBD$ einander durchsetzen müssen.

Wir zeigen jetzt, daß die schwarzen Vielecke die Ebene völlig bedekken. Wir fassen einen schwarzen Kreis K mit den zugehörigen Horozyklen ins Auge. Sind H_A und H_B zwei zyklisch nacheinander folgende Horozyklen, so ist ein Eckpunkt E des Horozyklenzweiecks H_AH_B durch einen K nicht enthaltenden Horozyklus überdeckt. Wir verbinden K mit E durch die Schar der H_A und H_B von innen berührenden Kreise. In dieser Schar gibt es einen von K verschiedenen ersten Kreis, der außer H_A und H_B einen weiteren Horozyklus von innen berührt. Dieser Kreis kann nicht im Inneren eines Horozyklus liegen. Folglich ist er schwarz. Dies bedeutet, daß sich zu jeder Seite eines schwarzen Vielecks ein anderes schwarzes Vieleck anschließt.

Wir gehen von einem beliebigen schwarzen Vieleck aus und fügen die anschließenden Vielecke hinzu. Dann betrachten wir die zu den freien Seiten

anschließenden schwarzen Vielecke und setzen dieses Verfahren unbegrenzt fort. Bleibe bei diesem Prozess ein Punkt P der Ebene unbedeckt, so würde diejenige, im n-ten Schritt auftretende Polygonseite $A_n B_n$, die P von den schon hingefügten schwarzen Vielecken trennt, mit $n \to \infty$ gegen eine Grenzlage AB hinrücken. Da aber die Horozyklen vom Mittelpunkt A_n und B_n einen gemeinsamen Punkt haben, würde von der obigen Voraussetzung folgen, daß jeder Punkt der Gerade AB, mit eventueller Ausnahme eines einzigen Punktes, durch unendlich viele Horozyklen überdeckt wäre. Aus diesem Widerspruch folgt unsere Behauptung.

Zerlegen wir die mehr als dreieckigen schwarzen Vielecke durch Diagonalen in Dreiecke, so entsteht das gewünschte Dreiecksnetz. Wir haben noch zu zeigen, daß die Dichte der Horozyklen in jedem Dreieck $\geqq \sqrt{12}/\pi$ ist.

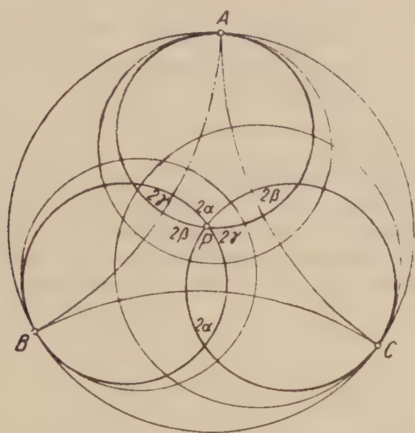


Fig. 1

Es sei ABC ein Dreieck und H_A, H_B, H_C die entsprechenden Horozyklen. Wir zeigen, daß schon die Dichte dieser drei Horozyklen in ABC der Ungleichung $\geqq \sqrt{12}/\pi$ Genüge leistet. Zufolge der Konstruktion des Dreiecks ABC ist der Durchschnitt von H_A, H_B und H_C nicht leer. Wir können aber annehmen, daß H_A, H_B und H_C nur einen einzigen gemeinsamen Punkt haben. Ist nämlich P ein in ABC liegender gemeinsamer Punkt von H_A, H_B und H_C, der ein innerer Punkt von wenigstens einem der drei Horozyklen ist, so haben die durch P hindurchgehenden Horozyklen vom Mittelpunkt A, B und C eine kleinere Dichte in ABC als die ursprünglichen Horozyklen.

Ist die Krümmung der Ebene -1, so ist der Inhalt von ABC gleich π und die abzuschätzende Dichte beträgt $(\pi + t)/\pi$, wo $2t$ die Inhaltssumme der Horozyklenzweiecke $H_A H_B$, $H_B H_C$, $H_C H_A$ bedeutet. Bezeichnen wir die

Winkel dieser Zweiecke mit 2γ, 2α und 2β, so haben wir

$$\frac{1}{2}t = \operatorname{tg}\alpha - \alpha + \operatorname{tg}\beta - \beta + \operatorname{tg}\gamma - \gamma$$

und wegen $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$

$$t \geqq 6\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \pi = 2\sqrt{3} - \pi.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

(Eingegangen am 17. Dezember 1955.)

О НАИМЕНЕЕ ПЛОТНОМ ПОКРЫТИИ ГОРОЦИКЛОВ

Л. Фееш Тот (Будапешт)

(Резюме)

В настоящей работе автор доказывает следующую теорему:

Пусть на гиперболической плоскости дано такое множество гороциклов, что каждая точка плоскости содержится во внутренности хотя бы одного гороцикла, но не более чем конечного числа гороциклов. Тогда плоскость может быть так разбита на асимптотические треугольники, что в каждом из треугольников плотность гороциклов $\sqrt{12}/\pi$.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ ПРОЦЕССОВ РАЗМНОЖЕНИЯ И ГИБЕЛИ

К. УРБАНИК (Вроцлав)

(Представлено А. Реньи)

1. Случайный процесс размножения и гибели (ветвящийся процесс с частицами одного типа; см. [1], [2]) является однородным марковским процессом со счетным числом возможных состояний, соответствующих числу частиц в рассматриваемой совокупности. Пусть $\mathbf{P}_k^n(t)$ обозначает условную вероятность того, что совокупность, насчитывавшая k частиц, по истечении промежутка времени t будет состоять из n частиц. Процесс размножения и гибели определяется обычно заданием интенсивностей

$$a_n = \frac{d}{dt}\mathbf{P}_1^n(t)\Big|_{t=+0} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$a_n \geqq 0 \quad \text{для} \quad n \neq 1, \; a_1 \leqq 0, \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0,$$

(1) $$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_k^n(t)\Big|_{t=+0} = k a_{n-k+1} \qquad (k, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Связь между интенсивностями a_n и вероятностями $\mathbf{P}_k^n(t)$ дают следующие уравнения Колмогорова:

(2) $$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_r^n(t) = \sum_{k=1}^{n+1} k a_{n-k+1}\mathbf{P}_r^k(t).$$

Обозначим через ξ_t число частиц в момент времени t. Предполагаем, что процесс регулярен, т. е. величина ξ_t в любом конечном промежутке времени имеет лишь конечное число скачков с вероятностью 1. Пусть $S(\xi)$ есть максимальное число частиц в рассматриваемой совокупности

$$S(\xi) = \sup_{0 \leqq t} \xi_t.$$

Через $\tau_1(\xi)$ обозначим первый момент времени, в котором число частиц принимает максимальное значение

$$\tau_1(\xi) = \inf_{\xi_t = S(\xi)} t,$$

и через $\tau_2(\xi)$ последний момент времени, в котором число частиц прини-

мает максимальное значение

$$\tau_2(\xi) = \sup_{\xi_t = S(\xi)} t.$$

Задачей настоящей заметки является изучение математического ожидания случайной величины

$$\varrho(\xi) = \tau_2(\xi) - \tau_1(\xi).$$

Если $a_0 = 0$, то с вероятностью 1 $S(\xi) = \infty$ при $a_1 \neq 0$ и $S(\xi)$ равно начальному числу частиц в совокупности при $a_1 = 0$. Если же $a_k = 0$ для $k \geqq 2$ и $a_1 \neq 0$, то для совокупности, насчитывавшей r частиц в начальный момент времени, получаем непосредственно функцию распределения случайной величины $\varrho(\xi)$:

$$\mathbf{P}(\varrho(\xi) < t) = 1 - \mathbf{P}_r^r(t) = 1 - e^{-ra_1 t}.$$

Эти случаи не представляют для нас интереса, и мы их рассматривать не будем, предполагая в дальнейшем $a_0 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$.

2. Основной теоремой настоящей заметки является

Теорема 1. Условное математическое ожидание случайной величины $\varrho(\xi)$ при условии $S(\xi) = n$ задается формулой

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k-1}}{k} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} - \frac{U_{n-k-1}}{U_{n-1}} \right),$$

где при $n \geqq 1$

$$U_n = (-a_0)^{-n} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

$U_0 = 1$ и $U_n = 0$ при $n < 0$.

Пример. Рассмотрим процесс размножения и гибели, в котором частица распадается только на две частицы или исчезает (см. [1], стр. 409). В этом случае имеем $a_n = 0$ для $n \geqq 3$. Если $a = \frac{a_2}{a_0} \neq 1$, то легко проверить, что

$$U_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad (n \geqq 0).$$

Если же $a_0 = a_2$, то

$$U_n = n + 1 \qquad (n \geqq 0).$$

Таким образом из теоремы 1 получаем формулы

$$(3) \qquad \mathbf{E}(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n) = \begin{cases} \dfrac{a^n}{a_0(1 - a^{n+1})(1 - a^n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - a^k)^2}{k a^k}, & \text{если} \quad a_0 \neq a_2, \\ \dfrac{1}{2a_0}, & \text{если} \quad a_0 = a_2. \end{cases}$$

Предварительно докажем лемму.

Лемма. При $1 \leqq k \leqq n$ имеет место формула:

$$\int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u \leqq t} \xi_u = n \mid \xi_0 = r)\,dt = \frac{U_{k-1}}{k a_0}\left(\frac{U_{n-r}}{U_n} - \frac{U_{n-r-1}}{U_{n-1}}\right).$$

Доказательство. Мы предположили, что процесс ξ_t регулярен. Следовательно, при всех $k < n$ имеет место формула

$$\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u \leqq t} \xi_u \geqq n \mid \xi_0 = r) = \tag{4}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{s=1}^{m} \mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{\frac{s}{m} t \leqq u \leqq t} \xi_u < n, \xi_{\frac{s-1}{m} t} \geqq n \mid \xi_0 = r).$$

Из соотношений (1) и однородности процесса получаем:

$$\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{\frac{s}{m} t \leqq u \leqq t} \xi_u < n, \xi_{\frac{s-1}{m} t} = n \mid \xi_0 = r) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{\frac{s}{m} t \leqq n \leqq t} \xi_u < n \mid \xi_{\frac{s}{m} t} = j)\,\mathbf{P}_n^j\left(\frac{t}{m}\right)\mathbf{P}_r^n\left(\frac{s-1}{m} t\right) = \tag{5}$$

$$= \frac{n a_0 t}{m}\mathbf{P}(\xi_{\left(1-\frac{s}{m}\right)t} = k, \max_{u \leqq \left(1-\frac{s}{m}\right)t} \xi_u < n \mid \xi_0 = n-1)\,\mathbf{P}_r^n\left(\frac{s-1}{m} t\right) + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

Для вероятностей перехода имеют место следующие соотношения (см. [2], стр. 53):

$$\mathbf{P}_i^j(T) = \sum_{j_1+\ldots+j_i=j} \prod_{r=1}^{i} \mathbf{P}_1^{j_r}(T).$$

Отсюда следует неравенство

$$\mathbf{P}_i^j(T) \leqq \binom{i}{j}[\mathbf{P}_1^0(T)]^{i-j} \qquad (i \geqq j). \tag{6}$$

Из очевидной оценки

$$\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{\frac{s}{m} t \leqq u \leqq t} \xi_u < n, \xi_{\frac{s-1}{m} t} > n \mid \xi_0 = r) \leqq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbf{P}_i^j\left(\frac{t}{m}\right)$$

и неравенства (6) следует

$$\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{\frac{s}{m} t \leqq u \leqq t} \xi_u < n, \xi_{\frac{s-1}{m} t} > n \mid \xi_0 = r) = o\left(\frac{1}{m}\right).$$

Отсюда, используя формулы (4) и (5), получаем при $k < n$:

$$\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u \leqq t} \xi_u \geqq n \mid \xi_0 = r) = n a_0 \int_0^t \mathbf{P}(\xi_{t-\tau} = k, \max_{u \leqq t-\tau} \xi_u < n \mid \xi_0 = n-1)\,\mathbf{P}_r^n(\tau)\,d\tau$$

или

$$\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u\leqq t} \xi_u < n | \xi_0 = r) =$$

(7)

$$= \mathbf{P}_r^k(t) - n a_0 \int_0^t \mathbf{P}(\xi_{t-\tau} = k, \max_{u \leqq t-\tau} \xi_u < n | \xi_0 = n-1) \mathbf{P}_r^n(\tau) d\tau.$$

Из уравнений (2) следует, что при $k \geqq 1$ интегралы $\int_0^\infty \mathbf{P}_r^k(t)\,dt$ сходятся. Следовательно, используя формулу (7), получаем при $1 \leqq k < n$:

$$\int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u\leqq t} \xi_u < n | \xi_0 = r) dt =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}_r^k(t)\,dt - n a_0 \int_0^\infty \mathbf{P}_r^n(t)\,dt \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u\leqq t} \xi_u < n | \xi_0 = n-1) dt.$$

Отсюда и из формулы

$$\mathbf{P}(\xi_t = n, \max_{u\leqq t} \xi_u = n | \xi_0 = r) = \mathbf{P}(\xi_t = n, \max_{u\leqq t} \xi_u < n+1 | \xi_0 = r)$$

находим, что

$$\int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u\leqq t} \xi_u = n | \xi_0 = r) dt =$$

(8)

$$= \begin{cases} \dfrac{n a_0 A_r^n A_{n-1}^k}{1 + n a_0 A_{n-1}^n} - \dfrac{(n+1) a_0 A_r^{n+1} A_n^k}{1 + (n+1) a_0 A_n^{n+1}} & \text{при} \quad 1 \leqq k < n, \\ A_r^n - \dfrac{(n+1) A_0 A_r^{n+1} A_n^n}{1 + (n+1) a_0 A_n^{n+1}} & \text{при} \quad k = n, \end{cases}$$

где $A_r^k = \int_0^\infty \mathbf{P}_r^k(t) dt$.

Используя уравнения (2), получаем для величин A_r^k следующую систему линейных уравнений:

$$a_0 A_r^1 = P^r,$$

$$\sum_{s=1}^n s a_{n-s} A_r^s = -\delta_r^{n-1},$$

где P—вероятность вырождения потомства одной частицы $(P = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_1^0(t))$ и $\delta_r^r = 1$, $\delta_r^n = 0$ при $n \neq r$. Решая эту систему, находим, что

$$A_r^k = \frac{1}{k a_0} (P^r U_{k-1} - U_{k-r-1}) \qquad (k \geqq 1).$$

Подставляя это выражение в формулу (8), получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $\int_0^\infty \mathbf{P}_r^k(t)\,dt$ сходятся при $k \geqq 1$, то из очевидного неравенства

$$\mathbf{P}(\tau_i(\xi) \geqq t \mid S(\xi) = n, \xi_0 = r) \leqq [\mathbf{P}(S(\xi) = n \mid \xi_0 = r)]^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_r^k(t) \qquad (i = 1, 2)$$

следует

$$\liminf_{t\to\infty} t\mathbf{P}(\tau_i(\xi) \geqq t \mid S(\xi) = n, \xi_0 = r) = 0.$$

Отсюда получаем равенство

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n, \xi_0 = r) =$$

$$= \int_0^\infty \{\mathbf{P}(\tau_2(\xi) \geqq t \mid S(\xi) = n, \xi_0 = r) - \mathbf{P}(\tau_1(\xi) \geqq t \mid S(\xi) = n, \xi_0 = r)\}\,dt. \tag{9}$$

Из формулы

$$\mathbf{P}(\tau_1(\xi) \geqq t, S(\xi) = n \mid \xi_0 = r) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\max_{u \geqq t} \xi_u = n, \xi_t = k, \max_{u \leqq t} \xi_u < n \mid \xi_0 = r)$$

следует

$$\mathbf{P}(\tau_1(\xi) \geqq t, S(\xi) = n \mid \xi_0 = r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S(\xi) = n \mid \xi_0 = k)\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u \leqq t} \xi_u < n \mid \xi_0 = r).$$

Аналогично получаем равенство

$$\mathbf{P}(\tau_2(\xi) \geqq t, S(\xi) = n \mid \xi_0 = r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S(\xi) = n \mid \xi_0 = k)\mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u \leqq t} \xi_u \leqq n \mid \xi_0 = r).$$

Отсюда и из формулы (9) следует

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n, \xi_0 = r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{P}(S(\xi) = n \mid \xi_0 = k)}{\mathbf{P}(S(\xi) = n \mid \xi_0 = r)} \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_t = k, \max_{u \leqq t} \xi_u = n \mid \xi_0 = r)\,dt. \tag{10}$$

На основании леммы и известной формулы

$$\mathbf{P}(S(\xi) = n \mid \xi_0 = k) = \frac{U_{n-k}}{U_n} - \frac{U_{n-k-1}}{U_{n-1}} \qquad (n \geqq 1)$$

(см. [4], стр. 151; [3], стр. 373) из соотношения (10) вытекает равенство

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n, \xi_0 = r) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k-1}}{k} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} - \frac{U_{n-k-1}}{U_{n-1}} \right).$$

Поскольку правая часть этого равенства не зависит от r, то отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

3. Для процессов, рассмотренных в примере, вероятность вырождения потомства одной частицы определена формулой

$$P = \min\left(\frac{a_0}{a_2}, 1\right) \tag{11}$$

(см. [1], стр. 410). Введем следующие обозначения

$$m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n P^{n-1}, \qquad m_2 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n P^{n-2}.$$

Из формул (3) и (11) следует, что для процессов, рассмотренных в примере, имеют место равенства

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi)|S(\xi)=n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n|a_0 - n_2|} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n m_1} + o\left(\dfrac{1}{n}\right), & \text{если} \quad a_0 \neq a_2, \\ \dfrac{1}{m_2}, & \text{если} \quad a_0 = a_2. \end{cases}$$

Используя результаты В. М. Золотарёва докажем более общую теорему.

Теорема 2. Если $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 a_n P^n < \infty$, то имеют место асимптотические формулы

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi)|S(\xi)=n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n m_1} + o\left(\dfrac{1}{n}\right), & \text{если} \quad m_1 \neq 0, \\ \dfrac{1}{m_2} + o(1), & \text{если} \quad m_1 = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через V_n выражение $P^n U_n$. В. М. Золотарёв доказал ([4], стр. 152), что величина V_n не убывает с ростом n и при $n \to \infty$

$$U_n \to -\frac{a_0}{P m_1}, \quad \text{если} \quad m_1 \neq 0. \tag{12}$$

Производящая функция величин $V_n - V_{n-1}$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (V_n - V_{n-1}) x^n = a_0 \frac{1-x}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Px)^n} \qquad (|x| < 1).$$

Отсюда и следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(V_n - V_{n-1}) x^{n-2} = a_0 \frac{d^2}{dx^2} \frac{1-x}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Px)^n} \qquad (|x| < 1).$$

Если $m_1 \neq 0$, то при $x \to 1$ $(x < 1)$ правая часть последней формулы стремится к

$$a_0 P \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n P^{n-3}}{3 m_1^2} - \frac{m_2^2}{2 m_1^3} \right)$$

(здесь используется равенство $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n = 0$; см. [2], стр. 66). Итак, в силу предположения теоремы заключаем, что

$$(13) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(V_n - V_{n-1}) < \infty, \quad \text{если} \quad m_1 \neq 0.$$

Предположим теперь, что $m_1 \neq 0$. Из теоремы 1 следует равенство

$$n \mathbf{E}(\varrho(\xi) | S(\xi) = n) = \frac{P}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} V_{n-k-1} \left(\frac{V_k}{V_n} - \frac{V_{k-1}}{V_{n-1}} \right).$$

Представим правую часть этого равенства в виде суммы трех слагаемых:

$$n \mathbf{E}(\varrho(\xi) | S(\xi) = n) = \frac{P}{a_0 V_n} \sum_{k=0}^{n-1} V_{n-k-1} (V_k - V_{k-1}) +$$

$$+ \frac{P}{a_0 V_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{V_{n-k-1}}{n-k} k (V_k - V_{k-1}) + \frac{P}{a_0} \left(\frac{1}{V_n} - \frac{1}{V_{n-1}} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} V_{n-k-1} V_k.$$

Из формулы (12) следует, что первое слагаемое при $n \to \infty$ стремится к пределу $-\frac{1}{m_1}$. Из неравенства (13) заключаем, что второе слагаемое стремится к нулю. Третье же слагаемое не превосходит $C n \log n (V_n - V_{n-1})$, где C некоторая постоянная, и в силу сходимости ряда (13) тоже стремится к нулю. Таким образом теорема доказана в случае $m_1 \neq 0$.

Если же $m_1 = 0$, то теорема непосредственно следует из асимптотической формулы

$$U_n = \frac{2 a_0}{m_2} n + o(n),$$

доказанной в работе [4].

Математический Институт
Польской Академии Наук

(Поступило 17. XII. 1955.)

Литература

[1] W. Feller, On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications, *Proc. Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability,* (1949), стр. 403—432.

[2] Б. А. Севастьянов, Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи Мат. Наук, **6** (1951), вып. 6, стр. 47—99.

[3] K. Urbanik, Limit properties of homogeneous Markoff processes with a denumerable set of states, *Bulletin de l'Acad. Pol. des Sciences,* Cl. III, **2** (1954), No. 8, стр. 371—373.

[4] В. М. Золотарёв, Об одной задаче из теории ветвящихся случайных процессов, Успехи Мат. Наук, **9** (1954), вып. 2, стр. 147—156.

ON A PROBLEM CONCERNING BIRTH AND DEATH PROCESSES

By

K. Urbanik (Wroclaw)

(Summary)

Denote by $S(\xi)$ the maximal number of particles in the homogeneous birth and death process ξ_t. In this paper we consider the expectation of the following random variable:

$$\varrho(\xi) = \sup_{\xi_t = S(\xi)} t - \inf_{\xi_t = S(\xi)} t.$$

The conditional expectation of the random variable $\varrho(\xi)$ under the assumption $S(\xi) = n$ is given by the formula

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k-1}}{k} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} - \frac{U_{n-k-1}}{U_{n-1}} \right),$$

where for $n \geq 1$

$$U_n = (-a_0)^{-n} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 \end{vmatrix},$$

$U_0 = 1$, $U_n = 0$ for $n < 0$ and $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ denote the transition intensities of the process ξ_t.

Let P denote the probability of extinction of the process ξ_t. If $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 a_n P^n < \infty$, then the asymptotic formula

$$\mathbf{E}(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n m_1} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{for } m_1 \neq 0, \\ \dfrac{1}{m_2} + o(1) & \text{for } m_1 = 0 \end{cases}$$

is true $\left(\text{where } m_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n P^{n-1} \text{ and } m_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n P^{n-2} \right)$.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG AUF DIE KUGELFLÄCHE EINES TOPOLOGISCHEN SATZES VON HELLY

Von

J. MOLNÁR (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Folgender Satz von HELLY[1] ist bekannt:

Ist in der euklidischen Ebene eine beliebige Anzahl von einfach zusammenhängenden Bereichen[2] so vorgegeben, daß der Durchschnitt von je zweien zusammenhängend ist und der Durchschnitt von je dreien nicht leer ist,[3] so ist der Durchschnitt sämtlicher Bereiche nicht leer.

Auf der Kugelfläche gilt dieser Satz nicht. Ein Gegenbeispiel liefert uns das sphärische Netz eines Tetraeders. Die vier Dreiecke des Netzes genügen den obigen Bedingungen, haben aber keinen gemeinsamen Punkt.[4] Um den Hellyschen Satz auf die Kugel übertragen zu können, sind daher noch weitere Voraussetzungen nötig.[5]

Wir beweisen folgenden

SATZ. *Ist auf der Kugelfläche eine beliebige Anzahl von einfach zusammenhängenden Bereichen so vorgegeben, daß der Durchschnitt von je zweien zusammenhängend ist, der Durchschnitt von je dreien nicht leer ist, und je vier die Kugel nicht ganz bedecken, so ist der Durchschnitt sämtlicher Bereiche nicht leer.*

Aus diesem Ergebnis ergibt sich z. B. unmittelbar folgender Satz von C. V. ROBINSON:[6]

[1] E. HELLY, Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, *Mh. Math. Phys.*, **37** (1930), S. 281—302.

[2] Unter einem Bereiche verstehen wir im folgenden stets eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge.

[3] Aus diesen Voraussetzungen ergibt sich, daß auch die Durchschnitte von je zveien und je dreien auch einfach zusammenhängende Bereiche sind. Es gilt nämlich der bekannte Satz: Sind in der euklidischen Ebene drei einfach zusammenhängende Bereiche so vorgegeben, daß der Durchschnitt von je zweien zusammenhängend ist, und der Durchschnitt aller drei nicht leer ist, so sind die Durchschnitte von je zweien und aller drei einfach zusammenhängende Bereiche.

[4] Vgl. das Referat No. 1950 von A. W. POGORELOW in Реф. Журнал, Математика (1955).

[5] Vgl. C. V. ROBINSON, Spherical theorems of Helly type and congruence indices of spherical caps, *Amer. J. Math.*, **64** (1942), S. 260—272. S. auch L. M. BLUMENTHAL, *Theory and applications of distance geometry* (Oxford, 1953), Kap. VIII.

[6] C. V. ROBINSON, a. a. O.[5], S. 267.

Können je drei Punkte eines auf der Einheitskugel liegenden Punktsystems durch eine Einheitskugelkalotte vom Radius $\varrho < \operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{2}$[7] überdeckt werden, so gilt dasselbe auch für das ganze Punktsystem.

Wir beweisen zunächst unseren Satz durch Induktion für eine endliche Anzahl von Bereichen, die wir mit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bezeichnen. Im Fall $n=4$ ist der Satz eine Folgerung des Hellyschen Satzes. Da nämlich die Bereiche B_1, B_2, B_3, B_4 die Kugel nicht bedecken, läßt sich ein unbedeckter Punkt herausheben, wodurch eine mit der Ebene homöomorphe Fläche entsteht. Wir setzen nun die Gültigkeit des Satzes für n voraus. Wir betrachten den Durchschnitt $\bar{B}_n = B_n \cdot B_{n+1}$ und behaupten, daß $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, \bar{B}_n$ den Bedingungen unseren Satzes Genüge leisten.

Die Bereichen B_k, B_n, B_{n+1} liegen auf einer der Ebene homöomorphen punktierten Kugelfläche, da ja nach der Voraussetzung auch drei von unseren Bereichen die Kugel nicht bedecken können. Es kann also der in der Fußnote [3] angeführte Satz angewendet werden, woraus folgt, daß $B_k \cdot \bar{B}_n = B_k \cdot B_n \cdot B_{n+1}$ einfach zusammenhängend ist.

Es folgt weiter aus dem schon bewiesenen Falle $n=4$ unseres Satzes, daß $B_k \cdot B_l \cdot \bar{B}_n = B_k \cdot B_l \cdot B_n \cdot B_{n+1}$ nicht leer ist.

Wegen der Voraussetzung können auch $B_k, B_l, B_m, \bar{B}_n$ die Kugel nicht bedecken da ja $\bar{B}_n \subseteq B_n$ gilt. Folglich ist der Satz für die Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, \bar{B}_n$ anwendbar, d. h. sie haben einen gemeinsamen Punkt. Dasselbe gilt dann auch für die Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1}$.

Daß unser Satz auch für eine unendliche Anzahl von Bereichen gültig ist, folgt aus folgendem Satz von F. RIESZ:[8]

Gibt es in einem kompakten Raume eine Menge von geschlossenen Mengen derart, daß der Durchschnitt von je endlich vielen nicht leer ist, so ist der Durchschnitt aller dieser Mengen nicht leer.

(Eingegangen am 21. Dezember 1955.)

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ ХЕЛЛИ ДЛЯ СФЕРЫ

И. Мольнар (Будапешт)

(Резюме)

Автор доказывает следующую теорему:

Если находящиеся на сфере односвязные, ограниченные и замкнутые области таковы, что общая часть любых двух областей связна, любые три имеют общую точку и никакие четыре не покрывают всю сферу, то все они имеют общую точку.

[7] $\operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{2}$ bedeutet den sphärischen Radius eines durch drei Eckpunkte eines einbeschriebenen regulären Tetraeders geschriebenen Kreises.

[8] S. B. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie. I* (Berlin, 1923), S. 37.

ON QUASI-INDECOMPOSABLE ABELIAN TORSION GROUPS[1]

By

T. SZELE (Debrecen)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. In the theory of abelian groups[2] it is a well-known result[3] that among the non-torsionfree groups the only groups which are (directly) indecomposable are exactly the groups $C(p^k)$ with $1 \leqq k \leqq \infty$, i. e. the cyclic groups of prime power order p^k and the groups of type p^∞. Clearly, the direct sum of a finite number of such indecomposable groups has the property that it has only direct decompositions with a finite number of components. Calling a group of this property quasi-indecomposable, one may ask whether or not the mentioned groups exhaust the class of all quasi-indecomposable groups. In the present note, confining ourselves to torsion groups, we intend to show that the power of a quasi-indecomposable torsion group does not exceed the power of the continuum and that there exists a quasi-indecomposable p-group of power $2^{\aleph_0}$. In fact, the torsion subgroup of the complete direct sum of the groups $C(p^k)$ with $k = 1, 2, \dots$ will turn out to have the property in question.

2. In what follows let G denote an additively written abelian torsion group. We shall call G *quasi-indecomposable* if it has no direct decomposition with an infinite number of (nonzero) direct summands. If we decompose the torsion group G into the direct sum of its p-components, $G = \sum G_p$, then it is clear that G is quasi-indecomposable if and only if G has but a finite number of p-components $G_p \neq 0$ and each p-component G_p is again quasi-indecomposable. Hence it suffices to restrict ourselves to the study of quasi-indecomposable *p-groups G*.

The maximal algebraically closed[4] subgroup A of G is a direct summand of G, $G = A + H$ where H is a reduced p-group. Evidently, G is

[1] This paper is a posthumous work of the author; it has been elaborated on the basis of a rather complete manuscript of T. SZELE by L. FUCHS (Budapest).

[2] Since the present note is concerned with abelian groups only, for the sake of brevity we shall write from now on „groups" for the longer phrase „abelian groups".

[3] See KULIKOV [2], SZELE [5] or [7], KUROSH [4]. — The numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of this note.

[4] A group G is called algebraically closed (or complete or divisible) if $nG = G$ for every natural integer n; cf. e. g. SZELE [6]. — If G contains no nonzero algebraically closed subgroup, then G is called reduced.

quasi-indecomposable if and only if in the decomposition $A=\sum C(p^\infty)$ there is but a finite number of groups $C(p^\infty)$ and H is again quasi-indecomposable. Therefore, we shall consider only quasi-indecomposable *reduced p-groups G*.

Let G be a quasi-indecomposable reduced p-group and B a basic subgroup[5] of G. B is, by definition, the direct sum of cyclic groups $C(p^n)$,

$$B=B_1+\cdots+B_n+\cdots \qquad \text{with} \quad B_n=\sum C(p^n).$$

Since each $B_1+\cdots+B_n$ is a direct summand of G, we obtain that each B_n is a finite group. Consequently, B is countable and, since for a reduced p-group G and its basic subgroup B we have[6] $|G|\leqq|B|^{\aleph_0}$, it results in our case that $|G|\leqq\aleph_0^{\aleph_0}=$ continuum. Our inference shows that this inequality holds not only for the case of reduced p-groups, but also for all torsion groups, i. e. we have

THEOREM 1. *A quasi-indecomposable torsion group G is of power* $\leqq 2^{\aleph_0}$.

3. In order to establish the existence of a quasi-indecomposable group of power $2^{\aleph_0}$, let us consider the torsion subgroup A of the complete direct sum of the cyclic groups[7] $\{a_k\}$ of order $O(a_k)=p^k$, for $k=1,2,\ldots$. Then A is of power $2^{\aleph_0}$ and consists of all infinite „vectors"

$$(1) \qquad a=\langle m_1a_1,\ldots,m_ka_k,\ldots\rangle \qquad (0\leqq m_k\leqq p^k-1)$$

such that the orders $O(m_ka_k)$ are bounded and the addition of vectors is performed componentwise. Define $h(m_k)$ as the greatest exponent of p for which $p^{h(m_k)}$ divides m_k. Then the height[8] $H(a)$ of a is

$$(2) \qquad H(a)=\min_k h(m_k).$$

If $O(a)=p^n$, we call n the *exponent* $E(a)$ of a; its value is

$$(3) \qquad E(a)=\max_k\,(k-h(m_k)) \qquad (a\neq 0).$$

In certain cases the sum $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ of a countable set of elements $g_i=$ $=\langle m_1^{(i)}a_1, m_2^{(i)}a_2,\ldots\rangle$ of A has a well-defined meaning. This is the case if the sequence $m_k^{(1)}, m_k^{(2)},\ldots$ contains, for each fixed k, but a finite number of terms incongruent to 0 mod p^k and for $m_k=\sum_{i=1}^{\infty} m_k^{(i)}$ we have $\max_k(k-h(m_k))=$ $=$ finite. (We note that in (1) we have $a=\sum_{k=1}^{\infty} m_ka_k$.)

[5] See KULIKOV [2], KUROSH [4] or SZELE [8].

[6] See KULIKOV [3] or FUCHS [1]. — $|G|$ denotes the power of G.

[7] If S is a subset of G, $\{S\}$ denotes the subgroup generated by S.

[8] The height $H(a)$ of an element $a\neq 0$ of a p-group A is the greatest non-negative integer h for which $p^hx=a$ is solvable. The meaning of $H(a)=\infty$ is obvious.

4. For the group A the following theorem holds.

THEOREM 2. *The torsion subgroup A of the complete direct sum of the cyclic groups of order p^k $(k=1, 2, \ldots)$ is a quasi-indecomposable p-group of power $2^{\aleph_0}$.*

Suppose, on the contrary, that A is the direct sum of an infinite set of its subgroups $A_n \neq 0$. Each A_n has a cyclic direct summand $\{b_n\} \neq 0$ (which may coincide with A_n itself)[9] and therefore A has a decomposition

$$A = B + C \quad \text{with} \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n\}. \tag{4}$$

α) If the exponents of the elements b_n are bounded, say, $\leqq t$, then A has an infinite subgroup B whose elements $b (\neq 0)$ satisfy $H(b) + E(b) \leqq t$. But this is impossible, because B must have two different elements b' and b'' with the same first t components $m_1 a_1, \ldots, m_t a_t$, and for $b = b' - b'' \neq 0$ we have the contradiction $H(b) + E(b) > t$.

β) If the exponents $E(b_n) = k_n$ are unbounded, then we may assume $0 < k_1 < k_2 < \ldots$. The infinite sum

$$\sum_{i=1}^{\infty} p^{k_i - 1} b_i = b \tag{5}$$

is a well-defined element of A (observe that by $k_i \geqq i$ the first $i-1$ terms of the infinite vector $p^{k_i-1} b_i$ are 0 and therefore the ith component of the infinite vector b is the sum of at most i terms). If we prove $b \notin B$, then the impossibility of (4) follows at once, considering that b is of infinite height mod B, but $C \simeq A/B$ contains only elements of finite height.

If we had $b \in B$, i. e. $b = s_1 b_1 + \cdots + s_j b_j$, then

$$d = p^{k_{j+1}-1} b_{j+1} + \cdots \in \{b_1\} + \cdots + \{b_j\} = B_j. \tag{6}$$

B_j is by (4) a direct summand of A, and therefore $H(d) < k_j$. On the other hand, the expression (6) of d shows that $H(d) \geqq k_{j+1} - 1 \geqq k_j$, a contradiction. (That $d = 0$ is impossible is shown by the contradiction arising from the equality $-p^{k_{j+1}-1} b_{j+1} = p^{k_{j+2}-1} b_{j+2} + \cdots$ where the height of the element on the left hand side is $k_{j+1} - 1$, while that on the right is $\geqq k_{j+2} - 1$.) This completes the proof of Theorem 2.

5. It may be of some interest to note that *each direct summand of A is either finite or has the power $2^{\aleph_0}$.*[10] In fact, let D be an infinite direct summand of A. Then D contains an infinite set of elements $d_1, d_2, \ldots$ such that

[9] See e. g. SZELE [5]. In our present case a summand $C(p^\infty)$ is impossible.

[10] Thus the continuum hypothesis is equivalent to the group-theoretical assertion that our group A has a direct summand of power $\aleph_1$.

$\{d_1\}, \{d_2\}, \dots$ are different direct summands of D; for example, let $D' = \sum \{d_n\}$ be a basic subgroup of D. If $E(d_n) = k_n$ is a bounded set, then $D' = D$ and 4α) leads to a contradiction. Therefore, we may take $0 < k_1 < k_2 < \dots$. For any choice of the integers r_i $(0 \leqq r_i \leqq p-1)$ there exists the infinite sum (like (5))

$$d = r_1 d_1' + r_2 d_2' + \cdots \qquad (d_i' = p^{k_i - 1} d_i). \tag{7}$$

Considering that d is of infinite height mod D and A contains no element of infinite height, we must necessarily have $d \in D$. The equality of the power of D to $2^{\aleph_0}$ will follow immediately if we show that (7) is a unique form for d, i. e.

$$r_1 d_1' + r_2 d_2' + \cdots = r_1' d_1' + r_2' d_2' + \cdots \qquad (0 \leqq r_i, r_i' \leqq p-1)$$

implies $r_1 = r_1', r_2 = r_2', \dots$. If i is the least index with $s_i = r_i - r_i' \neq 0$, then $-s_i d_i' = s_{i+1} d_{i+1}' + \cdots$ is impossible in view of the difference of the heights of the elements on the two sides of this equality (cf. 4 β)).

6. The group A is a very important example and therefore it is worth while getting information on its endomorphic images. First we describe all its endomorphisms. Let $b_1, b_2, \dots$ be arbitrary elements of A such that

$$E(b_r) = u_r \leqq r = E(a_r) \qquad (r = 1, 2, \dots). \tag{8}$$

We show that A has one and only one endomorphism ε for which

$$a_r \varepsilon = b_r \qquad (r = 1, 2, \dots). \tag{9}$$

In fact, let

$$b_r = \langle n_1^{(r)} a_1,\ n_2^{(r)} a_2, \dots \rangle \tag{10}$$

where, on account of (3) and (8),

$$\max_k (k - h(n_k^{(r)})) = u_r \leqq r, \tag{11}$$

and define

$$a\varepsilon = \left(\sum_{r=1}^{\infty} m_r a_r \right) \varepsilon = \sum_{r=1}^{\infty} m_r b_r = \left\langle \sum_{r=1}^{\infty} m_r n_1^{(r)} a_1,\ \sum_{r=1}^{\infty} m_r n_2^{(r)} a_2, \dots \right\rangle. \tag{12}$$

We have to show that the sum

$$\sum_{r=1}^{\infty} m_r n_k^{(r)} = m_k^*$$

contains but a finite number of terms $\not\equiv 0 \pmod{p^k}$ and that for the finite sums m_k^* which are $\not\equiv 0 \pmod{p^k}$ we have

$$\max_k (k - h(m_k^*)) < \infty. \tag{13}$$

The first assertion is obvious in view of (3), since $h(m_r) \to \infty$. In order to establish (13), let us take into account that by (3) $h(m_r) \geqq r - E(a)$ and by (11) $h(n_k^{(r)}) \geqq k - r$, so that

$$h(m_k^*) \geqq \min_r h(m_r n_k^{(r)}) = \min_r (h(m_r) + h(n_k^{(r)})) \geqq k - E(a),$$

indeed. For the mapping ε in (12) we clearly have $(a+a')\varepsilon=a\varepsilon+a'\varepsilon$, i. e. ε is an endomorphism of A. But A has only one endomorphism ε satisfying (9), for if ε' has the same effect on the a_r's, then the kernel M of the endomorphism $\varepsilon-\varepsilon'$ contains $\{a_1, a_2, \ldots\}$, therefore $A(\varepsilon-\varepsilon')\sim A/M$ is a homomorphic image of the algebraically closed group $A/\{a_1, a_2, \ldots\}$. Now $A(\varepsilon-\varepsilon')$ as an algebraically closed subgroup of A reduces to 0, showing that $\varepsilon'=\varepsilon$. We have thus proved that *all the endomorphisms ε of A may be given uniquely by* (9) *where b_r are arbitrary elements subject to* (8).

7. We proceed to prove that *each endomorphic image of A is either finite or countably infinite or of the power $2^{\aleph_0}$*. In the proof of this assertion we distinguish two cases according as in (8) the differences $r-u_r$ tend to infinity or not.

If $\lim(r-u_r)=\infty$, then for a fixed element a of A we have $r-u_r > E(a)$, provided that $r>r_0=r_0(a)$. Hence, by (3), we conclude

$$h(m_r)\geqq r-E(a)>u_r \qquad \text{for } r>r_0,$$

thus by (12)

$$a\varepsilon=\sum_{r=1}^{\infty} m_r b_r=\sum_{r=1}^{r_0} m_r b_r.$$

Consequently, $A\varepsilon=\{b_1, b_2, \ldots\}$, i. e. $A\varepsilon$ is either finite or countable.

Now assume that $r-u_r$ does not tend to ∞; then there exists a fixed natural integer s such that for an infinity of indices r we have $0\leqq r-u_r<s$, or, otherwise expressed,

$$r-s<u_r\leqq r \qquad \text{for} \quad r=r_1, r_2, \ldots \tag{14}$$

where

$$r_1<r_2<\ldots . \tag{15}$$

Consider the elements $b_{r_1}, b_{r_2}, \ldots$ and form

$$p^{u_{r_1}-1}b_{r_1}=b'_{r_1}, \quad p^{u_{r_2}-1}b_{r_2}=b'_{r_2}, \ldots \qquad (O(b'_{r_i})=p). \tag{16}$$

By (14) there is no loss of generality in supposing that the indices r_i are chosen so that they satisfy the additional conditions

$$u_{r_2}-1>H(b'_{r_1}), \quad u_{r_3}-1>H(b'_{r_2}), \ldots . \tag{17}$$

Now take arbitrary integers v_{r_i} with $0\leqq v_{r_i}\leqq p-1$ and consider

$$a_0=\sum_{i=1}^{\infty} v_{r_i}p^{u_{r_i}-1}a_{r_i}.$$

a_0 belongs to A, for by (14) one obtains $p^s a_0=0$. (12) implies

$$a_0\varepsilon=\sum_{i=1}^{\infty} v_{r_i}p^{u_{r_i}-1}b_{r_i}=\sum_{i=1}^{\infty} v_{r_i}b'_{r_i}. \tag{18}$$

We show that $a_0\varepsilon = 0$ only if $v_{r_i} = 0$ for all i. Indeed, if j is the least index i with $v_{r_i} \neq 0$, then $a_0\varepsilon = 0$ would mean

$$-v_{r_j} b'_{r_j} = v_{r_{j+1}} b'_{r_{j+1}} + \cdots$$

which is impossible, since the height of the element in the left hand side is by (17) less than $u_{r_{j+1}} - 1$, while that in the right hand side is at least $u_{r_{j+1}} - 1$. We conclude that different choices of v_{r_i} yield different elements in (18), and therefore $A\varepsilon$ is of the power $2^{\aleph_0}$, qu. e. d.

(Received 25 January 1956)

Bibliography

[1] L. Fuchs, On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), pp. 267—288.

[2] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, **16** (58) (1945), pp. 129—162.

[3] Л. Я. Куликов, Обобщенные примарные группы. I—II, Труды Моск. Мат. Общ., **1** (1952), pp. 247—326; **2** (1953), pp. 85—167.

[4] А. Г. Курош, Теория групп (Москва, 1953).

[5] T. Szele, Sur la décomposition directe des groupes abéliens, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), pp. 1052—53.

[6] T. Szele, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, *Journ. f. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), pp. 167—192.

[7] T. Szele, On direct decompositions of abelian groups, *Journal London Math. Soc.*, **28** (1953), pp. 247—250.

[8] T. Szele, On the basic subgroups of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), pp. 129—141.

КВАЗИ-НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Т. Селе (Дебрецен)

(Резюме)

Группа называется квази-неразложимой, если любое ее прямое разложение содержит лишь конечное число прямых слагаемых. Автор изучает квази-неразложимые периодические абелевы группы, при исследовании которых можно, очевидно, ограничиться случаем p-групп.

Автором доказывается, что мощность квази-неразложимой периодической абелевой p-группы не превышает мощности континуума, и задается пример такой группы, которая имеет мощность континуума. Примером служит периодическая часть A полной прямой суммы циклических групп порядков $p, p^2, \ldots$.

Доказывается, что любое прямое слагаемое этой группы A либо конечно, либо имеет мощность континуума.

Трактуется также вопрос об эндоморфизмах и эндоморфных образах этой группы.

ON ABELIAN TORSION GROUPS WHICH CAN NOT BE REPRESENTED AS THE DIRECT SUM OF A GIVEN CARDINAL NUMBER OF COMPONENTS

By

L. FUCHS (Budapest)

(*Presented by* L. RÉDEI)

1. In a recent paper[1] T. SZELE has introduced the notion of quasi-indecomposable groups defined so as to have no direct decompositions with an infinity of direct summands.[2] He has established the existence of a quasi-indecomposable abelian p-group of the power of the continuum, by giving the typical example of the torsion subgroup of the complete direct sum of cyclic groups of order p^n ($n=1, 2, \ldots$). It was also shown in [5] that no quasi-indecomposable torsion group exists whose power exceeds the power of the continuum.

There exists an immediate generalization of the notion of quasi-indecomposable groups. For a given cardinal $\mathfrak{m}$, we may introduce the notion of $\mathfrak{m}$-indecomposable groups, meaning thereby groups having no direct decomposition with $\mathfrak{m}$ (or more) direct summands. The $\aleph_0$-indecomposable groups are then just the quasi-indecomposable groups. For each cardinal $\mathfrak{m}$ trivially exist $\mathfrak{m}$-indecomposable groups, since all groups of power less than $\mathfrak{m}$ have this property. Therefore, of the $\mathfrak{m}$-indecomposable groups only those of power $\geqq \mathfrak{m}$ are of interest; we shall call them proper $\mathfrak{m}$-indecomposable groups.

The aim of this note is to get information on the proper $\mathfrak{m}$-indecomposable abelian torsion groups for infinite cardinals $\mathfrak{m}$. It will turn out that there are cardinals $\mathfrak{m}$ for which proper $\mathfrak{m}$-indecomposable torsion groups do not exist; more explicitly, we shall prove that for the existence of proper $\mathfrak{m}$-indecomposable torsion groups a necessary and sufficient condition is either the existence of a cardinal $\mathfrak{n}$ with $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}^{\aleph_0}$ or the existence of countable cardinals $\mathfrak{n}_i$ ($i=1, 2, \ldots$) with $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{m}$ and $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}$. Thus, e. g. if $\mathfrak{m}$ is a cardinal following a cardinal of the form $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$, then there is no proper $\mathfrak{m}$-indecomposable torsion group. As in the case $\mathfrak{m}=\aleph_0$, one is able to establish an upper bound for the power of $\mathfrak{m}$-indecomposable torsion groups, the least upper bound being $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$. One finds the interesting result that the set

[1] See the preceding paper [5]. — The numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of this note.

[2] By a direct summand we always mean a nonzero one.

of all proper $\mathfrak{m}$-indecomposable p-groups, if not vacuous, has the same cardinal number as the set of all groups of power $\leqq \mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

2.[3] In what follows, by a group we shall mean an abelian torsion group with more than one element; the group operation is written as addition. For a subset S of a group G, $\{S\}$ and $|S|$ will mean the subgroup generated by S and the power of S, respectively. $\mathcal{C}(p^k)$ for $k=1,2,\ldots$ denotes the cyclic group of order p^k, while $\mathcal{C}(p^\infty)$ serves to denote PRÜFER's group of type p^∞. By $\sum\limits_{\mathfrak{m}} A$ we denote the (discrete) direct sum of $\mathfrak{m}$ isomorphic copies of the group A where $\mathfrak{m}$ is a cardinal number.

The order of an element a is denoted by $O(a)$. In a p-group G, the exponent $E(a)$ of an element a is defined by $O(a)=p^{E(a)}$, and the height $H(a)$ of $a \neq 0$ as the greatest non-negative integer s for which $p^s x = a$ is solvable, or ∞.

If G is a reduced p-group, let $G^0 = G$ and define the subgroups G^α of G where α is an ordinal as follows: if $\alpha-1$ exists, then let G^α consist of all elements of $G^{\alpha-1}$ which are of infinite height in $G^{\alpha-1}$; if α is a limit ordinal, then we define G^α as the meet of all G^β with $\beta<\alpha$. By the reducedness of G, for some ordinal τ (not exceeding $|G|$) we have $G^{\tau+1}=G^\tau=0$. The least τ of this property is said to be the type of G and the well-ordered sequence of the factor groups $G_\alpha = G^\alpha/G^{\alpha+1}$ $(\alpha<\tau)$ is called the Ulm sequence of G. No Ulm factor contains elements of infinite height and none of them is bounded, except possibly $G_{\tau-1}$ if this exists.

Each p-group G contains a basic subgroup B which is defined to be the direct sum of cyclic groups, a serving subgroup of G and the factor group G/B is complete. B has a direct decomposition $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ where B_n is the direct sum of a set of groups $\mathcal{C}(p^n)$. For each n we have also $G=B_1+\ldots+B_n+D_n$ for some subgroup D_n of G. B is uniquely determined up to isomorphism. For the cardinal numbers of G and B the following inequality holds provided that G is reduced:[4]

$$|G| \leqq |B|^{\aleph_0}.$$

We shall need also the result stating that each p-group has a direct summand of the form $\mathcal{C}(p^k)$ with some k $(1 \leqq k \leqq \infty)$.

If G is a *countable* reduced p-group, then the following three important results hold: If G contains no element of infinite height, then G is the direct sum of cyclic groups (PRÜFER). G is uniquely determined, up to

[3] Here we collect certain definitions and facts concerning abelian torsion groups; for details we refer e. g. to KUROSH [4].

[4] See KULIKOV [3] or FUCHS [1].

isomorphism, by its Ulm sequence $G_\alpha (\alpha < \tau)$ (ULM). To every well-ordered countable sequence of countable p-groups G_α without elements of infinite height, none of which (with the exception of $G_{\tau-1}$) is bounded, there exists a reduced p-group G with G_α as Ulm sequence (ZIPPIN).

A generalization of the last result is:[4] Let $\mathfrak{p}$ be a cardinal, τ an ordinal, and G_α $(0 \leqq \alpha < \tau)$ a sequence of p-groups without elements of infinite height such that

(I) $$\sum_{0 \leqq \alpha < \tau} |G_\alpha| \leqq \mathfrak{p} \leqq \prod_{0 \leqq \alpha < \min(\omega, \tau)} |G_\alpha|;$$

(II) $$\sum_{\beta \leqq \alpha < \tau} |G_\alpha| \leqq |G_\beta|^{\aleph_0} \text{ for all } \beta \text{ with } 0 \leqq \beta < \tau;$$

(III) $$|B_{\alpha+1}| \leqq |p^n G_\alpha| \qquad \text{for all } 1 \leqq \alpha + 1 < \tau;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

where $B_{\alpha+1}$ is a basic subgroup of $G_{\alpha+1}$. Then there is a reduced p-group G of power $\mathfrak{p}$, of type τ, whose Ulm sequence is G_α.

3. Let $\mathfrak{m}$ be an infinite cardinal number. As told, we call the group G $\mathfrak{m}$-*indecomposable*, if in each direct decomposition of G the cardinal number of the set of the direct summands is less than $\mathfrak{m}$. Clearly, if G is $\mathfrak{m}$-indecomposable, then it is also $\mathfrak{m}^*$-indecomposable for every cardinal $\mathfrak{m}^*$ satisfying $\mathfrak{m}^* \geqq \mathfrak{m}$. The groups of power $< \mathfrak{m}$ may be considered as improper $\mathfrak{m}$-indecomposable groups and therefore may be left out of consideration.

From the definition it results at once that every direct summand of an $\mathfrak{m}$-indecomposable group is again $\mathfrak{m}$-indecomposable. In particular, any p-component G_p of an $\mathfrak{m}$-indecomposable torsion group G is $\mathfrak{m}$-indecomposable. Therefore, first we shall consider p-groups and then turn our attention to torsion groups (see Theorem 3).

Let now G be a p-group and A its maximal complete subgroup. Then we have $G = A + H$ for some reduced p-group H. It follows at once that G is $\mathfrak{m}$-indecomposable if and only if A and H are. But for a complete p-group A the $\mathfrak{m}$-indecomposibility is equivalent to the assertion that A is of the form

$$A = \sum_{\mathfrak{n}} \mathfrak{C}(p^\infty) \qquad \text{with } \mathfrak{n} < \mathfrak{m}.$$

Thus A is an improper $\mathfrak{m}$-indecomposable group and may be neglected. Consequently, there is no loss of generality in confining ourselves to *reduced* p-groups.

4. Let the given cardinal $\mathfrak{m}$ have the property that, for every cardinal $\mathfrak{n}$, the inequality $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ implies $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$, and for every countable set of cardinals $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$, all less than $\mathfrak{m}$, we have $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i < \mathfrak{m}$. We are going to show

that for such cardinals $\mathfrak{m}$ there do not exist any proper $\mathfrak{m}$-indecomposable reduced p-groups G. In fact, let G be a proper $\mathfrak{m}$-indecomposable p-group and $\mathfrak{n}_i$ the power of $B_i = \sum \mathfrak{C}(p^i)$ where $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$ is a basic subgroup of G; let $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{n}$. Then we must have

$$\mathfrak{m} \leqq |G| \leqq |B|^{\aleph_0} = \mathfrak{n}^{\aleph_0}$$

and therefore, by hypothesis, we obtain $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i$. Again by assumption we obtain $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}_i$ for at least one i; then $G = B_1 + \cdots + B_i + D_i$ and $B_i = \sum_{\mathfrak{n}_i} \mathfrak{C}(p^i)$ contradicts the $\mathfrak{m}$-indecomposable character of G.

Observe that our inference also shows that for a proper $\mathfrak{m}$-indecomposable group G we must have $|B_i| < \mathfrak{m}$ whence $|B| \leqq \mathfrak{m}$. Thus we obtain the inequality

$$|G| \leqq |B|^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{m}^{\aleph_0}. \tag{1}$$

Next suppose the existence of a cardinal number $\mathfrak{n}$ with $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}^{\aleph_0}$. Then $\mathfrak{n}^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{m}^{\aleph_0} \leqq (\mathfrak{n}^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \mathfrak{n}^{\aleph_0}$, i. e. $\mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Consider

$$B_i = \sum_{\mathfrak{n}} \mathfrak{C}(p^i) \qquad (i = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

and define G_1 as the torsion subgroup of the complete direct sum of the groups $B_1, \ldots, B_i, \ldots$, that is to say, G_1 consists of all „vectors" of the form

$$g = \langle b_1, \ldots, b_i, \ldots \rangle \qquad (b_i \in B_i) \tag{3}$$

where the orders $O(b_i)$ are bounded and their least upper bound is the order of g. It is readily seen that the discrete direct sum $B = B_1 + \cdots + B_i + \cdots$ is a basic subgroup of G_1. Evidently, $|G_1| = \mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

Assume that this G_1 has a decomposition into the direct sum of $\mathfrak{m}$ summands S_ν. By a well-known result each S_ν has a cyclic direct summand $\{a_\nu\} \neq 0$, consequently,

$$G_1 = \sum_{\nu} \{a_\nu\} + H = A + H \tag{4}$$

where ν ranges over an index set of power $\mathfrak{m}$. A basic subgroup B' of G_1 is obtained as the direct sum of A and of a basic subgroup of H, thus, confining ourselves to the case[5] $\mathfrak{n} \geqq \aleph_0$, $|A| \leqq |B'| = |B| = \mathfrak{n}$ what is incompatible with $|A| \geqq \mathfrak{m}$. Thus G_1 is $\mathfrak{m}$-indecomposable.

Now we turn our attention to cardinal numbers $\mathfrak{m}$ for which $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ implies $\mathfrak{n}^{\aleph_0} < \mathfrak{m}$, but there are cardinals $\mathfrak{n}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ less than $\mathfrak{m}$ with

[5] For finite $\mathfrak{n}$ we refer to SZELE [5].

$\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}$. By a known result of set theory[6] we have

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m} < \prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i .$$

There is no loss of generality in supposing that for each i we have $\mathfrak{n}_i^{\aleph_0} = \mathfrak{n}_i$, since the cardinals $\mathfrak{n}_i^{\aleph_0}$ again satisfy the required conditions. Under this hypothesis we get

$$\mathfrak{m}^{\aleph_0} \leqq (\prod \mathfrak{n}_i)^{\aleph_0} = \prod \mathfrak{n}_i^{\aleph_0} = \prod \mathfrak{n}_i \leqq \prod \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\aleph_0},$$

that is,

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}^{\aleph_0}. \tag{5}$$

Now define a group G_2 in the same manner as G_1 above with the sole modification that instead of (2) take

$$B_i = \sum_{\mathfrak{n}_i} \mathfrak{C}(p^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

By (5), this G_2 is again of power $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$ and we have again to prove the impossibility of a decomposition of type (4). Now a finer argument is necessary. Collecting the summands $\{a_\nu\}$ of the same order, we get

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{C}(p^i) \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}.$$

Take into account again the fact that A is a direct summand of a basic subgroup of G_2; thus $\mathfrak{p}_i \leqq \mathfrak{n}_i < \mathfrak{m}$, and from $\sum \mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$ we conclude $\mathfrak{m} < \prod \mathfrak{p}_i$. Let a_i denote an arbitrary element of

$$A_i = \sum_{\mathfrak{p}_i} p^{i-1} \mathfrak{C}(p^i) \subseteq A;$$

a_i is of order p and of height $i-1$. It is easy to see that the infinite sum

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{7}$$

is a well-defined element of G_2 (in the vector form (2) of a the kth component is the sum of at most k terms, further $pa = 0$). Since a is of infinite height mod A and G_2 contains no element of infinite height, it follows $a \in A$. We prove that $\sum a_i = \sum a_i'$ implies $a_i = a_i'$ for each i. In fact, if j were the least index with $a_j \neq a_j'$, then the element on the left hand side of $a_j' - a_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} (a_i - a_i')$ would be of height $j-1$, while that on the right of height

[6] See e. g. HAUSDORFF [2], p. 36 (corollary to J. KÖNIG's theorem).

$\geqq j$. Therefore, different choices of a_i yield different elements a in (7), consequently, the set of elements a in (7) has the power $\prod \mathfrak{p}_i$. Now $a \in A$ and $|A| = \mathfrak{m} < \prod \mathfrak{p}_i$ are in an obvious contradiction.

To sum up, we have proved:

THEOREM 1. *A proper* $\mathfrak{m}$*-indecomposable p-group G exists if and only if either of the following conditions holds:*

(i) *there is a cardinal* $\mathfrak{n}$ *with* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}^{\aleph_0}$,

(ii) *there is a countable set of cardinals* $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \dots$ *with* $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{m}$ *and* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}$.

Every $\mathfrak{m}$*-indecomposable p-group is of power* $\leqq \mathfrak{m}^{\aleph_0}$; *if a proper* $\mathfrak{m}$*-indecomposable p-group exists, then there is also one of power* $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

This theorem contains as a special case the principal result of SZELE's paper [5].

5. For brevity let us write $\mathfrak{t} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. We have shown that there exists an $\mathfrak{m}$-indecomposable p-group G of power $\mathfrak{t}$, provided a proper $\mathfrak{m}$-indecomposable p-group exists at all. One may ask for the power of the set of $\mathfrak{m}$-indecomposable p-groups of power $\mathfrak{t}$. The result we find is contained in

THEOREM 2. *The set of* $\mathfrak{m}$*-indecomposable p-groups of power* $\mathfrak{t} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ *is, if not empty, of the power* $2^{\mathfrak{t}}$, *i. e. of the same power as the set of all groups of power* $\mathfrak{t}$.

Let τ be the first ordinal of power $\mathfrak{t}$, and for each ordinal α with $0 \leqq \alpha < \tau$ take a group H_α such that

1. $H_0 = G_1$ or G_2 according as for $\mathfrak{m}$ condition (i) or (ii) holds,

2. for $1 \leqq \alpha < \tau$, $H_\alpha = F_1$ or F_2 where $F_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{t}} \mathfrak{C}(p^{2i-1})$ and $F_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{t}} \mathfrak{C}(p^{2i})$.

Then each H_α is a group of power $\mathfrak{t}$ and without elements of infinite height. Since the sequence H_α satisfies the conditions (I)—(III) enumerated in 2, we conclude to the existence of a reduced p-group H of power $\mathfrak{t}$ and of type τ whose Ulm sequence is H_α. Since different choices of H_α $(1 \leqq \alpha < \tau)$ give rise to nonisomorphic groups H, it follows that the set of these groups H is of the power $2^{\mathfrak{t}}$.

We have to verify that each H is $\mathfrak{m}$-indecomposable. If H had a direct decomposition

$$H = \sum_{\nu} J_\nu \qquad (J_\nu \neq 0,\ \nu \in I,\ |I| = \mathfrak{m}), \tag{8}$$

then, denoting by X^1 the subgroup of a p-group X consisting of all elements of infinite height, we should obtain

$$H^1 = \sum_\nu J_\nu^1 \text{ and } H/H^1 = \sum_\nu J_\nu/J_\nu^1.$$

Here H/H^1 is nothing else than H_0, i. e., it is $\mathfrak{m}$-indecomposable. None of J_ν/J_ν^1 may vanish, for H can not contain any complete subgroup. This shows that (8) is impossible and hence Theorem 2 is established.

Let us here point out two simple consequences of our arguments. First, the last inference shows that a reduced p-group H is necessarily $\mathfrak{m}$-indecomposable if its initial Ulm factor $H_0 = H/H^1$ has this property. Further, if there exists a proper $\mathfrak{m}$-indecomposable p-group, then for each ordinal τ of power not exceeding the cardinal $\mathfrak{t}$ there exist proper $\mathfrak{m}$-indecomposable p-groups of type τ.

6. Next we intend to show that *there exists no $\aleph_0$-indecomposable reduced p-group of power $\aleph_0$.*

Let G be a countable reduced p-group and $G_0, G_1, \ldots, G_\alpha, \ldots$ $(\alpha < \tau)$ its Ulm sequence. Since each G_α is a countable p-group without elements of infinite height, by PRÜFER's theorem, G_α is the direct sum of cyclic groups. Thus the statement for the case $\tau = 1$ is already established, and therefore we may assume $\tau > 1$. The orders of the cyclic direct summands of G_α are, possibly with the exception of the last factor $G_{\tau-1}$ if this exists, unbounded. Therefore we can represent G_α in the form

$$G_\alpha = G_\alpha^{(1)} + \cdots + G_\alpha^{(n)} + \cdots$$

such that each $G_\alpha^{(n)}$ is the direct sum of cyclic groups of unbounded orders $(\alpha < \tau - 1)$. If $G_{\tau-1}$ exists, then set

$$G_{\tau-1}^{(1)} = G_{\tau-1},\ G_{\tau-1}^{(2)} = 0, \ldots,\ G_{\tau-1}^{(n)} = 0, \ldots .$$

By ZIPPIN's theorem, for each n, there exists a countable reduced p-group $G^{(n)}$ with the Ulm sequence $G_0^{(n)}, \ldots, G_\alpha^{(n)}, \ldots (\alpha < \tau)$. Since the countable p-groups G and $G^{(1)} + \cdots + G^{(n)} + \cdots$ have the same Ulm sequence, from ULM's theorem we conclude that they are isomorphic, that is to say, G is not $\aleph_0$-indecomposable, in fact.

7. Now let T be an arbitrary proper $\mathfrak{m}$-indecomposable torsion group with $\mathfrak{m} > \aleph_0$, and T_i the p_i-component of T. The T_i are again $\mathfrak{m}$-indecomposable. We denote by B_i a basic subgroup of T_i and put

$$B_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{n}_{ik}} \mathfrak{C}(p_i^k). \tag{9}$$

As observed in **4**, we must have $\mathfrak{n}_{ik} < \mathfrak{m}$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{n}_{ik} \leqq \mathfrak{m}$. We proceed to show that here equality may hold but for a finite number of indices i. For suppose, on the contrary, that $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{n}_{ik} = \mathfrak{m}$ holds for $i = i_1, i_2, \ldots$. Then choose k_l such that $\mathfrak{n}_{i_l k_l} \geqq \mathfrak{n}_{i_1 l}$ $(l = 2, 3, \ldots)$; the hypotheses guarantee the existence of such cardinals $\mathfrak{n}_{i_l k_l}$. As we have

$$\mathfrak{m} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathfrak{n}_{i_1 l} \leqq \sum_{l=1}^{\infty} \mathfrak{n}_{i_l k_l} \leqq \mathfrak{m}, \quad \text{i. e.} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathfrak{n}_{i_l k_l} = \mathfrak{m},$$

we see that T has a direct summand of the form

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{n}_{i_l k_l}} \mathcal{C}(p_{i_l}^{k_l}) \tag{10}$$

which is of power $\mathfrak{m}$, in contradiction to the $\mathfrak{m}$-indecomposibility of T. Hence we conclude that in T, $|B_i| = \mathfrak{m}$ may hold but for a finite number of indices i.

Now consider the basic subgroups B_j with $|B_j| = \mathfrak{m}_j < \mathfrak{m}$. We state that for these B_j we must have $\sum_j |B_j| < \mathfrak{m}$. Suppose the contrary, i. e. $\sum \mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}$. Then for each j there is a k_j with $\mathfrak{m}_{k_j} > \mathfrak{m}_j$ and hence from $\sum_{l=1}^{\infty} \mathfrak{n}_{k_j l} = \mathfrak{m}_{k_j}$ it follows the existence of an l_j with $\mathfrak{n}_{k_j l_j} \geqq \mathfrak{m}_j$. Like (10), also this implies a contradiction to the $\mathfrak{m}$-indecomposibility of T.

Conversely, assume that T is a reduced torsion group whose p_i-components T_i are $\mathfrak{m}$-indecomposable and their basic subgroups B_i satisfy: $|B_i| = \mathfrak{m}$ but for a finite number of primes p_i and $\mathfrak{m}' = \sum |B_j| < \mathfrak{m}$ for the other primes p_j. Let

$$T = \sum_{\nu} S_{\nu}$$

be a decomposition of T where ν ranges over an index set of power $\mathfrak{m}$. If $S_{\nu i}$ denotes the p_i-component of S_{ν}, then we have also

$$T_i = \sum_{\nu} S_{\nu i},$$

and the $\mathfrak{m}$-indecomposibility of T_i implies that here the set of direct summands $S_{\nu i} \neq 0$ is of power $\mathfrak{p}_i$ strictly less than $\mathfrak{m}$. From $\mathfrak{p}_i < \mathfrak{m}$ and $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}$ we obtain that there are infinitely many cardinals $\mathfrak{p}_i$ with $\mathfrak{m}' < \mathfrak{p}_i$. Hypotheses ensure that there is but a finite number of primes p_i with

$|B_i| > \mathfrak{m}'$. Owing to the fact that a reduced p_i-group can have no direct decomposition in which the set of direct summands is of a greater power than its basic subgroup, we are led to a contradiction. This completes the proof of

THEOREM 3. *A torsion group T is $\mathfrak{m}$-indecomposable if and only if so are its p_i-components T_i and for the basic subgroups B_i of T_i we have: $|B_i| = \mathfrak{m}$ but for a finite number of them, while $\sum |B_j| < \mathfrak{m}$ for the others.*

Hence it follows easily that Theorem 1 may be extended to torsion groups.

(Received 31 January 1956)

Bibliography

[1] L. Fuchs, On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1958), pp. 267—288.
[2] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 3. Aufl. (Berlin und Leipzig, 1935).
[3] Л. Я. Куликов, Обобщенные примарные группы. I—II, Труды Моск. Мат. Общ., **1** (1952), pp. 247—326; **2** (1953), pp. 88—167.
[4] А. Г. Курош, Теория групп (Москва, 1953).
[5] T. Szele, On quasi-indecomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 109—114.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ ПРЯМОЙ СУММЫ МНОЖЕСТВА ДАННОЙ МОЩНОСТИ КОМПОНЕНТОВ

Л. Фукс (Будапешт)

(Резюме)

В качестве обобщения квази-неразложимых групп, введенных Селе, $\mathfrak{m}$-неразложимые группы определяются следующим образом ($\mathfrak{m}$—данное кардинальное число): группа G называется $\mathfrak{m}$-неразложимой, если в любом ее прямом разложении множество компонентов имеет мощность, меньшую чем $\mathfrak{m}$.

Ввиду того, что все группы мощностей $< \mathfrak{m}$ тривиально $\mathfrak{m}$-неразложимы, автор ограничивается случаем $\mathfrak{m}$-неразложимых групп, имеющих мощность большую или равную $\mathfrak{m}$. Эти группы и называются настоящими $\mathfrak{m}$-неразложимыми группами.

Теорема 1. Для того, чтобы существовала настоящая $\mathfrak{m}$-неразложимая абелева p-группа G, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

(I) существует кардинальное число $\mathfrak{n}$, для которого $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}^{\aleph_0}$;

(II) существует счетное множество $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ кардинальных чисел, для которы

$\mathfrak{n}_i < \mathfrak{m}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}$.

Мощность всякой $\mathfrak{m}$-неразложимой абелевой p-группы $\leq \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Если существуе настоящая такая группа, то существует и группа мощности $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

Теорема 2. Множество групп, имеющих это последнее свойство, имеет мощ ности $2^{\mathfrak{t}}$, где $\mathfrak{t} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$.

Теорема 3 дает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы периоди ческая абелева группа была $\mathfrak{m}$-неразложима.

ON THE NUMBER OF ZEROS OF SUCCESSIVE DERIVATIVES OF ANALYTIC FUNCTIONS

By

P. ERDŐS (Budapest), corresponding member of the Academy, and
A. RÉNYI (Budapest), member of the Academy

Introduction

Let $f(z)$ be regular in the circle $|z|<R$. Let us denote by $N_k(f(z), r)$ the number of zeros of the k-th derivative $f^{(k)}(z)$ of $f(z)$ in the closed circle $|z| \leqq r < R$. In the present paper we shall investigate the asymptotic properties of the sequence $N_k(f(z), r)$ $(k=1,2,\ldots)$.

In this direction several results have been obtained by G. PÓLYA (see [1]). One of the results of PÓLYA is the following: If $f(z)$ is an entire function of finite order $\lambda \geqq 1$, then for any $r>0$ we have

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\log N_k(f(z), r)}{\log k} \leqq \frac{\lambda-1}{\lambda}. \tag{1}$$

Let us denote by $\mathfrak{N}_k(f(z), I)$ the number of zeros of $f^{(k)}(z)$ in the real closed interval I. Further results of PÓLYA are as follows: If $f(z)$ is real on the real axis, and it is analytic in the closed interval I, we have

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{N}_k(f(z), I)}{k} < +\infty; \tag{2}$$

if $f(z)$ is an entire function, we have

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{N}_k(f(z), I)}{k} = 0; \tag{3}$$

finally, that if $f(z)$ is an entire function of exponential type, we have

$$\liminf_{k\to\infty} \mathfrak{N}_k(f(z), I) < +\infty. \tag{4}$$

Recently, M. A. YEVGRAFOV [2] proved the following general result:[1] *Let* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *be an entire function, the coefficients of which satisfy the inequality*

$$|a_n| \leqq \frac{M A^n}{q(1)\,q(2)\ldots q(n)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

[1] The authors are indebted to R. P. BOAS, Jr. who kindly called their attention to this result.

where $q(x)$ *is positive and increasing for* $x \geqq 1$, *further* $q'(x)$ *exists and* $\lim\limits_{x\to\infty} x\frac{q'(x)}{q(x)} = \varrho$ *where* $0 \leqq \varrho \leqq 1$. *Then we have*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), r)q(k)}{k} < +\infty. \tag{5}$$

In § 2 of the present paper we shall prove that the theorem of YEVGRAFOV is a consequence of the following simpler and more general theorem: *If* $\operatorname{Max}\limits_{|z|=r} |f(z)| = M(r) = e^{G(r)}$, *further if* $x = H(y)$ *denotes the inverse function of* $y = G(x)$, *we have*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), r)H(k)}{k} < +\infty. \tag{6}$$

We shall show also that (6) can be replaced by

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)H(k)}{k} \leqq e^2 \tag{7}$$

(Theorem 2'). As a matter of fact, we shall prove more, namely we obtain a theorem (Theorem 2) which is much stronger than YEVGRAFOV's theorem. Our theorem states that *if* $f(z)$ *is an entire function,* $M(r) = \operatorname{Max}\limits_{|z|=r} |f(z)|$ *and if we suppose only*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{g(r)} < 1 \tag{8}$$

where $g(r)$ *is an arbitrary continuous and monotonically increasing function for which* $\lim\limits_{r\to\infty} g(r) = +\infty$, *then we have*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)\,h(k)}{k} \leqq e^2 \tag{9}$$

where $x = h(y)$ *denotes the inverse function of* $y = g(x)$.

The results (1), (3) and (4) are included in YEVGRAFOV's theorem and in our Theorem 2, respectively. In § 1 we prove a theorem on functions analytic in a circle. In § 3 we prove some results on the sequence $r_k = |z_k|$ $(k = 1, 2, \ldots)$ where z_k denotes that root of $f^{(k)}(z)$ which is nearest to the origin; we generalize thereby some previous results, e. g. theorems of ÅLANDER [3] and ERWE [8].

§ 1. Functions regular in a circle

We begin by proving

THEOREM 1. *If $f(z)$ is regular in the circle $|z|<1$ and $0<r<1$, we have*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), r)}{k} \leqq K(r) \tag{10}$$

where $K=K(r)$ is the only positive root of the transcendental equation

$$r = \frac{K}{(1+K)^{1+\frac{1}{K}}}. \tag{11}$$

Theorem 1 can also be written in the following equivalent form:

THEOREM 1′. *If $f(z)$ is regular in the circle $|z| < \dfrac{(1+K)^{1+\frac{1}{K}}}{K}$ $(K>0)$, we have*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)}{k} \leqq K. \tag{12}$$

Let us mention the following special case of Theorem 1′: (12) is valid with $K=1$ if $f(z)$ is regular in the circle $|z|<4$.

Theorem 1′ implies that if $f(z)$ is an entire function, we have

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), r)}{k} = 0$$

for any $r>0$.

The proofs of the above theorems are based on the well-known theorem of JENSEN (see e. g. [4]): *If $g(z)$ is regular in a circle $|z|<R$, $g(0)\neq 0$ and $z_1, z_2, \ldots, z_n$ are the zeros of $g(z)$ in the circle $|z| \leqq \varrho < R$, then we have*

$$\log \frac{\varrho^n}{|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{g(\varrho e^{i\varphi})}{g(0)}\right| d\varphi.$$

If $N_0(g(z), r)$ denotes the number of zeros of $g(z)$ in the circle $|z| \leqq r < \varrho$, it follows from (12) that

$$N_0(g(z), r)\log\frac{\varrho}{r} \leqq \operatorname*{Max}_{|z|=\varrho} \log\left|\frac{g(z)}{g(0)}\right|. \tag{13}$$

We shall always use JENSEN's *theorem in the form* (13).

Some simple inequalities, which will be frequently used in this paper, are collected in the following

LEMMA. *If* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *is regular in* $|z|<R$ *and for some value of* $A \geqq 1$ *and* $B>0$ *we have*

$$|a_{k+j}| < \frac{A|a_k|}{B^j} \qquad (j=1,2,\ldots), \tag{14}$$

then for $|z|=\varrho<R$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k)}(0)}-1\right| \leqq A\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{B}\right)^{k+1}}-1\right) \tag{15}$$

and thus

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k)}(0)}\right| \leqq \frac{A}{\left(1-\frac{\varrho}{B}\right)^{k+1}}. \tag{16}$$

PROOF. (14) implies $|a_k|>0$ and

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k)}(0)}=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{k+j}}{a_k}\cdot\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+j)}{j!}z^j. \tag{17}$$

Taking into account that

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+j)}{j!}x^j$$

for $|x|<1$, (15) and from this (16) follows.

PROOF OF THEOREM 1′. Let us suppose that the radius of convergence of the power series $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is finite and equal to $R>1$. In this case we have $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$. Thus if $1<B<R<C$, we can find an infinity of values of k for which $\sqrt[k]{|a_k|}>\frac{1}{C}$ and $\sqrt[k+j]{|a_{k+j}|}\leqq\frac{1}{B}$ $(j=1,2,\ldots)$ and thus

$$|a_{k+j}| \leqq \frac{\left(\frac{C}{B}\right)^k |a_k|}{B^j} \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{18}$$

On the other hand, if $R=\infty$, then $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$ and thus we can find for any $B>0$ an infinity of values of k for which

$$|a_{k+j}| \leqq \frac{|a_k|}{B^j} \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{19}$$

As a matter of fact, if $\max_{n\geqq N}\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[k_N]{|a_{k_N}|}<\frac{1}{B}$ (which will be true for all sufficiently large values of N), then $k=k_N$ satisfies (19).

The inequalities (18) and (19) can be combined, and it follows that if $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ is regular in the circle $|z|<R$ $(R>1)$ (but may be regular also in a larger circle or in the whole plane), then for any $q>1$ and $B<R$ we can find an infinity of values of k such that

$$|a_{k+j}|\leqq\frac{q^k|a_k|}{B^j}\qquad (j=1,2,\ldots). \tag{20}$$

It follows from our Lemma that for $|z|=\varrho$ $(1<\varrho<R)$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k)}(0)}\right|\leqq\frac{q^k}{\left(1-\frac{\varrho}{B}\right)^{k+1}} \tag{21}$$

and thus, applying (13) with $r=1$ and $g(z)=f^{(k)}(z)$, we obtain

$$N_k(f(z),1)\leqq\frac{k\log q+(k+1)\log\left(1-\frac{\varrho}{B}\right)^{-1}}{\log\varrho} \tag{22}$$

which implies, as q may be chosen arbitrarily near to 1 and B to R, that

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{N_k(f(z),1)}{k}\leqq\frac{\log\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{-1}}{\log\varrho}\qquad\text{for}\qquad 1<\varrho<R. \tag{23}$$

Now let us choose the value of ϱ so as to minimize the right hand side of (23), that is, let ϱ be equal to $(1+K)^{\frac{1}{K}}$ where K is the positive root of the equation $R=\frac{(1+K)^{1+\frac{1}{K}}}{K}$ which has a unique solution for any $R>1$. Thus we have proved Theorem 1′, and therefore Theorem 1, too.

We do not know whether the bound in (10) is best possible or not. The estimation (10) is, however, best possible in the following sense: it is clear from the proof of Theorem 1′ that we considered only such values of k for which $f^{(k)}(0)\neq 0$; thus we have obtained slightly more than is expressed by (10), namely we proved

$$\liminf_{\substack{k\to\infty\\ f^{(k)}(0)\neq 0}}\frac{N_k(f(z),r)}{k}\leqq K(r). \tag{10′}$$

Now (10′) is a best possible estimation; this can be shown by considering the function

$$g(z, K) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{[(1+K)^n]} \tag{24}$$

where K is the only positive root of the equation (10) and $[x]$ denotes the integer part of x. Let us put $k_n = [(1+K)^n]$ and consider $g^{(k_n)}(z, K)$. We have clearly

$$\frac{g^{(k_n)}(z, K)}{g^{(k_n)}(0, K)} = P_n(z) + Q_n(z)$$

where

$$P_n(z) = 1 + \frac{(k_n+1)\cdots k_{n+1}}{(k_{n+1}-k_n)!} z^{k_{n+1}-k_n}$$

and

$$Q_n(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(k_n+1)\cdots k_{n+j}}{(k_{n+j}-k_n)!} z^{k_{n+j}-k_n}$$

The roots of the equation $P_n(z)=0$ are all lying on the circle

$$|z| = \varrho_n = \left(\frac{(k_{n+1}-k_n)!}{(k_n+1)\cdots k_{n+1}}\right)^{\frac{1}{k_{n+1}-k_n}}$$

and by Stirling's formula we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n = r = \frac{K}{(1+K)^{1+\frac{1}{K}}}.$$

If $\varepsilon > 0$, we have on the circle $|z| = r(1+\varepsilon)$

$$|P_n(z)| \geqq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k_{n+1}-k_n}$$

for $n \geqq n_0(\varepsilon)$. On the same circle we have

$$\left|\frac{(k_n+1)\cdots(k_{n+j})}{(k_{n+j}-k_n)!} z^{k_{n+j}-k_n}\right| \leqq \left[\frac{(1+K)^{\frac{j}{(1+K)^j-1}}}{1-\dfrac{1}{(1+K)^j}} \cdot \frac{K(1+2\varepsilon)}{(1+K)^{1+\frac{1}{K}}}\right]^{k_{n+j}-k_n} \qquad (j=2, 3, \ldots).$$

As $\dfrac{j}{(1+K)^j-1} \leqq \dfrac{1}{K}$, we have

$$|Q_n(z)| \leqq 4+2K \quad \text{for} \quad |z| = r(1+\varepsilon)$$

if $0 < \varepsilon < \frac{1}{4(K+1)}$. It follows by ROUCHÉ's theorem, that

(25) $$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{(1+k)^n}(g(z,k), r(1+\varepsilon))}{[(1+K)^n]} = K$$

if $0<\varepsilon<\frac{1}{4(K+1)}$.

Let us mention that $g^{(n)}(z, K)$ has more than cn zeros $(c>0)$ in $|z|<r_0$ for some $r_0>r$ and *every* $n=1, 2, \ldots$.

§ 2. Entire functions

As it has been mentioned in § 1, it follows from Theorem 1 that if $f(z)$ is an *entire* function, we have

(26) $$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)}{k} = 0.$$

(26) can not be improved, i. e. no relation of the form

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)}{k\varepsilon(k)} = 0$$

holds with $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 0$ $(\varepsilon(k)>0)$ for *all* entire functions. (26) can, however, be strengthened if we put some restriction on the rate of growth of $f(z)$. This is expressed by the following

THEOREM 2. *Let $g(r)$ denote an arbitrary function, monotonically increasing in $0<r<+\infty$, for which $\lim_{r\to+\infty} g(r) = +\infty$. Let $x=h(y)$ denote the inverse function of $y=g(x)$. Let us suppose that $f(z)$ is an entire function for which, putting $M(r) = \operatorname{Max}_{|z|=r} |f(z)|$, we have*

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log M(r)}{g(r)} < 1.$$

Then we have

(27) $$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)h(k)}{k} \leq e^2.$$

PROOF OF THEOREM 2. Let $\varepsilon>0$ denote an arbitrary small positive number. Let us denote by $\nu(r)$ $(0<r<+\infty)$ the central index of the series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

for $|z|=r$, i. e. suppose

$$|a_n| r^n \leqq |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

and thus

(28) $$|a_{\nu(r)+j}| \leqq \frac{|a_{\nu(r)}|}{r^j} \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

Let us consider such a value $r>0$ for which

(29) $$\log M(re) \leqq g(re).$$

By our supposition we can find arbitrarily large values of r satisfying (29).

Applying our Lemma with $A=1$, $B=r$, $k=\nu(r)$, $R>r$, $\varrho=e$, we obtain

$$\left|\frac{f^{\nu(r)}(z)}{f^{\nu(r)}(0)}\right| \leqq \frac{1}{\left(1-\frac{e}{r}\right)^{\nu(r)+1}} \quad \text{for} \quad |z|=e,$$

and thus by JENSEN's theorem

(30) $$N_{\nu(r)}(f(z), 1) \leqq (\nu(r)+1) \log \frac{1}{1-\frac{e}{r}} \leqq \frac{\nu(r)e\,(1+\varepsilon)}{r}$$

if $r \geqq r_0(\varepsilon)$

Now, taking into account that for every $n=1, 2, \ldots$ and every $R>0$ we have $|a_N| R^N \leqq M(R)$, and using (29), we have

$$|a_n|(re)^n \leqq M(re) < e^{g(re)}$$

and thus

$$|a_n| r^n \leqq e^{g(re)-n} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Therefore

$$|a_n| r^n \leqq 1 \quad \text{if} \quad n \geqq g(re).$$

But it is known,[2] that the absolute value of the maximal term on $|z|=r$ of the power series of an entire function is tending to $+\infty$ for $r \to \infty$; thus it follows that if r is a sufficiently large value, satisfying (29), we have $\nu(r) \leqq g(re)$, and thus $h(\nu(r)) \leqq re$. It follows from (30) that

(31). $$N_{\nu(r)}(f(z), 1) \leqq \frac{\nu(r)e^2(1+\varepsilon)}{h(\nu(r))}.$$

Thus, taking into account that $\nu(r) \to \infty$ for $r \to \infty$ and that $\varepsilon>0$ is arbitrary, (27) follows.

We can prove quite similarly also the following

[2] See e. g. [7], p. 2, Problem No. 9.

THEOREM 2'. *If $f(z)$ is an arbitrary entire function, $M(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}|f(z)|$, and $x=H(y)$ denotes the inverse function of $y=\log M(r)$, then we have*

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{N_k(f(z),1)H(k)}{k}\leqq e^2.$$

PROOF. Clearly, the condition $\liminf_{n\to\infty}\frac{\log M(r)}{G(r)}<1$ is needed in the proof of Theorem 2 only to ensure the existence of arbitrary large values of r for which (29) is valid. Now for $g(r)=G(r)$ (29) is valid for *all* values of r, thus Theorem 2' follows.

Theorem 2 is best possible in the following case: if $g(r)$ is a monotonically increasing and convex function for which $g(0)=0$, $g'(0)=0$, $g(1)=1$ and $\lim_{r\to\infty}\frac{g(r)}{r}=+\infty$, then there can be found an entire function $f(z)$ such that putting $M(r)=\operatorname{Max}_{|z|=r}|f(z)|$ we have $\liminf_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{g(r)}<+\infty$ and nevertheless

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{N_k(f(z),2)\,h(k)}{k}>0$$

where $x=h(y)$ is the inverse of $y=g(x)$. As a matter of fact, if the sequence n_k is defined by $n_0=0$, $n_1=1$ and by the recursion formula $n_{k+1}=\left[n_k\left(1+\frac{e}{h(n_k)}\right)\right]$, the function

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{\prod_{j=1}^{k}[h(n_j)]^{n_j-n_{j-1}}}$$

has all the properties required. This can be shown again by using ROUCHÉ's theorem as follows:

Let us consider first $f^{(n_k)}(z)$. We have clearly

$$\frac{f^{(n_k)}(z)}{f^{(n_k)}(0)}=P_k(z)+Q_k(z)$$

where

$$P_k(z)=1+\frac{(n_k+1)\dots n_{k+1}}{(n_{k+1}-n_k)!}\left(\frac{z}{h(n_{k+1})}\right)^{n_{k+1}-n_k}$$

and

$$Q_k(z)=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(n_k+1)\dots n_{k+j}}{(n_{k+j}-n_k)!}\,\frac{z^{n_{k+j}-n_k}}{\prod_{s=k+1}^{k+j}h(n_s)^{n_s-n_{s-1}}}\,.$$

Clearly, all roots of $P_k(z)=0$ are lying on the circle

$$|z|=\varrho_k=h(n_{k+1})\left[\frac{(n_{k+1}-n_k)!}{(n_k+1)\dots n_{k+1}}\right]^{\frac{1}{n_{k+1}-n_k}}$$

and we have for $k\to\infty$ $\varrho_k\sim\frac{h(n_{k+1})}{h(n_k)}$. But as $h'(y)=\frac{1}{g'(x)}$ is decreasing, we have

$$1\leqq\frac{h(n_{k+1})}{h(n_k)}\leqq 1+\frac{n_k h'(n_k)e}{h^2(n_k)}.$$

But

$$\frac{yh'(y)}{h(y)}=\frac{g(x)}{xg'(x)}$$

and as $g''(x)\geqq 0$ we have

$$\frac{g(x)}{xg'(x)}=\frac{\int\limits_0^x g''(t)(x-t)dt}{\int\limits_0^x g''(t)x\,dt}\leqq 1.$$

Thus it follows $\lim\limits_{k\to\infty}\varrho_k=1.$

Clearly, on the circle $|z|=1+\varepsilon$ we have

$$|P_k(z)|\geqq\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_{k+1}-n_k}\quad\text{for}\quad k\geqq k_0(\varepsilon).$$

On the other hand, on the same circle we have

$$\left|\frac{(n_k+1)\dots n_{k+j}}{(n_{k+j}-n_k)!}\cdot\frac{z^{n_{k+j}-n_k}}{\prod\limits_{s=k+1}^{k+j}h(n_s)^{n_s-n_{s-1}}}\right|\leqq\left[\frac{\left(1+\frac{n_{k+j}-n_k}{n_k}\right)^{\frac{n_k}{n_{k+j}-n_k}}\left(1+\frac{3\varepsilon}{2}\right)}{\left(1-\frac{n_k}{n_{k+2}}\right)h(n_{k+1})}\right]^{n_{k+j}-n_k}$$

for sufficiently large values of k. As $(1+x)^{\frac{1}{x}}\leqq e$ and $\left(1-\frac{n_k}{n_{k+2}}\right)h(n_{k+1})\to 2e$ for $k\to\infty$, it follows that for $|z|=1+\varepsilon$ $\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$

$$|Q_k(z)|\leqq\frac{2}{1-2\varepsilon}\quad\text{for}\quad k\geqq k_1(\varepsilon).$$

Thus $f^{(n_k)}(z)$ has $n_{k+1}-n_k$ roots in the circle $|z|=1+\varepsilon$ for $0<\varepsilon<1/2$ and $k\geqq k_1(\varepsilon)$.

Let us consider now a number N, $n_{k-1} < N < n_k$. If $N \leqq \dfrac{n_k}{1+\dfrac{e}{4h(n_k)}}$, then $f^{(N)}(z)$ has more than $\dfrac{N}{2h(N)}$ roots in the point $z=0$. On the other hand, if $N > \dfrac{n_k}{1+\dfrac{e}{4h(n_k)}}$, let us have $N \sim \dfrac{n_k}{1+\dfrac{\lambda e}{h(n_k)}}$ $\left(0<\lambda<\dfrac{1}{4}\right)$.

We have clearly

$$\frac{f^{(N)}(z)}{z^{n_k-N} n_k(n_k-1)\ldots(n_k-N+1)} = p_N(z) + q_N(z)$$

where

$$q_N(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n_{k+j}(n_{k+j}-1)\cdots(n_{k+j}-N+1)}{n_k(n_k-1)\cdots(n_k-N+1)} \cdot \frac{z^{n_{k+j}-n_k}}{\prod\limits_{s=k+1}^{k+j} h(n_s)^{n_s-n_{s-1}}}$$

and

$$p_N(z) = 1 + \frac{n_{k+1}(n_{k+1}-1)\cdots(n_{k+1}-N+1)}{n_k(n_k-1)\cdots(n_k-N+1)} \left(\frac{z}{h(n_{k+1})}\right)^{n_{k+1}-n_k}$$

The roots of $p_N(z)=0$ are all lying in the circle $|z| = R_N$ where $R_N \sim$ $\sim (1+\lambda)\left(1+\dfrac{1}{\lambda}\right)^{\lambda} \leqq \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{5}$ as $0<\lambda<\dfrac{1}{4}$. But on the circle $|z| = \left(1+\dfrac{\delta}{2}\right)\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{5}$ we have for any $\delta > 0$, if K is sufficiently large,

$$\left| \frac{n_{k+j}(n_{k+j}-1)\cdots(n_{k+j}-N+1)}{n_k(n_k-1)\cdots(n_k-N+1)} \cdot \frac{z^{n_{k+j}-n_k}}{\prod\limits_{s=k+1}^{k+j} h(n_s)^{n_s-n_{s-1}}} \right| \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{(1+2\delta)\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{5}}{2} \right)^{n_{k+j}-n_k} = \beta^{n_{k+j}-n_k} \qquad (j=2,3,\ldots)$$

where $\beta < 1$ if $0 < \delta < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{5\sqrt[4]{5}} - 1\right)$.

Thus it follows by ROUCHÉ's theorem that $f^{(N)}(z)$ has $n_{k+1}-n_k$ roots in the circle $|z| = \left(1+\dfrac{\delta}{2}\right)\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{5}$. As $n_{k+1}-n_k \geqq \dfrac{N}{2h(N)}$, combining the cases $n_{k-1} < N \leqq \dfrac{n_k}{1+\dfrac{e}{4h(n_k)}}$ and $n_k \geqq N > \dfrac{n_k}{1+\dfrac{e}{4h(n_k)}}$, it follows that $f^{(N)}(z)$ has

$\geqq \dfrac{N}{2h(N)}$ roots in the circle $|z| < 2$. Thus we have

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 2)h(k)}{k} \geqq \frac{1}{2},$$

what was to be proved.

It remains to show that $\liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{\log M(r)}{g(r)} < +\infty$. This can be done as follows: let us put $r_k = h(n_k)$ and

$$\mu(r_k) = \frac{r_k^{n_k}}{\prod\limits_{j=1}^{k} h(n_j)^{n_j - n_{j-1}}}.$$

First we show that

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log \mu(r_k)}{n_k} < +\infty.$$

This can be proved by starting from the evident formula

$$\frac{\log \mu(r_k)}{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{k} (n_j - n_{j-1}) \log \frac{h(n_k)}{h(n_j)}.$$

Let us denote by S_r $(r = 0, 1, \ldots)$ the set of those values of j for which

$$\frac{h(n_k)}{2^{r+1}} \leqq h(n_j) < \frac{h(n_k)}{2^r}.$$

Let l_r denote the greatest element of the set S_r. Then we have clearly

$$\frac{\log \mu(r_k)}{n_k} \leqq \frac{1}{n_k} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) n_{l_r}.$$

Now $n_{l_r} \leqq g\left(\dfrac{h(n_k)}{2^r}\right)$ and $g(x)$ is convex, therefore

$$n_{l_r} \leqq \frac{g(h(n_k))}{2^r} = \frac{n_k}{2^r}$$

and thus

$$\frac{\log \mu(r_k)}{n_k} \leqq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r+1}{2^r} = 4.$$

Now $\mu(r_k)$ is the maximal term of the series

$$M(r_k) = \sum_{S=1}^{\infty} \frac{r_k^{n_S}}{\prod\limits_{j=1}^{S} h(n_j)^{n_j - n_{j-1}}}$$

and it is easy to show that

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log M(r_k)}{\log\mu(r_k)}=1.$$

Taking into account that $n_k=g(r_k)$, we obtain

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{g(r)}\leqq 4.$$

By the same method it can be shown that $\liminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log M(r)}{g(r)}\leqq 1$, but for our purpose this is not necessary.

The theorem of YEVGRAFOV can be deduced from Theorem 2 as follows: Let us suppose that $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ is an entire function and

$$|a_n|\leqq\frac{MA^n}{q(1)q(2)\cdots q(n)}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

where $q(x)$ is positive and monotonically increasing for $x\geqq 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}q(x)=+\infty$ and $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xq'(x)}{q(x)}=\varrho$ where $0\leqq\varrho\leqq 1$; clearly it can be supposed that $q(1)>1$; let us denote by $x=\gamma(y)$ the inverse of $y=q(x)$, and let us for a given $r>0$ determine the integer N by

$$N=[\gamma(2Ar)],\quad\text{i. e.}\quad N\leqq\gamma(2Ar)<N+1.$$

Then

$$q(N)\leqq 2Ar\leqq q(N+1). \tag{32}$$

It follows that for $|z|=r$

$$|f(z)|\leqq M\frac{(Ar)^N}{q(1)q(2)\cdots q(N)}(S_1+S_2),$$

where

$$S_1=\frac{q(N)}{Ar}+\frac{q(N)q(N-1)}{(Ar)^2}+\cdots+\frac{q(N)q(N-1)\cdots q(2)}{(Ar)^{N-1}}$$

and

$$S_2=1+\frac{Ar}{q(N+1)}+\frac{(Ar)^2}{q(N+1)q(N+2)}+\cdots.$$

Clearly we have

$$|S_1|\leqq 2+2^2+\cdots+2^{N-1}\leqq 2^N\quad\text{and}\quad|S_2|\leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=2.$$

Thus it follows that

(33) $$M(r) \leqq 2M \exp\left[N \log 2Ar - \sum_{k=1}^{N} \log q(k)\right].$$

As $\log q(k)$ is positive and increasing,

$$\sum_{k=1}^{N} \log q(k) \geqq \int_1^N \log q(x)\,dx$$

and therefore, by (32),

$$\log M(r) \leqq \log 2M + N \log q(N+1) - \int_1^N \log q(x)\,dx.$$

According to our supposition $\log q(x)$ is of the form

$$\log q(x) = \varrho \log x + \int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt$$

where $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$; it follows that if $\varrho > 0$, $\log M(r) \leqq \varrho N + o(N)$, i. e. for an arbitrary $\varepsilon > 0$ we have

(34) $$\log M(r) \leqq \varrho\gamma(2Ar)(1+\varepsilon)$$

if r is sufficiently large, and thus if $g(r) = 2\varrho\cdot\gamma(2Ar)$ and $x = h(y)$ is the inverse of $y = g(x)$, we obtain by Theorem 2

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z),1)h(k)}{k} \leqq e^2.$$

As

$$h(k) = \frac{1}{2A} q\left(\frac{k}{2\varrho}\right)$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q\left(\dfrac{k}{2\varrho}\right)}{q(k)} = \left(\frac{1}{2\varrho}\right)^{\varrho},$$

it follows that

(35) $$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(2),1)q(k)}{k} \leqq 2Ae^2\left(\frac{1}{2\varrho}\right)^{\varrho}.$$

Thus we have proved YEVGRAFOV's theorem for $\varrho > 0$.

If $\varrho = 0$, we have $\log M(r) = o(\gamma(2Ar))$ and thus it follows in this case also that

(36) $$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(2),1)q(k)}{k} < +\infty.$$

Now we shall suppose that $f(z)$ is an entire function of order $\geqq 1$ for which, putting $M(r) = \underset{|z|=r}{\operatorname{Max}} |f(z)|$, further $\log M(r) = G(r)$, the limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d \log G(r)}{d \log r} = \alpha \geqq 1 \tag{37}$$

exists; we shall show that in this case, denoting by $x = H(y)$ the inverse function of $y = G(x)$, we have

$$\liminf \frac{N_k(f(z), 1) H(k)}{k} < +\infty, \tag{38}$$

and thus for entire functions of order $\geqq 1$ and satisfying the condition (37) the assertion of Theorem 2′ follows[3] from YEVGRAFOV's theorem. Substituting $r = H(n)$ in the inequality $|a_n| \leqq \frac{e^{G(r)}}{r^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, we obtain

$$|a_n| \leqq \frac{e^n}{(H(n))^n} \tag{39}$$

and thus

$$|a_n| \leqq \frac{e^n}{H(1) H(2) \cdots H(n)}. \tag{40}$$

Now let us suppose that $f(z)$ is such an entire function for which the finite or infinite limit (37) exists. As

$$\frac{y H'(y)}{H(y)} = \frac{1}{\left(\frac{d \log G(x)}{d \log x}\right)},$$

it follows from the existence of $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{d \log G(x)}{d \log x} = \alpha$ that $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y H'(y)}{H(y)} = \varrho = \frac{1}{\alpha}$ exists. As we have supposed that $G(r)$ is of order $\geqq 1$, it follows that $0 \leqq \varrho \leqq 1$.

Thus we have shown that YEVGRAFOV's theorem is equivalent to the special case of Theorem 2′ for entire functions satisfying (37). Thus Theorem 2′ is slightly stronger but, of course, Theorem 2 is essentially stronger than YEVGRAFOV's theorem.

§ 3. Remarks on the zero z_k of $f^{(k)}(z)$ which is nearest to the origin

It follows from our Theorem 2 that especially if

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} < A,$$

[3] Except the numerical estimation of the left hand side of (38).

we obtain[4]

$$\liminf_{k\to\infty} N_k(f(z), 1) < e^2 A.$$

This can be formulated as follows: If r_k denotes the absolute value of the zero z_k of $f^{(k)}(z)$ which is nearest to the origin, we have for an entire function for which $\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} < A$,

$$\limsup_{k\to\infty} r_k \geqq \frac{1}{Ae^2}\cdot$$

For entire functions of finite order $\lambda \geqq 1$, the behaviour of r_k has been investigated by ÅLANDER [3] who proved that

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\log \frac{1}{r_k}}{\log k} \leqq \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Now we shall prove a general theorem which includes this result of ÅLANDER as a special case.

THEOREM 3. *If $f(z)$ is an entire function, $M(r) = \operatorname{Max}_{|z|=r} |f(z)|$ and r_k denotes the absolute value of the zero z_k of $f^{(k)}(z)$ which is nearest to the origin $(k = 1, 2, \ldots)$, then denoting by $x = H(y)$ the inverse function of $y = \log M(x)$ we have*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{H(k)}{kr_k} \leqq \frac{e}{\log 2}\cdot \tag{41}$$

PROOF. Let us start from the inequality (38). This implies that for any $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{H(n)}{e^{1+\varepsilon}}\right)^n |a_n| = 0. \tag{42}$$

Thus we can find arbitrary large values of k for which

$$|a_{k+j}| \leqq \left(\frac{e^{1+\varepsilon}}{H(k)}\right)^j |a_k| \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{43}$$

[4] This implies that for $A < \frac{1}{e^2}$

$$\liminf_{k\to\infty} N_k(f(z), 1) < 1,$$

i. e. an infinity of derivatives of $f(z)$ have no zeros in the unit circle. It is known that if $f(z)$ is of exponential type and $\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} < A$, the same assertion holds for $A \leqq 0{,}7199$. (See [5])

It follows from inequality (15) that for such values of k for which (43) holds and for $|z| \leqq \varrho$ we have

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k)}(0)} - 1\right| \leqq \frac{1}{\left(1 - \frac{\varrho e^{1+\varepsilon}}{H(k)}\right)^{k+1}} - 1, \tag{44}$$

and thus $f^{(n)}(z) \neq 0$ for $|z| \leqq \varrho$ if

$$\left(1 - \frac{\varrho e^{1+\varepsilon}}{H(k)}\right)^{k+1} > \frac{1}{2},$$

i. e. for a sufficiently large k if

$$\varrho < \frac{H(k)\log 2}{k e^{1+2\varepsilon}}. \tag{45}$$

But (45) implies that

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{H(k)}{k r_k} \leqq \frac{e^{1+2\varepsilon}}{\log 2}. \tag{46}$$

As $\varepsilon > 0$ is arbitrary, Theorem 3 is proved.

Clearly, (41) implies

$$\limsup_{k\to\infty} k r_k = +\infty \tag{47}$$

for every entire function.

For functions, which are regular in a circle $|z| < R$, instead of (47) we can prove only

THEOREM 4. *If $f(z)$ is regular in the circle $|z| < R$ and is not a polynomial, further z_k is the root of $f^{(k)}(z)$ which is nearest to the origin, then putting $r_k = |z_k|$ we have*

$$\limsup_{k\to\infty} k r_k \geqq R \log 2. \tag{48}$$

PROOF. The proof is very similar to that of Theorem 3. If $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, we have $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{1}{R}$ and thus $\frac{R^n |a_n|}{(1+\varepsilon)^n} \to 0$ for any $\varepsilon > 0$. This implies that putting $\max_{n \geqq N} \frac{R^n |a_n|}{(1+\varepsilon)^n} = \frac{R^{k_N} |a_{k_N}|}{(1+\varepsilon)^{k_N}}$ we have for $k = k_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$

$$|a_{k+j}| \leqq \frac{|a_k|}{\left(\frac{R}{1+\varepsilon}\right)^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{49}$$

Thus by inequality (15) we have for $|z| \leqq \varrho$ and the mentioned values of k

(50) $$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k)}(0)} - 1\right| \leqq \frac{1}{\left(1 - \frac{\varrho(1+\varepsilon)}{R}\right)^{k+1}} - 1,$$

therefore $f^{(k)}(z) \neq 0$ for $|z| \leqq \varrho$ if

$$\left(1 - \frac{\varrho(1+\varepsilon)}{R}\right)^{k+1} > \frac{1}{2}$$

and thus if

(51) $$\varrho \leqq \frac{R \log 2}{(k+1)(1+2\varepsilon)}$$

for sufficiently large k.

The assertion of Theorem 4 follows immediately.

It should be mentioned that there exist functions $f(z)$ regular in the unit circle for which $\limsup_{k\to\infty} k r_k < +\infty$, for example if $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$, we have $\limsup_{k\to\infty} k r_k = \frac{\pi}{4}$. This example is due to ERWE [8].

It would be interesting to determine the greatest constant by which $\log 2$ can be replaced in (48).

The question may be raised: what can be said about the series

(52) $$\sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

It can be shown that the series (52) is divergent not only for every entire function but also for every function which is regular in some circle $|z| < R$ (except for polynomials) with $R > 0$. As a matter of fact, this follows easily from the results of W. GONTCHAROFF ([6], p. 34).

The following conjecture[5] of ERWE is a simple consequence of this remark: If $f(z)$ is regular in $|z| < R$, $|z_1| < R$, $|z_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|z_n|$ and $f^{(n)}(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then $f(z)$ is a polynomial. As a matter of fact, we have $r_n \leqq |z_n|$ and thus our suppositions imply $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < +\infty$. More can be said about the sequence r_k if the power series of $f(z)$ has Hadamard gaps. If $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^{n_k}$ where $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$ and $f(z)$ is an entire function, then

[5] ERWE proved that if $f(z)$ is regular in a circle around $z = 0$ containing the points z_n for which $|z_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|z_n|^2$, further $f^{(n)}(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then $f(z)$ is a polynomial.

$\limsup_{k\to\infty} r_k = +\infty$; if it is supposed only that $f(z)$ is regular in the circle $|z|<R$ and $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^{n_k}$ with $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$, then $\limsup_{k\to\infty} r_k \geqq \frac{R\left(1-\frac{1}{q}\right)}{2e}$.

It seems that the following conjecture is true: If $f(z)$ is an entire function, we have

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{r_1+r_2+\cdots+r_k}{\log k} = +\infty.$$

(*Received 30 May 1956*)

References

[1] G. Pólya, On the zeros of the derivatives of a function and its analytic character, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), pp. 178—191.

[2] М. А. Евграфов, Интерполяционная задача Абеля—Гончарова (Москва, 1954), pp. 1—126.

[3] M. Ålander, *Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation*, Diss. (Uppsala, 1914).

[4] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed. (Oxford, 1939), p. 125.

[5] S. S. Macintyre, On the bound for the Whittaker constant, *Journ. London Math. Soc.*, **22** (1947), pp. 305—311.

[6] W. Gontcharoff, Détermination des fonctions entières par interpolation, *Act. Sci. et Ind.*, **46** (1937).

[7] G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. 2 (Berlin, 1925).

[8] F. Erwe, Eine Interpolationsaufgabe, *Archiv der Math.*, **7** (1956), pp. 55—57.

О ЧИСЛЕ КОРНЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

П. Эрдёш и А. Реньи (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $f(z)$ регулярна в некоторой области плоскости комплексной переменной, содержащей внутри себя круг $|z| \leqq r$ $(r>0)$, и пусть $N_k(f(z), r)$ означает число корней $f^{(k)}(z)$ в круге $|z| \leqq r$ $(k=1, 2, \ldots)$. Обозначим через z_k наиболее близкий к точке $z=0$ корень от $f^{(k)}(z)$ и пусть $r_k = |z_k|$.

Работа изучает асимптотические свойства последовательностей $N_k(f(z), r)$ и r_k $(k=1,2,\ldots)$. В частности, в работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $f(z)$ регулярна в единичном круге и пусть $0<r<1$. Тогда

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), r)}{k} \leqq K(r),$$

где $K = K(r)$ есть единственный положительный корень трансцендентного уравнения

$$r = \frac{K}{(1+K)^{1+\frac{1}{K}}}.$$

Т е о р е м а 2. Пусть $g(r)$ есть любая непрерывная и монотонно возрастающая в интервале $(0 < r < \infty)$ функция и пусть $\lim g(r) = +\infty$. Обозначим через $x = h(y)$ функцию, обратную функции $y = f(x)$. Пусть $f(z)$ есть целая функция, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ и предположим, что

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{g(r)} < 1.$$

Тогда

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k(f(z), 1)\, h(k)}{k} \leqq e^2.$$

Т е о р е м а 3. Пусть $f(z)$ есть целая функция, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $x = H(y)$ обозначает функцию, обратную функции $y = \log M(x)$. Тогда

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{H(k)}{k r_k} \leqq \frac{e}{\log 2}.$$

Т е о р е м а 4. Если $f(z)$ регулярна в единичном круге и не многочлен, то

$$\limsup_{k\to\infty} k r_k \geqq \log 2.$$

Перечисленные теоремы являются обобщениями результатов П о й а [1], Е в г р а ф о в а [2] и А л а н д е р а [3]. Работа содержит также доказательство одной гипотезы Э р в е [8].

ON A CONJECTURE OF G. PÓLYA

By
CATHERINE RÉNYI (Budapest)
(*Presented by* P. TURÁN)

The purpose of the present paper is to prove the following conjecture of G. PÓLYA:

The power series expansions of a transcendental entire function $f(z)$ around two different points $z=a$ and $z=b$ can not have both Fabry gaps; in other words, if we denote by $Z_a(n)$ and $Z_b(n)$ the number of elements equal to 0 of the sequence $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ and $f(b), f'(b), \ldots, f^{(n)}(b)$, resp., then $\lim_{n\to\infty} \frac{Z_a(n)}{n}=1$ and $\lim_{n\to\infty} \frac{Z_b(n)}{n}=1$ can not both be valid if $a \neq b$.

It was P. ERDŐS who kindly called my attention to this conjecture of G. PÓLYA.[1]

The reason which makes this conjecture plausible is that the corresponding assertion for power series having a finite radius of convergence is a simple consequence of the well-known theorem of E. FABRY [1] according to which if the radius of convergence R of the power series

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n_k}$$

is finite and

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}=0,$$

then $f(z)$ can not be continued across $|z|=R$. Thus if we develop $f(z)$ into a power series around the point $z=a$ $(0<|a|<R)$, the radius of convergence of this series will be equal to $R-|a|$ and there will be exactly one singular point on the circle of convergence. Thus this latter series can not have Fabry gaps, because this would contradict the mentioned theorem of FABRY.

[1] Under the stronger supposition that the series $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n_k}$ has Hadamard gaps, i. e.

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1,$$

the conjecture of PÓLYA has been proved by ERDŐS (oral communication).

Clearly, it suffices to consider the case $a=0, b=1$, because if the conjecture of PÓLYA were not valid for some transcendental entire function $f(z)$ and for the points $z=a$ and $z=b$ $(a \neq b)$, it would not be valid for the transcendental entire function $g(z)=f[a+(b-a)z]$ and for the points $z=0$ and $z=1$, either.

If $a=0$ and $b=1$, it suffices further to consider only such entire functions which take on real values on the real axis. As a matter of fact, if for $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n)z^n$, where a_n and b_n are real, we would have

$$\frac{Z_0(n)}{n}\to 1, \qquad \frac{Z_1(n)}{n}\to 1,$$

the same relations would hold for the real entire functions

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{and} \quad g^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

and at least one of these is a transcendental entire function.

For the proof of the conjecture of PÓLYA we shall need the following theorem[2] of PÓLYA: If $f(z)$ is an entire function which is real for real z and $\mathfrak{N}_n$ denotes the number of roots of $f^{(n)}(z)$ which are lying in the closed interval $[0, 1]$, then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{N}_n}{n}=0. \tag{1}$$

We shall use also in the proof the following elementary

LEMMA. *Let $f(x)=f^{(0)}(x)$ denote a real function which is defined and possesses derivatives of all order in the closed interval $[a, b]$, and let N_n denote the number of different roots of $f^{(n)}(x)$ in the interval $[a, b]$, further let $Z_a(n)$ and $Z_b(n)$ denote the number of those terms of the sequence $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ and $f(b), f'(b), \ldots, f^{(n)}(b)$, respectively, which are equal to* 0 $(n=0, 1, 2, \ldots)$. *Then*

$$N_n \geqq Z_a(n)+Z_b(n)-n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

PROOF. We shall prove the Lemma by induction on n. (2) is evidently valid for $n=0$. Let us suppose that (2) is already proved for $n-1$, i. e. that we proved

$$N_{n-1} \geqq Z_a(n-1)+Z_b(n-1)-(n-1). \tag{3}$$

[2] PÓLYA published his theorem in [2] without proof. In a recent paper of P. ERDŐS and A. RÉNYI [3] it is proved that (1) holds for any transcendental entire functions also if $\mathfrak{N}_n$ denotes the number of roots of $f^{(n)}(z)$ in the unit circle.

Let us put

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 \text{ if } & f^{(n)}(a) \neq 0 \quad \text{and} \quad f^{(n)}(b) \neq 0, \\ 2 \text{ if } & f^{(n)}(a) = 0 \quad \text{and} \quad f^{(n)}(b) = 0, \\ 1 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

According to the theorem of Rolle $f^{(n)}(z)$ has in the interior of $[a, b]$ at least $N_{n-1}-1$ different zeros; therefore we have

$$N_n \geqq \varepsilon_n + N_{n-1} - 1. \tag{4}$$

By adding (3) and (4) and taking into account that $\varepsilon_n = Z_a(n) + Z_b(n) - Z_a(n-1) - Z_b(n-1)$, (2) follows.

Now the conjecture of PÓLYA follows immediately. As a matter of fact, if the power series $f(z)$ around $z=0$ and $z=1$ would both possess Fabry gaps, we would have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_0(n)+Z_1(n)}{n} = 2. \tag{5}$$

From (2) and (5) we would obtain

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} \geqq 1$$

and as $\mathfrak{N}_n \geqq N_n$,

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{N}_n}{n} \geqq 1,$$

which contradicts (1).

The same proof gives also the following sharper

THEOREM 1. *Let $f(z)$ be an entire function. Let $Z_a(n)$ and $Z_b(n)$ denote the number of vanishing coefficients among the first $n+1$ coefficients of the power series expansion of $f(z)$ around the points $z=a$ and $z=b$ $(a \neq b)$, respectively. Then we have*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{Z_a(n)+Z_b(n)}{n} \leqq 1. \tag{6}$$

It should be added that for

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{Z_a(n)+Z_b(n)}{n}$$

no better bound than the trivial bound 2 can be given. This can be shown e. g. by considering the entire function

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2-1)^{n!}}{(n!)!}$$

for which

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{Z_{-1}(n)+Z_{+1}(n)}{n}=2.$$

For the same function we have

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{Z_{-1}(n)+Z_{+1}(n)}{n}=1.$$

This shows that the number 1 can not be replaced by a smaller one on the righ hand side of (6). This can be seen, of course, also by considering a simple example, namely $f(z)=\sin z$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$.

These remarks show that the assertion of Theorem 1 can not be im proved. But if we formulate our problem as follows: what can be said abou the asymptotic behaviour of the sequence

$$Z_a(n)+Z_b(n)-n=\varDelta(n),$$

further questions present themselves.

In the memoir [2] of Pólya the following theorem can also be found

If $f(z)$ is an entire function of exponential type, which is real on the real axis, and $\mathfrak{N}_n$ denotes the number of roots of $f^{(n)}(z)$ in the closed real interval $[a, b]$, then $\underline{\lim}_{n\to\infty}\mathfrak{N}_n$ is finite. It follows from this theorem, when combined with our Lemma, that for entire function of exponential type $\underline{\lim}_{n\to\infty}\varDelta(n)$ is finite.

We do not know any transcendental entire function for whicl $\lim_{n\to\infty}\varDelta(n)=+\infty$.

A. Rényi asked the question, closely connected with the problem considered above, what is the least upper bound of $\varDelta(n)$ for polynomials o order n. The answer to this question is contained in the following

Theorem 2. *If $P_n(z)$ is a polynomial of order equal to n and $a\neq b$ then $\varDelta(n)\leqq 0$, i. e.*

$$Z_a(n)+Z_b(n)\leqq n. \tag{7}$$

Proof. Similarly as in the proof of the conjecture of Pólya it can b supposed that a and b are real, further that $P_n(z)$ has real coefficients. As a matter of fact, if a and $b\neq a$ are real and (7) would not be valid for a polynomial $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+ib_k)z^k$ (a_k and b_k are real, $a_v^2+b_n^2\neq 0$), then i would not be valid for the real polynomials $Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ and $Q_n^*(z)=$ $=\sum_{k=0}^{n}b_kz^k$, either, at least one of which is of order n.

Let us suppose now that (7) is false. Then for a real polynomial $P_n(z)$ we would have

$$Z_a(n)+Z_b(n)\geqq n+1.$$

Thus we obtain from our Lemma that

$$N_n\geqq 1$$

which is impossible as $P_n^{(n)}(z)$ is a constant different from zero. Thus Theorem 2 is proved.

$P_n(z)=(z-a)^k(z-b)^{n-k}$ $(0\leqq k\leqq n)$ shows that (7) is sharp.

I intend to consider the asymptotic behaviour of the sequence $\dfrac{Z_a(n)+Z_b(n)}{n}$ for power series with a finite radius of convergence in a forthcoming paper.

(Received 5 March 1956)

Remark. (10 April 1956.) The above paper was already ready for publication when Prof. P. TURÁN kindly called my attention to the paper of G. PÓLYA, Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung (*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **11** (1931), pp. 445—449) in which the Lemma and Theorem 2 of the above paper are contained in a somewhat different formulation.

References

[1] E. FABRY, Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers, *Acta Math.* **22** (1899), pp. 65—77.

[2] G. PÓLYA, On the zeros of the derivatives of a function and its analytic character, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), pp. 178—191.

[3] P. ERDŐS and A. RÉNYI, On the number of zeros of successive derivatives of analytic functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 125—144.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Г. ПОЙА

Катя Реньи (Будапешт)

(Резюме)

Г. Пойа (как сообщил автору П. Эрдёш) поставил следуюшую задачу: доказать, что если целая аналитическая функция $f(z)$ имеет около точки $z=0$ лакунарный (в смысле Фабри) ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{n_k}, \quad \text{т. е. если} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{k}{n_k}=0,$$

то ряд Тейлора от $f(z)$ около любой точки $a \neq 0$ не может быть лакунарным в том же смысле. Автору удалось доказать эту гипотезу в следующей усиленной форме:

Теорема 1. Пусть $f(z)$ целая аналитическая функция. Пусть $Z_a(n)$ и $Z_b(n)$ означает число исчезающих коэффициентов между $n+1$ первых коэффициентов рядов Тейлора от $f(z)$ около $z=a$ и $z=b$, соответственно, $(a \neq b)$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; \frac{Z_a(n)+Z_b(n)}{n} \leqq 1.$$

Доказательство основано на следующей теореме Г. Пойа: Пусть $\mathfrak{N}_n$ означает число нулей n-ой производной $f^{(n)}(z)$ от целой вещественной функции $f(z)$ в интервале $[0, 1]$; тогда имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; \frac{\mathfrak{N}_n}{n}=0.$$

Доказывается еще следующая

Теорема 2. Пусть $P_n(z)$ — многочлен степени n и $a \neq b$, тогда

$$Z_a(n)+Z_b(n) \leqq n.$$

LÖSUNG UND VERALLGEMEINERUNG EINES SCHURSCHEN IRREDUZIBILITÄTSPROBLEMS FÜR POLYNOME

Von

I. SERES (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

Dem Andenken von I. SCHUR *gewidmet*

Es bezeichne Γ den rationalen Zahlkörper. I. SCHUR [1] hat folgende Aufgabe gestellt: „Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voneinander verschiedene ganze Zahlen. Das Polynom

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$$

ist dann über Γ irreduzibel".

Diese Aufgabe wurde von W. FLÜGEL [2] gelöst. Er hat ferner gezeigt [2], daß über Γ bis auf einige Ausnahmen auch das Polynom

$$f_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1$$

irreduzibel ist.

I. SCHUR hat ferner als Aufgabe [3] den Nachweis der Irreduzibilität des Polynoms

$$f_2(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$

im Polynomenring $\Gamma[x]$ gestellt. Die Lösung ist in der Aufgabensammlung [4] zu finden.

A. BRAUER, R. BRAUER und H. HOPF [5] haben gezeigt, daß

$$f_4(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^4+1$$

und

$$f_8(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^8+1$$

unter obigen Voraussetzungen über die a_k in $\Gamma[x]$ irreduzibel sind. (S. auch [6].)

In der vorliegenden Arbeit beweise ich folgenden

SATZ 1. *Das Polynom*

$$F(x)=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)^{2^n}+1$$

ist in $\Gamma[x]$ irreduzibel, falls die a_k voneinander verschiedene ganze rationale Zahlen sind und $n \geqq 1$, $M \geqq 1$ gelten.

Den Teil $M \geqq 5$ hiervon verallgemeinere ich im folgenden

Satz 2. *Es seien* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *voneinander verschiedene ganze rationale Zahlen,* $f_m(x)$ *das* $m>2$*-te primitive Kreisteilungspolynom; ferner sei* $P(x)=$ $=\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$ *gesetzt. Dann ist das Polynom*

$$f_m(P(x))$$

für $M \geqq 5$ *irreduzibel. Bis auf einige Ausnahmen gilt dasselbe auch für* $M<5$.

Den Teil $M \geqq 6$ hiervon verallgemeinere ich noch zu:

Satz 3. *Es seien* $a_1, a_2, \ldots, a_M$ $(M \geqq 6)$ *voneinander verschiedene ganze rationale Zahlen,* $Q(x)$ *ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und mit dem Anfangskoeffizienten* 1, Grad $Q(x)<M$; *ferner bezeichne* $f_m(x)$ *das* m*-te primitive Kreisteilungspolynom* $(m>2)$ *und* $R(x)$ *das Polynom* $Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$. *Dann ist das Polynom*

$$f_m(R(x))$$

in $\Gamma[x]$ *irreduzibel.*

In anderer Form (s. unten) lautet Satz 3 so:

Satz 4. *Das Polynom*

$$\psi(x)=Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)-\xi \qquad \left(\xi=e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$$

ist in $\Gamma(\xi)[x]$ *irreduzibel, falls* $Q(x), a_1, \ldots, a_M$, M *und* m *den Voraussetzungen vom Satz 3 genügen.*

Zum Beweis brauchen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei* $f_m(x)$ *das* m*-te primitive Kreisteilungspolynom mit rationalen Koeffizienten. Das Polynom* $\Phi_m(x)=f_m(R(x))$ *ist dann und nur dann irreduzibel (über* Γ*), wenn* $\psi(x)=R(x)-\xi$ *über* $\Gamma(\xi)$ *irreduzibel ist.*

Dies ist nämlich ein Spezialfall eines Satzes von Capelli (vgl. N. Tschebotaröw und H. Schwerdtfeger [8], S. 288).

Wir werden im folgenden annehmen, daß das Polynom

$$\psi(x)=Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)-\xi$$

über $\Gamma(\xi)$ zerlegbar ist; es gilt also

$$\psi(x)=\tau(x)\cdot\omega(x)$$

mit nichtkonstanten Polynomen $\tau(x)$, $\omega(x)$ in $\Gamma(\xi)[x]$, deren Anfangskoeffizienten gleich Eins sind, weshalb alle Koeffizienten dieser Polynome ganz sind. Die $\tau(a_k)$ $(k=1,\ldots,M)$ sind ganze Zahlen aus $\Gamma(\xi)$, da die a_k ganz rational sind.

Wegen

$$\tau(a_k) \mid \xi$$

sind die $\tau(a_k)$ Einheiten von $\Gamma(\xi)$.

HILFSSATZ 2. *Die Koeffizienten des Polynoms $\tau(x)$ seien ganze Zahlen des Kreisteilungskörpers $\Gamma(\xi)$. Sind a_k und a_l ganz rational und sind $\tau(a_k)$ und $\tau(a_l)$ Einheiten, gilt ferner $|a_k - a_l| > 2$, so ist $\tau(a_k)\tau^{-1}(a_l)$ reell.*

BEWEIS. Nach einem Satz von Kronecker [7] läßt sich

$$\tau(a_k) = \eta_k \varepsilon_k, \qquad \tau(a_l) = \eta_l \varepsilon_l$$

setzen, wobei η_k, η_l (komplexe)* Einheitswurzeln und ε_k, ε_l reelle Einheiten (in $\Gamma(\xi)$) sind. Es folgt $a_k - a_l \mid \eta_k\varepsilon_k - \eta_l\varepsilon_l$, d. h.

$$a_k - a_l \mid \eta_k \eta_l^{-1} - \varepsilon_l \varepsilon_k^{-1}.$$

Nach Übergehen zu den komplexen Konjugierten folgt

$$a_k - a_l \mid \eta_k^{-1} \eta_l - \varepsilon_l \varepsilon_k^{-1}.$$

Nach Subtraktion entsteht

$$a_k - a_l \mid \eta_k \eta_l^{-1} - \eta_k^{-1} \eta_l,$$

d. h.

$$a_k - a_l \mid (\eta_k \eta_l^{-1})^2 - 1.$$

Ist die rechte Seite $\neq 0$, so ist ihr absoluter Betrag $\leqq 2$. Dasselbe gilt für alle Konjugierten, wogegen für die linke Seite $|a_k - a_l| > 2$ gilt. Durch Normbildung (über Γ) entsteht hieraus ein Widerspruch. Also gilt

$$(\eta_k \eta_l^{-1})^2 - 1 = 0,$$

$$\eta_k = \pm \eta_l.$$

Das beweist Hilfssatz 2.

HILFSSATZ 3. *Es seien $a_1 < a_2 < \cdots < a_M$ ganze rationale Zahlen, $M \geqq 6$ und $\tau(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus $\Gamma(\xi)$. Sind $\tau(a_k)$ für $k = 1, \ldots, M$ Einheiten aus $\Gamma(\xi)$, so sind ihre Verhältnisse lauter reelle Zahlen.*

BEWEIS. Es gelten die Relationen

$$2 < a_4 - a_1,\ a_5 - a_1, \ldots, a_M - a_1$$

und

$$2 < a_M - a_3,\ a_M - a_2.$$

Hieraus und aus Hilfssatz 2 folgt Hilfssatz 3.

Mittels dieser Hilfssätze lassen sich die Sätze 1, 2, 3 beweisen.

Zuerst *beweisen wir Satz 3.* Hierzu nehmen wir an, daß $\Phi_m(x)$ über dem Körper der rationalen Zahlen zerlegbar ist:

$$\Phi_m(x) = G(x) \cdot H(x),$$

wobei $G(x)$ und $H(x)$ den Anfangskoeffizienten 1 haben.

Das Polynom

$$\psi(x) = Q(x) \prod_{k=1}^{M} (x - a_k) - \xi$$

ist gemäß Hilfssatz 1 in $\Gamma(\xi)[x]$ zerlegbar. Man zerlege es in Primfaktoren:

$$\psi(x) = \tau_1(x) \ldots \tau_r(x),$$

so daß die Anfangskoeffizienten aller Faktoren gleich 1 sind.

Der Grad s einer der Polynome $\tau_1(x), \ldots, \tau_r(x)$ ist nicht größer als

$$\frac{M + \text{Grad}\, Q(x)}{2} < M.$$

Wir dürfen annehmen, daß

$$s = \text{Grad}\, \tau_1(x) < M$$

gilt. Zunächst sei $M \geqq 6$. Die Einheiten

$$\tau_1(a_k) \qquad (k = 1, \ldots, M)$$

sind dann wegen Hilfssatz 3 von der Form

$$\tau_1(a_k) = \eta \varepsilon_k \qquad (k = 1, \ldots, M),$$

wobei η eine komplexe Zahl ist und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_M$ reelle Zahlen sind.

Durch Interpolation (an den Stellen $a_1, \ldots, a_{s+1}$) ergibt sich hieraus

$$\tau_1(x) = \eta \cdot L(x)$$

mit einem reellen Polynom $L(x)$. Anderseits gilt wegen $\tau_1(x) \mid \psi(x)$ auch $L(x) \mid \psi(x)$. Da aber das konstante Glied von $\psi(x)$ nichtreell und die übrigen Koeffizienten reell sind, so ist dies ein Widerspruch, der nur durch die Annahme der Irreduzibilität von $\Phi_m(x)$ über Γ aufgehoben werden kann.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Aus Satz 3 folgt Satz 2 für $M \geqq 6$ (als Spezialfall $Q(x) = 1$). Der Beweis läßt sich auch für $M = 5$ retten, da dann einerseits Grad $\tau_1(x) \leqq 2$ angenommen werden kann, anderseits

$$2 < a_4 - a_1, \; a_5 - a_1$$

gelten, weshalb jetzt a_1, a_4, a_5 (wegen Hilfssatz 2) drei passende Interpolationsstellen sind.

Ebenso leicht sieht man ein, daß im Satz 2 für $M = 4$ und $M = 3$ nur dann wirkliche Ausnahmefälle entstehen können, wenn $a_k = a_1 + k - 1$ $(k = 1, \ldots, M)$ gelten, ferner $M = 2$ nur dann auszunehmen ist, wenn $a_2 = a_1 + 1$ oder $a_2 = a_1 + 2$ bestehen.

Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir noch den folgenden

HILFSSATZ 4. *Es seien* $a_1, \ldots, a_M$ *ganze rationale Zahlen. Ist entweder das Polynom*

$$K(x) = \prod_{k=1}^{M} (x - a_k) + 1$$

mod 2 *irreduzibel oder ist es* mod 2 *einer Potenz eines* mod 2 *irreduziblen Polynoms kongruent, so ist*

$$F(x) = \prod_{k=1}^{M} (x - a_k)^{2^n} + 1$$

über Γ *irreduzibel.*

BEWEIS. Nehmen wir gegen die Behauptung an, daß $F(x)$ über Γ zerlegbar ist:

$$F(x) = G(x) \cdot H(x).$$

Anderseits folgt mit wiederholtem Quadrieren

$$F(x) \equiv K^{2^n}(x) \pmod 2.$$

Nach der Annahme ist

(1) $$K(x) = \prod_{k=1}^{M} (x - a_k) + 1 \equiv \psi^r(x) \pmod 2 \qquad (r \geqq 1),$$

wo $\psi(x)$ ein mod 2 irreduzibles Polynom ist. Hiernach gilt

$$F(x) \equiv G(x) \cdot H(x) \equiv \psi^{2^n r}(x) \pmod 2.$$

Dies ist wegen Grad $G(x) > 0$, Grad $H(x) > 0$ nur dann möglich, wenn

$$G(x) \equiv \psi^{\alpha}(x) \pmod 2 \qquad (\alpha > 0),$$
$$H(x) \equiv \psi^{\beta}(x) \pmod 2 \qquad (\beta > 0).$$

Hiernach bestehen

$$\left.\begin{aligned} G(x) &= \psi^{\alpha}(x) + 2A(x), \\ H(x) &= \psi^{\beta}(x) + 2B(x) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha + \beta = 2^n r),$$

wobei $A(x)$, $B(x)$ Polynome über Γ sind. Man betrachte das Produkt $G(x) \cdot H(x) \pmod 4$.

Es gilt

(2) $$F(x) \equiv G(x) \cdot H(x) \equiv \psi^{\alpha+\beta}(x) + 2\psi^{\beta}(x) A(x) + 2\psi^{\alpha}(x) B(x) \pmod 4.$$

Es besteht wegen (1)

$$\prod_{k=1}^{M} (x - a_k) = \psi^r(x) - 1 + 2K_1(x),$$

wobei $K_1(x)$ ein Polynom über Γ ist. Aus der Definition von $F(x)$ ergibt sich

(3) $$\begin{aligned} F(x) &\equiv (\psi^r(x) - 1 - 2K_1(x))^{2^n} + 1 \equiv \\ &\equiv \psi^{r 2^n}(x) + 2\psi^{r 2^{n-1}}(x) + 2 \pmod 4. \end{aligned}$$

Aus den Kongruenzen (2) und (3) erhält man

$$\psi^{\beta}(x)\,A(x)+\psi^{\alpha}(x)\,B(x)-\psi^{r2^{n-1}}(x)\equiv 1 \pmod 2.$$

Dies ist aber unmöglich, da die rechte Seite mod 2 durch das Polynom $\psi(x)$ teilbar, die linke Seite dagegen nicht teilbar ist. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Endlich *beweisen wir Satz 1*. Dieser Satz folgt für $M \geqq 5$ aus Satz 2 (als Spezialfall $m=2^{n+1}$). Ferner ist Fall $M=1$ trivial. Wir haben nur noch diejenigen Fälle (für $M=2, 3, 4$) zu betrachten die im Satz 2 als Ausnahmefälle übrig geblieben sind.

Ist $M=4$ und $a_k=a_1+k-1$ $(k=1,2,3,4)$, so geht (1) in

$$K(x)\equiv x^2(x+1)^2+1\equiv(x^2+x+1)^2 \pmod 2$$

über. Dabei ist das Polynom $\psi(x)=x^2+x+1$ mod 2 irreduzibel, weshalb Hilfssatz 4 anwendbar ist.

Ist $M=3$ und $a_k=a_1+k-1$ $(k=1,2,3)$, so gilt

$$K(x)\equiv(x-a_1)^2\,(x-a_1-1)+1 \pmod 2,$$

weshalb jetzt selbst $K(x)$ mod 2 irreduzibel ist.

Ist $M=2$ und $|a_1-a_2|\leqq 2$, so ist entweder $a_1\equiv a_2 \pmod 2$ und

$$K(x)\equiv(x-a_1)^2+1\equiv(x-a_1-1)^2 \pmod 2$$

oder $a_1\equiv a_2+1 \pmod 2$ und

$$K(x)\equiv x^2+x+1 \pmod 2.$$

Hieraus ist die Richtigkeit vom Satz 1 in allen restlichen Fällen zu entnehmen.

(Eingegangen am 30. November 1955.)

Literaturverzeichnis

[1] I. SCHUR, Aufgabe 226, *Archiv der Mathematik und Physik*, **13** (1908), S. 367.

[2] W. FLÜGEL, Lösung der Aufgabe 226, *Archiv der Mathematik und Physik*, **15** (1909), S. 271—272.

[3] I. SCHUR, Aufgabe 275, *Archiv der Mathematik und Physik*, **15** (1909), S. 259.

[4] G. PÓLYA und G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. II* (Berlin, 1925), S. 137, 347—350.

[5] A. BRAUER, R. BRAUER und H. HOPF, Über Irreduzibilität einiger speziellen Klassen von Polynomen, *Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver.*, **35** (1926), S. 99—112.

[6] A. BRAUER und R. BRAUER, Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya, *Mathematische Zeitschrift*, **40** (1936), S. 242—265.

[7] L. KRONECKER, *Über komplexe Einheiten*, Werke I, S. 109—118.

[8] N. TSCHEBOTARÖW und H. SCHWERDTFEGER, *Grundzüge der Galoischen Theorie* (Groningen—Djakarta, 1950).

РЕШЕНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ И. ШУРА О ПРИВОДИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

И. Шереш (Будапешт)

(Резюме)

В настоящей работе автор доказывает, что если заданы различные целые числа a_k $(k=1,\ldots,M;\, M \geqq 1)$, то

1. Многочлен $\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)^{2^n}+1$ не приводим над полем рациональных чисел.

Это была одна из проблем И. Шура, поставленная в 1908-ом году. В работе доказывается два обобщения этой теоремы:

2. Если $f_m(x)$ есть m-ый $(m>2)$ примитивный многочлен деления круга и $P(x)= \prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$, то, исключая некоторые особые случаи, многочлен $f_m[P(x)]$ не приводим над полем рациональных чисел.

3. Пусть $Q(x)$ есть многочлен с целочисленными коэффициентами, причем коэффициент при старшем члене равен единице и $\operatorname{Grad} Q(x) < M$ $(M \geqq 5)$ и $R(x)=Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)$. Тогда многочлен $\Phi_m(x)=f_m[R(x)]$ не приводим над полем рациональных чисел.

Все это удалось доказать с помощью глубоких теорем Л. Кронекера о единицах поля корней из единицы.

ZUM BORSUKSCHEN ZERTEILUNGSPROBLEM

Von

A. HEPPES und P. RÉVÉSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Im Jahre 1933 hatte K. BORSUK [1] die folgende Vermutung ausgesprochen:

„Jede Punktmenge M des n-dimensionalen euklidischen Raumes vom Durchmesser $D(M)$ ist in $n+1$ Teilmengen mit kleineren Durchmessern zerlegbar." (Unter dem Durchmesser $D(M)$ einer Punktmenge M verstehen wir die obere Grenze der Entfernungen von zu M gehörenden Punktpaaren.)

Es ist leicht einzusehen, daß die Verminderung der Zahl $n+1$ in der Vermutung nicht möglich ist. Das zeigt das Beispiel der Eckpunktsmenge eines n-dimensionalen regulären Simplexes von der Kantenlänge $D(M)$.

H. HADWIGER [2] hat in Verbindung mit dieser Vermutung den folgenden Satz bewiesen:

„Ein n-dimensionaler $(n>1)$ Eikörper K vom Durchmesser $D(K)=1$ läßt sich in $n+1$ Teile M_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ so zerstückeln, daß für die Durchmesser der Teile

$$D(M_i) \leqq 1-2r\left\{1-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right\}$$

gilt, wobei r den inneren Rollradius der Randfläche von K bezeichnet." (Eikörper wird eine abgeschlossene, beschränkte konvexe Menge mit regulärem Rand genannt, und der innere Rollradius einer Eifläche ist der Radius der größten Kugel, die ungehindert im Inneren der Eifläche rollen kann.)

Vor einiger Zeit hat H. G. EGGLESTON [3] die Vermutung für den Fall $n=3$ bewiesen.

Im folgenden geben wir einen einfacheren Beweis für einen speziellen Fall:

SATZ. *Jede endliche Punktmenge M des dreidimensionalen Raumes vom Durchmesser $D(M)$ ist in vier Teilmengen mit kleineren Durchmessern zerlegbar.*

(Wir werden den Satz im Fall $D(M)=1$ beweisen, was natürlich keine Beschränkung bedeutet.)

Definition. Wir nennen Kugelpolyeder den Durchschnitt endlich vieler Einheitskugeln („Faktorkugeln"), wenn dieser Durchschnitt durch wenigstens drei Kugeloberflächen begrenzt ist. Wir verstehen unter den Seitenflächen des Kugelpolyeders jene zusammenhängenden Flächenteile je einer Faktorkugel, die das Kugelpolyeder begrenzen. Die Kreisbogen, die die Seitenflächen begrenzen, nennen wir Kanten, und die Schnittpunkte der Kanten Ecken. Eine Kante kann natürlich kein Hauptkreisbogen sein.

Hilfssatz 1. *Ein Kugelpolyeder hat höchstens so viel Seitenflächen, aus wieviel Kugeln ihn als Durchschnitt erzeugen.*

Bemerkung. Es ist leicht einzusehen, daß eine Vollkugel vom Radius 1 samt zwei Punkten eines Einheitskreises auch den durch diese Punkte bestimmten kürzeren Bogen dieses Kreises enthält.

Beweis des Hilfssatzes 1. Wir werden beweisen, daß die Oberfläche einer Faktorkugel höchstens eine Seitenfläche des Kugelpolyeders enthält. Gehört ein Punkt zu allen Faktorkugeln und ist er auf der Oberfläche einer Faktorkugel, dann ist dieser Punkt ein Randpunkt des Kugelpolyeders. Mit Hinsicht auf die obige Bemerkung erhalten wir folgendes: Gehören zwei Punkte der Oberfläche einer Faktorkugel zum Rand des Kugelpolyeders, dann enthält der Rand auch den die zwei Punkte verbindenden kürzeren Hauptkreisbogen derselben Faktorkugel. Daraus folgt die Richtigkeit des Hilfssatzes, da zwei Randpunkte einer Faktorkugel, die auf der Oberfläche des Kugelpolyeders sind, zu derselben Seitenfläche gehören müssen.

Hilfssatz 2. *Im dreidimensionalen Raume gibt es kein solches endliches Punktsystem S vom Durchmesser $D(S)=1$, welches die folgende Eigenschaft besitzt: zu jedem Punkte P von S sind vier Punkte des Systems zu finden, welche von P in Einheitsentfernung sind.*

Beweis des Hilfssatzes 2. Nehmen wir an, daß es ein System S mit der obigen Eigenschaft gibt. Wir bezeichnen seine Punkte mit P_i $(i=1,\dots,r)$. Wir schreiben um alle Punkte P_i von S je eine Einheitskugel K_i, und betrachten das Kugelpolyeder K, welches als Durchschnitt der Kugeln K_i entsteht.

Das Kugelpolyeder K enthält alle Punkte des Systems S, weil $D(S)=1$ ist. Andererseits sind alle Punkte von S auf der Oberfläche von K, da ein jeder Punkt P_i am Rande mindestens einer Kugel K_i ist.

Wir betrachten eine beliebige Kugel K_i. Der Rand von K_i enthält laut Voraussetzung mindestens vier Punkte von S. Bei dem Beweis des Hilfssatzes 1 haben wir gesehen, daß wenn zwei Punkte von K_i am Rande von K liegen, dann auch ein sie verbindender Hauptkreisbogen von K_i auf der Oberfläche

von K ist. Dieser Hauptkreisbogen kann keine Kante von K sein, weil die Kanten Bogen von kleinerem Radius sind. Folglich enthält der Rand von K mindestens eine Seitenfläche von K. Aber mit der Anwendung des Hilfssatzes 1 gewinnen wir, daß auf der Oberfläche der Kugel K_i genau eine Seitenfläche F_i des Kugelpolyders K liegt.

Seien $P_{i_1}, \ldots, P_{i_s}$ die Punkte von S, die auf F_i liegen ($s \geqq 4$). Die Flächen $F_{i_1}, \ldots, F_{i_s}$ enthalten den Punkt P_i, woraus folgt, daß P_i eine Ecke ist, und im Punkte P_i mindestens vier Kanten zusammentreffen. Dieser Gedankengang gilt natürlich für $i = 1, \ldots, r$.

Es ist möglich, daß K außer $P_1, \ldots, P_r$ noch weitere Ecken hat, in jeder Ecke müssen aber mindestens drei Kanten zusammentreffen.

Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein: f bezeichne die Anzahl der Seitenflächen, k der Kanten, und e der Ecken von K. Die obigen Resultate ergeben also:

$$f = r, \quad e = r + d \quad (d \geqq 0), \quad k \geqq \frac{4r + 3d}{2}.$$

Da der Eulersche Polyedersatz für unser Kugelpolyeder gültig ist, also $f + e = k + 2$ besteht, ergibt sich

$$r + r + d = k + 2 \geqq \frac{4r + 3d}{2} + 2,$$

woraus $0 \geqq d + 4$ folgt, was wegen $d \geqq 0$ unmöglich ist. Damit haben wir den Hilfssatz 2 bewiesen.

Den Beweis unseres Satzes führen wir mit vollständiger Induktion bezüglich n, wo n die Anzahl der Punkte bezeichnet. Die Richtigkeit des Satzes ist im Fall $n \leqq 4$ trivial. Es sei $n > 4$, und wir nehmen an, daß der Satz für Punktmengen von $n - 1$ Punkten richtig ist.

Es sei M eine aus n Punkten bestehende Punktmenge mit $D(M) = 1$. Mit Rücksicht auf Hilfssatz 2 können wir den Punkt P aus der Menge M so auswählen, daß die um P geschriebene Einheitskugel K_P höchstens drei Punkte der Menge am Rande enthält.

Die Menge M', die aus M durch Weglassen des Punktes P entsteht, ist wegen unserer Annahme in vier Teilmengen mit kleineren Durchmessern zerlegbar. Da die Punkte der Menge M' mit Ausnahme von höchstens drei Punkten im Inneren der Kugel K_P sind, gibt es mindestens eine unter den eben konstruierten Teilmengen, die völlig im Inneren von K_P liegt. Ergänzen wir diese Teilmenge mit P, so erhalten wir eine Zerlegung von M in vier Teilmengen, die alle einen kleineren Durchmesser haben als 1. Damit haben wir den Satz bewiesen.

Als Folge unseres Satzes läßt sich die Richtigkeit der Borsukschen Vermutung für ein beliebiges Polyeder P beweisen. Sei die Menge jener Punkte

von P, deren Entfernung von einer gewissen Ecke die Entfernungen von den anderen Ecken nicht übertrifft, eine Zelle genannt. Erstens verteilen wir die Ecken unserem Satze entsprechend in vier Teilmengen. Betrachten wir nun anstatt der Ecken die entsprechenden Zellen, so erhalten wir eine der Vermutung entsprechende Zerstückelung des Polyeders P. Unter den Punkten eines Polyeders P vom Durchmesser $D(P)$ kann nämlich die Entfernung $D(P)$ offenbar nur zwischen zwei Eckpunkten auftreten.

(Eingegangen am 27. Januar 1956.)

Literaturverzeichnis

[1] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, **20** (1933), S. 177—190.

[2] H. Hadwiger, Über die Zerstückung eines Eikörpers, *Math. Zeitschrift*, **51** (1949), S. 161—165.

[3] H. G. Eggleston, Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter, *Journal London Math. Soc.*, **30** (1955), S. 11—24.

К ПРОБЛЕМЕ БОРСУКА О РАЗБИЕНИИ

А. Хеппеш и П. Ревес (Будапешт)

(Резюме)

К. Борсук [1] в 1933 году высказал следуюшую гипотезу:

Всякое точечное множество n-мерного пространства, диаметр которого равен единице, может быть разбито на $n+1$ подмножество так, что диаметр каждого меньше единицы.

Авт ры доказывают эту гипотезу для конечных трехмерных множеств и полиэдров. Верность гипотезы в случае любых трехмерных множеств была доказана Эглстоном [3] в 1955 году, но приведенное здесь доказательс тво для указанннго выше специального случая значительно проще.

TRIANGLES INSCRITS ET CIRCONSCRITS À UNE COURBE CONVEXE SPHÉRIQUE

Par

L. FEJES TÓTH (Budapest)

(*Présenté par* G. HAJÓS)

Nous considérons un domaine convexe D, un triangle contenant D et un autre compris dans D. Ces triangles forment la frontière d'un *anneau* qui renferme la courbe délimitant D. Nous appelerons la différence des aires et la différence des périmètres des triangles l'*aire* et le *périmètre* de l'anneau.

Nous allons démontrer les théorèmes[1] suivants, qui impliquent les constantes $c = 6\left(\arccos \sqrt{\frac{\sqrt{21}+1}{10}} - \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{8}}\right) \approx 91^\circ 28' 30''$,

$R = \arccos \sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{6}} \approx 59^\circ 5' 52''$ et $r = 90^\circ - R = \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{6}} \approx 30^\circ 54' 8''$.

THÉORÈME 1. *Chaque courbe convexe sphérique peut être renfermée dans un anneau triangulaire ayant une aire* $\leqq c$. *Le seul cas où la constante* c *ne peut pas être remplacée par une plus petite, est celui d'un cercle de rayon* R.

THÉORÈME 2. *Chaque courbe convexe sphérique peut être inclue dans un anneau triangulaire ayant un périmètre* $\leqq c$. *Le seul cas où la constante* c *ne peut pas être diminuée, est celui d'un cercle de rayon* r.

Les théorèmes 1 et 2 découlent l'un de l'autre par une polarité. En effet, les pôles des grands cercles d'appui d'une courbe convexe sphérique S situés du même côté du grand cercle que la courbe S forment une nouvelle courbe S', appelée courbe polaire de S. Il est aisé de voir que S est la courbe polaire de S' et que S' est aussi convexe. D'ailleurs, comme il est bien connu, la figure polaire d'un triangle ayant des côtés a, b, c et des angles α, β, γ est un triangle ayant des côtés $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ et des angles $\pi-a$, $\pi-b$, $\pi-c$. Par conséquent, la polarité fait correspondre à un anneau triangulaire enfermant S et ayant une aire a et un périmètre p un anneau triangulaire renfermant S' et ayant une aire p et un périmètre a. Ceci prouve

[1] Le théorème 1 était énoncé comme conjecture dans mon livre *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953), p. 55, où on trouvera des résultats analogues dûs à différents auteurs, concernant des courbes planes.

l'équivalence des deux théorèmes. Dans ce qui suit nous allons démontrer le théorème 2.

Nous nous bornerons à des courbes sans sommets et ne contenant pas un arc d'un grand cercle, ce qui évidemment ne restreint pas la généralité. Il est facile de voir qu'on peut circonscrire à notre courbe S un triangle régulier ABC; de plus, le grand cercle tangeant AB peut être donné par avance. Nous distinguons deux cas, suivant qu'il existe parmi ces triangles un tel que $AB = BC = CA \leqq 90°$, ou qu'il n'en existe pas.

Cas 1. $AB \leqq 90°$. Soient A', B' et C' les trois points de S situés respectivement sur BC, CA et AB. Nous allons démontrer que le périmètre de l'anneau borné par ABC et $A'B'C'$ ne dépasse pas la constante c.

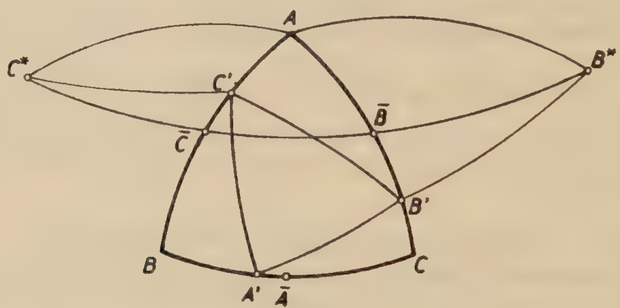


Fig. 1

Soient $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ les milieux des côtés BC, CA et AB respectivement. Nous affirmons que le périmètre de $A'B'C'$ ne déscend jamais sous le périmètre de $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Pour le voir construisons les symétriques C^* et B^* de A' par rapport aux grands cercles AB et AC (fig. 1). Nous avons $A'B' + B'C' + C'A' = B^*B' + B'C' + C'C^* \geqq B^*C^*$. Remarquons d'autre part que $AB^* = AC^* = AA' \leqq 90°$ et que l'angle $\sphericalangle C^*AB^* = 2\sphericalangle BAC$ ne dépend pas de la position de A'. Donc B^*C^* atteint son minimum quand AA' l'atteint, c'est à dire quand A' et $\bar{A}$ coïncident. Mais dans ce cas $B^*C^* = 3\bar{B}\bar{C}$, ce qui prouve notre affirmation.

Nous avons donc à examiner le périmètre

$$p(x) = 6\left(x - \arcsin\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right), \quad 0 < 2x = AB \leqq 90°$$

de l'anneau formé par ABC et $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. En tenant compte de $p(0) = p(60°) = 0$ on voit que $p(x)$ a dans l'intervalle $(0, 60°)$ un seul maximum, à savoir c. En

effet, le maximum est déterminé par

$$p' = 6 - \frac{6}{\cos^2 x \sqrt{4 - \mathrm{tg}^2 x}} = 0,$$

c'est à dire par l'équation

$$5 \cos^4 x - \cos^2 x - 1 = 0$$

qui a dans l'intervalle considéré la solution unique

$$x = \arccos \sqrt{\frac{1 + \sqrt{21}}{10}} \approx 41^\circ\, 39'\, 15''.$$

La discussion du cas 1 est donc fini.

Cas 2. $AB > 90°$. En conservant les notations précédentes, nous affirmons qu'il existe un triangle équilatéral ABC circonscrit à S tel que $A' \equiv \bar{A}$ et que B' soit situé sur $A\bar{B}$.

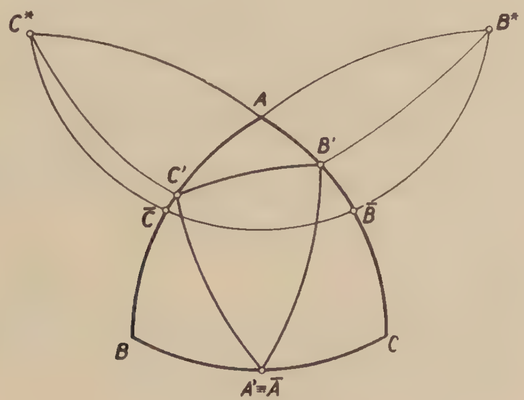


Fig. 2

En vertu de l'hypothèse faite sur la courbe S, les points A', B' et C' sont uniquement déterminés par ABC et les rapports $\alpha = A'B : A'C$, $\beta = B'C : B'A$, $\gamma = C'A : C'B$ varient continûment avec le triangle ABC. Supposons d'abord que tous les trois rapports sont > 1 (ou, ce qui revient au même, < 1). Il est aisé de voir que dans ces conditions l'aire du triangle ABC varie d'une façon monotone en déplaçant le point A' sur S dans une certaine direction. On doit donc arriver à une première position du triangle ABC telle qu'un des rapports prend la valeur 1, ce qui est équivalent à notre assertion.

Supposons maintenent que $\alpha \leqq 1$ et $\beta \geqq 1$. En variant ABC continûment jusqu' à ce que A' coïncide avec la position originale de B', on doit

passer par une position telle que ou bien $\alpha = 1$, $\beta \geqq 1$, ou bien $\alpha \leqq 1$, $\beta = 1$, ce qui équivaut à notre assertion.

En partant d'un triangle mentionné, considérons d'abord le cas où C' est situé sur $A\bar{C}$ (fig. 2). Puisque C', B' et A sont situés sur une hémisphère déterminée par le grand cercle $C^*C\bar{B}B^*$ et le triangle AB^*C^* est compris dans le quadrilatère $B^*C^*C'B'$, nous avons $A'B'+B'C'+C'A' = B^*B'+B'C'+C'C^* \geqq B^*A+AC^* = 2A\bar{A}$. Par conséquent le périmètre de l'anneau considéré ne dépasse pas

$$q(x) \quad 3AB - 2A\bar{A} = 6x - 2\arccos\frac{\cos 2x}{\cos x}, \quad 2x = AB.$$

En vertu de $q(0) = q(60°) = 0$, q a dans l'intervalle $(0, 60°)$ un seul maximum, déterminé par

$$q' = 6 - 2\frac{2\cos^2 x + 1}{\cos x\sqrt{4\cos^2 x - 1}} = 0,$$

c'est à dire par

$$32\cos^4 x - 13\cos^2 x - 1 = 0.$$

Or

$$x = \arccos\frac{\sqrt{13+\sqrt{293}}}{8} \approx 46°\,41'\,11''$$

et le maximum cherché monte approximativement à $90°\,14'\,42''$, ce qui est inférieur à c.

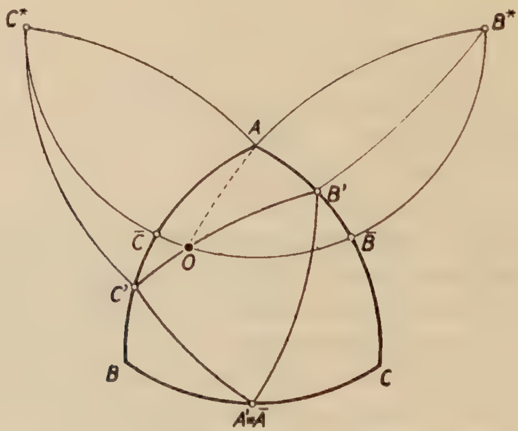


Fig. 3

Soit maintenent C' situé sur $B\bar{C}$ (fig. 3). Alors $C'B'$ et $\bar{C}\bar{B}$ ont un point commun O. Supposons que les arcs $O\bar{B}B^*$ et $O\bar{C}C^*$ n'excèdent pas 180° (ce qui se réalise toujours si $\sphericalangle BAC \leqq 120°$). Alors $A'B'+B'C'+C'A' =$

$=B^*B'+B'O+OC'+C'C^*\geqq B^*O+OC^*=3\bar{B}\bar{C}$ et il s'agit du périmètre $p(x)$ traité dans le cas 1. Si d'autre part on a par exemple $B^*\bar{B}O>180°$, le triangle $OB'B^*$ contient OAB^*. Par conséquent $A'B'+B'C'+C'A'=B^*B'+$ $+B'O+OC'+C'C^*\geqq B^*A+AO+OC^*>B^*A+AC^*=2A\bar{A}$. Il est donc question de la différence $3AB-2A\bar{A}$ examinée précédemment.

Les raisonnements précédents font voir que le seul cas où la constante c ne peut pas être diminuée est celui d'une courbe jouissant de la propriété suivante: elle peut faire une révolution totale dans un triangle équilatéral ABC de côté $AB=2\arccos\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{10}}$ en touchant dans chaque position les côtés de ABC en leurs milieux. Puisque le centre instantané de rotation d'une telle courbe coïncide évidemment toujours avec le centre de ABC, la courbe ne peut être qu'un cercle inscrit à ABC, c'est à dire un cercle de rayon r.

Citons encore les théorèmes de la géométrie absolue bien connus selon lesquels parmi les triangles inscrits et circonscrits à un cercle ce sont les réguliers qui possèdent le plus grand et le plus petit périmètre respectivement. Il en résulte que le périmètre d'un anneau triangulaire renfermant un cercle de rayon r ne peut être serré au-dessous de c par aucune autre construction différente de la nôtre.

(Reçu le 28 janvier 1956.)

О ТРЕУГОЛЬНИКАХ, ВПИСАННЫХ В ВЫПУКЛУЮ ОБЛАСТЬ СФЕРЫ И ОПИСАННЫХ ОКОЛО НЕЕ

Л. Фееш Тот (Будапешт)

(Резюме)

Пусть l обозначает периметр наибольшего треугольника, вписанного в некоторую выпуклую область сферы, а L периметр наименьшего треугольника, описанного около той же области. Тогда

$$L-l\leqq 6\left(\arccos\sqrt{\frac{\sqrt{21}+1}{10}}-\arcsin\sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{8}}\right).$$

Равенство имеет место лишь в случае круга определенного радиуса. Аналогичная теорема имеет место и для площади.

EINE KENNZEICHNUNG DER REINEN UNTERGRUPPEN ABELSCHER GRUPPEN

Von

HORST LEPTIN (Hamburg)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

In einer Arbeit in der *Mathematischen Zeitschrift*[1] werde ich zeigen, daß jede abgeschlossene reine Untergruppe einer Prüferschen Gruppe und allgemeiner jeder abgeschlossene reine Untermodul eines linear kompakten Moduls über einem vollständigen diskreten Bewertungsring algebraisch direkter Summand ist. Mithilfe dieses Satzes werden wir beweisen:

Eine abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer kompakten abelschen topologischen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist genau dann rein, wenn $\mathfrak{H}$ algebraisch direkter Summand ist, d. h. wenn $\mathfrak{G}$, betrachtet als abstrakte (diskrete) Gruppe, direkte Summe von $\mathfrak{H}$ und einer geeigneten anderen Untergruppe ist.

Für diskrete Gruppen können wir diesen Satz so formulieren:

Eine Untergruppe H der abelschen Gruppe G ist genau dann rein, wenn in der Charaktergruppe von G der Annullator von H direkter Summand ist.

Bei dieser Formulierung des Satzes ist es zweckmäßig, die Charaktergruppe von G als abstrakte Gruppe zu betrachten. Daß beide Fassungen unseres Satzes äquivalent sind, liegt daran, daß der Begriff der reinen Untergruppe für diskrete und kompakte Gruppen selbstdual ist: Bezeichnet $n\mathfrak{H}$ für natürliches n die Untergruppe aller n-fachen der Elemente aus $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}$ irgendeine abgeschlossene Untergruppe der diskreten oder kompakten Gruppe $\mathfrak{G}$) und $n^{-1}(\mathfrak{H})$ die Untergruppe aller $x \in \mathfrak{G}$ mit $nx \in \mathfrak{H}$, so ist die Untergruppe $\mathfrak{R}$ genau dann rein, wenn für jedes natürliche n eine der beiden Gleichungen (und damit jede der beiden Gleichungen)[2]

$$n\mathfrak{R} = \mathfrak{R} \cap n\mathfrak{G} \qquad n^{-1}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} + n^{-1}(0)$$

erfüllt ist. Der Übergang zu der Charaktergruppe bewirkt lediglich Vertauschung der beiden Gleichungen. Ist nun H rein in G, so ist der Annullator $\mathfrak{H}$ von H in der Charaktergruppe $\mathfrak{G}$ von G also rein und abgeschlossen und folglich algebraischer direkter Summand. Umgekehrt: Ist $\mathfrak{H}$ algebraischer direkter Summand von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{H}$ und damit auch H rein.

[1] H. LEPTIN, Linear kompakte Moduln und Ringe. II, *Math. Zeitschr.* (im Erscheinen).

[2] Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ stets die von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Für die direkte Summe benutzen wir das Zeichen „$\oplus$", für die algebraische direkte Summe das Zeichen „$(+)$".

Beweis der Behauptung. Für jede kompakte abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^z$ die Zusammenhangskomponente der Null. Offenbar ist $\mathfrak{A}^z = \bigcap_{n=1}^{\infty} n\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^z$ ist eine kompakte Prüfersche Gruppe.

Wir setzen nun voraus, daß $\mathfrak{N}$ eine reine abgeschlossene Untergruppe der kompakten abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. Dann gelten die Formeln

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})^z = (\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N})/\mathfrak{N}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{N}^z = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}^z. \tag{2}$$

(1) folgt aus der Kompaktheit von $\mathfrak{G}$:

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})^z = \bigcap_n n(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = \bigcap_n (n\mathfrak{G} + \mathfrak{N}/\mathfrak{N}) = ((\bigcap_n n\mathfrak{G}) + \mathfrak{N})/\mathfrak{N} = (\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N})/\mathfrak{N}.$$

(2) folgt aus der Reinheit von $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N}^z = \bigcap_n n\mathfrak{N} = \bigcap_n (\mathfrak{N} \cap n\mathfrak{G}) = \mathfrak{N} \cap (\bigcap_n n\mathfrak{G}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}^z.$$

Die Zusammenhangskomponente ist als Divisionsgruppe stets rein, sogar algebraisch direkter Summand, $(\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N})/\mathfrak{N}$ ist also reine Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}$ reine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, folgt, daß auch $\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ rein ist. Dann ist aber auch $(\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N})/\mathfrak{G}^z$ abgeschlossene reine Untergruppe der Prüfergruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^z$, also algebraischer direkter Summand:

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^z = \mathfrak{A}/\mathfrak{G}^z \,(+)\, (\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N})/\mathfrak{G}^z$$

mit einer i. a. nicht abgeschlossenen Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}^z$ ist als Divisionsgruppe algebraischer direkter Summand von $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(+)\mathfrak{G}^z$. Daraus folgt:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}(+)(\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N}).$$

$\mathfrak{N}^z = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}^z$ ist direkter Summand von $\mathfrak{G}^z$: $\mathfrak{G}^z = \mathfrak{C}(+)\,\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}^z$. Daraus folgt

$$\mathfrak{G}^z + \mathfrak{N} = \mathfrak{C}\,(+)\,\mathfrak{N}.$$

Setzen wir also $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(+)\mathfrak{C}$, so haben wir

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}\,(+)\,\mathfrak{N}$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 31. Januar 1956.)

ОДНА ХАРАКТЕРИСТИКА СЕРВАНТНЫХ ПОДГРУПП АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Х. Лэптин (Гамбург)

(Резюме)

Автор доказывает следующую теорему:

Замкнутая подгруппа $\mathfrak{H}$ коммутативной и компактной топологической группы $\mathfrak{G}$ сервантна тогда и только тогда, если $\mathfrak{H}$ есть прямое слагаемое для абстрактной группы $\mathfrak{G}$.

Следствием этой теоремы является утверждение: подгруппа H коммутативной группы G сервантна тогда и только тогда, если в характеристической группе G аннулятор H есть прямое слагаемое.

О СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО И ГАРМОНИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

О. КИШ (Будапешт)

(Представлено А. Реньи)

§ 1

В настоящей работе приведены необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на матрицу узлов, чтобы имела место сходимость тригонометрического интерполирования для некоторых классов периодических функций.

Хотя изучению тригонометрического интерполирования посвящена обширная литература, мне известен лишь один результат такого рода. Это сформулированное Х. Ханом в работе [11] необходимое и достаточное условие сходимости в точках непрерывности функций с ограниченным изменением общего интерполяционного процесса, частным случаем которого является тригонометрическое интерполирование. (Правильное доказательство достаточности этого условия было дано С. М. Лозинским в статье [7].) Ниже сформулированны необходимые и достаточные условия равномерной сходимости на всей вещественной оси тригонометрического интерполяционного процесса для множества периодических и аналитических на вещественной оси функций (§ 5, теорема 5[1]), для всех несколько раз непрерывно дифференцируемых периодических функций (§ 7, теорема 8), для пространства периодических функций, имеющих несколько абсолютно непрерывных производных (§ 7, теорема 7), и для всех периодических функций, имеющих несколько производных с ограниченным изменением (§ 9, теорема 9). В последних трех случаях дано также необходимое и достаточное условие сходимости тригонометрического интерполирования в отдельных точках. Приведена также наименьшая замкнутая область, обладающая тем свойством, что для аналитических в ней периодических функций тригонометрический интерполяционный процесс равномерно сходится на всей вещественной оси при любом выборе узлов интерполирования (§ 5, теорема 6). Наконец, дается достаточное условие равномерной сходимости тригонометрического интерполирования для всех периодических непрерывных функций с ограниченным изменением (§ 9, теорема 10).

[1] Эта теорема, а также теоремы 1, 3 и 6 были без доказательства приведены в заметке [3].

Все эти результаты (кроме последнего) являются аналогами некоторых теорем о сходимости алгебраического интерполирования, доказанных Л. Калмаром в работе [1] и В. И. Крыловым в статьях [4] и [5]. Я пользуюсь методами, разработанными в этих работах, а также некоторыми полученными там результатами.

Упомянутые результаты о сходимости тригонометрического интерполяционного процесса для периодических аналитических функций являются следствиями некоторых теорем о сходимости интерполирования аналитических в замкнутом круге функций гармоническими многочленами. Доказательству этих теорем посвящены §§ 2—4.

Настоящая статья содержит основные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, написанной автором под руководством профессора В. И. Крылова.

Пользуюсь возможностью, чтобы выразить мою глубокую благодарность профессору В. И. Крылову за его ценные советы и постоянное внимание. Я очень признателен также академику В. И. Смирнову и академику А. Реньи за внимание к моей работе.

§ 2

Пусть n любое неотрицательное целое число, $N=2n+1$, $z_1, z_2, \ldots, z_N$ произвольные комплексные числа, модуль которых равен единице. Мы будем называть их узлами интерполирования или просто узлами. Узел называется простым, если он отличается от всех остальных узлов, и m-кратным, если среди остальных узлов $m-1$ совпадают с ним. Пусть $f(z)$ любая комплекснозначная функция, определенная в замкнутом круге $|z| \leqq 1$.

Мы будем называть гармонический многочлен n-ой степени

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \operatorname{Re} z^k + b_k \operatorname{Im} z^k) \tag{1}$$

интерполяционным и обозначать через $H_n[f(z)]$, если он совпадает с интерполируемой функцией $f(z)$ во всех узлах и его $m-1$ первые одномерные производные вдоль окружности $|z|=1$ совпадают с соответствующими производными интерполируемой функции (существование которых предполагается) во всех m-кратных узлах. (Одномерная производная в точке z_0 определяется так:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\substack{|z|=1 \\ z \to z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.)$$

Сейчас мы покажем, что гармонический интерполяционный многочлен всегда

существует и единственен. (В том случае, когда все узлы простые, существование и единственность гармонического интерполяционного многочлена очевидно, ибо для любых простых узлов $x_1, x_2, \ldots, x_N \in [0, 2\pi)$ и любой определенной на отрезке $[0, 2\pi)$ функции $g(x)$ существует единственный тригонометрический интерполяционный многочлен $T_n[g(x)]$ и

$$H_n[f(z)] = T_n[g(x)],$$

если положить

$$x = \frac{\ln z}{i}, \quad x_k = \frac{\ln z_k}{i}, \quad g(x) = f(e^{ix}).)$$

Пусть t любое комплексное число, модуль которого больше единицы. Докажем, прежде всего, что существует гармонический многочлен, интерполирующий функцию $\frac{1}{t-z}$.

Положим

$$\omega_N(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - z_k).$$

Тогда

$$\frac{\omega_N(z)\, t^n - \omega_N(t)\, z^n}{\omega_N(t)}$$

есть многочлен N-ой степени от переменной z. При $z = t$ он равен нулю. Значит

$$\frac{\omega_N(z)\, t^n - \omega_N(t)\, z^n}{(z-t)\, \omega_N(t)}$$

есть многочлен $N-1$-ой степени. Запишем его в виде

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k z^k.$$

Тогда

$$\frac{\omega_N(z)\, t^n - \omega_N(t)\, z^n}{(z-t)\, z^n\, \omega_N(t)} = \sum_{k=n}^{2n} c_k z^{k-n} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{1}{z^{n-k}}.$$

При $|z| = 1$ это равенство можно переписать в виде

(2) $$\sum_{k=n}^{2n} c_k z^{k-n} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \bar{z}^{n-k} = \frac{\omega_N(z)\, t^n - \omega_N(t)\, z^n}{(z-t)\, z^n\, \omega_N(t)}.$$

Из этого равенства видно, что стоящий слева гармонический многочлен равен в узлах z_k величине $\frac{1}{t-z_k}$, а в m-кратных узлах его первые $m-1$ одномерные производные равны соответствующим производным функции $\frac{1}{t-z}$, что и требовалось доказать.

Мы имеем право ввести для гармонического многочлена, стоящего в левой части равенства (2), обозначение $H_n\left[\frac{1}{t-z}\right]$. Тогда формулу (2) при $|z|=1$ можно переписать в виде

$$H_n\left[\frac{1}{t-z}\right]=\frac{\omega_N(z)\,t^n-\omega_N(t)\,z^n}{\omega_N(t)\,(z-t)\,z^n}. \tag{3}$$

Отсюда, положив

$$R_n[f(z)]=f(z)-H_n[f(z)],$$

получаем формулу

$$R_n\left[\frac{1}{t-z}\right]=\frac{\omega_N(z)\,t^n}{\omega_N(t)\,z^n}\frac{1}{t-z}. \tag{4}$$

Аналогичная формула, как известно, имеет место для алгебраического многочлена N—1-ой степени $P_{N-1}\left[\frac{1}{t-z}\right]$, интерполирующего функцию $f(z)$ в узлах z_k:

$$\frac{1}{t-z}-P_{N-1}\left[\frac{1}{t-z}\right]=\frac{\omega_N(z)}{\omega_N(t)}\frac{1}{t-z}. \tag{5}$$

Однако, это равенство имеет место при всяких комплексных z_k и z, отличных от t.

Покажем теперь, что гармонический интерполяционный многочлен существует для любой функции, аналитической в замкнутом единичном круге. Пусть $f(z)$ аналитична при $|z|\leqq 1$. Тогда существует такое число $r>1$, что функция $f(z)$ аналитична и в круге $|z|\leqq r$.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r} f(t)\,H_n\left[\frac{1}{t-z}\right]dt. \tag{6}$$

Очевидно, коэффициенты c_k гармонического многочлена $H_n\left[\frac{1}{t-z}\right]$ непрерывно зависят от t. Поэтому интеграл (6) имеет смысл при всех z и является гармоническим многочленом. В узлах $H_n\left[\frac{1}{t-z}\right]$ совпадает с $\frac{1}{t-z}$. Следовательно, интеграл (6) равен там

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r} f(t)\frac{dt}{t-z_k}=f(z_k).$$

Одномерные производные интеграла равны интегралам от соответствующих производных подинтегрального выражения. Но первые $m-1$ одномерные производные от $H_n\left[\frac{1}{t-z}\right]$ в m-кратных узлах равны соответствующим производным от $\frac{1}{t-z}$, а интегралы с этими производными равны соответствующим производным от $f(z)$. Следовательно, первые $m-1$ одномерные производные интеграла (6) в кратных узлах совпадают с соответствующими производными функции $f(z)$. Наше утверждение доказано.

Для интеграла (6) теперь можно ввести обозначение $H_n[f(z)]$. Из справедливости формулы (3) сразу следует равенство

$$H_n[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r} f(t)\,\frac{\omega_N(z)\,t^n - \omega_N(t)\,z^n}{\omega_N(t)\,(z-t)\,z^n}\,dt.$$

Поэтому

$$R_n[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r} f(t)\,\frac{\omega_N(z)}{\omega_N(t)}\,\frac{t^n}{z^n}\,\frac{dt}{t-z}. \tag{7}$$

Конечно, и эти формулы имеют место лишь если $|z|=1$.

Мы построили гармонический интерполяционный многочлен для всякой аналитической в замкнутом единичном круге функции. Пусть $g(z)$ любая определенная при $|z| \leqq 1$ функция, имеющая в m-кратных узлах первые $m-1$ одномерные производные. Очевидно, существует аналитическая в круге $|z| \leqq 1$ функция (например, алгебраический многочлен) $f(z)$, интерполирующая функцию $g(z)$ в узлах z_k. Тогда гармонический многочлен $H_n[f(z)]$ будет интерполировать и функцию $g(z)$. Следовательно, существует гармонический интерполяционный многочлен для всякой функции $g(z)$. Этот многочлен единственен, так как, если система уравнений относительно коэффициентов a_k и b_k многочлена (1) всегда разрешима, то ее решение единственно.

Любопытно отметить, что, если условие $|z_k|=1$ не выполнено, то гармонический интерполяционный многочлен может не существовать. Пусть, например, $z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}$ вещественны. Тогда для коэффициентов a_k многочлена (1) должны выполняться уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \operatorname{Re} z_l^k = f(z_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n+2),$$

что, вообще говоря, невозможно.

§ 3

Пусть $z_k^{(N)}$ $(N=1, 3, 5, \ldots; k=1, 2, \ldots, N)$ произвольные комплексные числа, модуль которых равен единице, $f(z)$ заданная в круге $|z| \leqq 1$ функция. Мы можем построить последовательность гармонических многочленов $H_n[f(z)]$, интерполирующих функцию $f(z)$ в узлах $z_k^{(N)}$ $(k=1, 2, \ldots, N)$.

Мы будем говорить, что гармонический интерполяционный процесс или просто гармоническое интерполирование сходится в точке z к функции $f(z)$, если

$$\lim_{n \to \infty} H_n[f(z)] = f(z).$$

Если это соотношение выполняется на некотором множестве равномерно относительно z, то мы будем говорить, что гармоническое интерполирование равномерно сходится там.

Каковы те условия, которым должны удовлетворять узлы, чтобы гармоническое интерполирование равномерно сходилось для всех аналитических в круге $|z| \leqq 1$ функций? Прежде чем ответить на этот вопрос, напомним одно нужное нам определение.

Пусть для некоторой бесконечной последовательности натуральных чисел N

$$0 \leqq x_k^{(N)} < 2\pi \qquad (k=1, 2, \ldots, N), \qquad z_k^{(N)} = e^{ix_k^{(N)}}.$$

Обозначим через $N[a, b)$ число узлов с верхним индексом N, для которых

$$a \leqq x_k^{(N)} < b.$$

Мы говорим, что узлы $x_k^{(N)}$ расположены на отрезке $[0, 2\pi)$, а узлы $z_k^{(N)}$ на окружности $|z|=1$ равномерно, если при всяких $0 \leqq a < b \leqq 2\pi$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N[a, b)}{N} = \frac{b-a}{2\pi}.$$

Теперь мы можем ответить на поставленный выше вопрос.

Теорема 1. Для того, чтобы гармонический интерполяционный процесс равномерно сходился в круге $|z| \leqq 1$ для всех аналитических там функций, необходимо и достаточно, чтобы узлы интерполирования располагались на окружности $|z|=1$ равномерно.

Доказательство достаточности условия. Предположим, что узлы расположены на окружности разномерно, и пусть

$$\omega_N(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - z_k^{(N)}).$$

Тогда по одной теореме Л. Калмара (см. [1]) для всех $r > 1$ и всех t,

лежащих на окружности $|t|=r$, равномерно относительно t

$$\lim_{N\to\infty} |\omega_N(t)|^{1/N} = r.$$

Следовательно, при всех z, для которых $|z|=1$, равномерно выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} |\omega_N(z)|^{1/N} \leqq 1.$$

Из полученных равенств видно, что при достаточно больших N

$$|\omega_N(t)|^{1/N} \geqq r^{5/6}, \qquad |\omega_N(z)|^{1/N} \leqq r^{1/6}$$

и, следовательно, для остатка интерполирования функции $f(z)$, представленного формулой (7), имеет место неравенство

$$|R_n[f(z)]| \leqq Cr^{-N/6},$$

где

$$C = \frac{r^{1/3}}{2\pi(r-1)} \int_0^{2\pi} |f(re^{ix})|\, dx.$$

Поэтому равномерно относительно z

$$\lim_{n\to\infty} R_n[f(z)] = 0.$$

Это соотношение доказано нами лишь при $|z|=1$, но имеет место и в круге $|z|\leqq 1$, так как для гармонических функций $R_n[f(z)]$ имеет место принцип максимума:

$$\max_{|z|\leqq 1} |R_n[f(z)]| = \max_{|z|=1} |R_n[f(z)]|.$$

Доказательство необходимости условия. Известно, что если узлы интерполирования расположены на единичной окружности неравномерно, то при некотором $|t|>1$ алгебраический интерполяционный процесс не сходится равномерно для функции $\frac{1}{t-z}$ (см. [10], стр. 159—162). Это утверждение остается в силе и в том случае, если рассматривать интерполяционные многочлены лишь четной степени.

Это означает, что не выполняется равномерно относительно z соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{t-z} - P_{N-1}\left[\frac{1}{t-z}\right] \right\} = 0.$$

Но тогда тем более не может равномерно относительно z выполняться соотношение

$$\lim_{n\to\infty} R_n\left[\frac{1}{t-z}\right] = 0,$$

так как имеет место равенство

$$R_n\left[\frac{1}{t-z}\right]=\frac{t^n}{z^n}\left\{\frac{1}{t-z}-P_{N-1}\left[\frac{1}{t-z}\right]\right\},$$

являющееся следствием формул (4) и (5).

Этим завершается доказательство необходимости условия.

Как известно, имеет место следующая теорема Л. Калмара:

Для равномерной сходимости алгебраического интерполирования в некоторой области, ограниченной кривой Жордана, необходимо и достаточно равномерное распределение узлов интерполирования на границе. (См. [1], при этом понятие равномерного распределения узлов, конечно, обобщено.)

При доказательстве аналогичной этому результату теоремы 1 нам пришлось ограничиться случаем узлов, расположенных на окружности, так как равенство (4), в отличии от формулы (5), было доказано лишь для этого случая.

Заметим, что равномерное расположение узлов необходимо и для простой сходимости гармонического интерполирования в круге $|z|\leqq 1$ для всех аналитических там функций, а не только для равномерной сходимости. Однако, доказательство этого уточнения теоремы 1 довольно громоздко и поэтому мы его не приводим.

Заметим также, что в теореме 1 вместо аналитических в круге $|z|\leqq 1$ функций можно говорить о гармонических там функциях, так как равномерная сходимость гармонического интерполирования ко всем гармоническим в круге $|z|\leqq 1$ функциям равносильна сходимости гармонического интерполяционного процесса для всех аналитических при $|z|\leqq 1$ функций. Действительно, если интерполирование равномерно сходится для всех гармонических функций $u(z)$, то оно сходится и для всех аналитических функций

$$f(z)=u(z)+iv(z),$$

так как, очевидно,

$$H_n[f(z)]=H_n[u(z)]+iH_n[v(z)].$$

Обратное заключение имеет место в силу этой же формулы, так как всякая гармоническая функция есть вещественная часть некоторой аналитической функции.

Укажем теперь одно следствие теоремы 1, которое нам понадобится в дальнейшем.

Теорема 2. Гармонический интерполяционный процесс равномерно сходится на окружности $|z|=1$ для всех аналитических там функций в том

и только в том случае, если узлы интерполирования расположены на окружности $|z|=1$ равномерно.

Доказательство. Условие необходимо, так как его выполнение следует из сходимости тригонометрического интерполирования для всех аналитических при $|z|\leqq 1$ функций. Докажем достаточность нашего условия.

Пусть функция $F(t)$ аналитична во внешности круга $|t|\geqq 1$. Ее можно интерполировать в узлах t_k $(|t_k|=1)$ гармоническими функциями следующего вида:

$$a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \operatorname{Re}\frac{1}{t^k}+b_k \operatorname{Im}\frac{1}{t^k}\right).$$

Будем обозначать интерполирующие функции такого вида через $\mathcal{H}_n[F(t)]$. Если положить

$$z=\frac{1}{t}, \qquad z_k=\frac{1}{t_k}, \qquad f(z)=F\left(\frac{1}{z}\right),$$

то

$$\mathcal{H}_n[F(t)]=H_n[f(z)].$$

Так как, кроме того, функция $F(t)$ пробегает все множество аналитических при $|t|\geqq 1$ функций, если $f(z)$ пробегает все множество аналитических при $|z|\leqq 1$ функций, и узлы $t_k^{(N)}$ расположены на окружности $|z|=1$ равномерно, если там равномерно расположены узлы $\frac{1}{t_k^{(N)}}$, то соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}_n[F(t)]=F(t) \tag{8}$$

выполняется равномерно относительно t во внешности круга $|t|\geqq 1$ для всех аналитических там функций, если узлы $t_k^{(N)}$ расположены на окружности $|t|=1$ равномерно.

Пусть, теперь, функция $g(z)$ аналитична на единичной окружности. Она может быть представлена в виде суммы

$$g(z)=f(z)+F(z),$$

где $f(z)$ аналитична при $|z|\leqq 1$, а $F(z)$ при $|z|\geqq 1$. Очевидно,

$$H_n[g(z)]=H_n[f(z)]+H_n[F(z)].$$

В случае равномерного распределения узлов, равномерно на окружности $|z|=1$,

$$\lim_{n\to\infty}H_n[f(z)]=f(z). \tag{9}$$

$$H_n[F(z)]=\mathcal{H}_n[F(z)],$$

если $|z|=1$, так как тогда

$$\operatorname{Re} z^k = \operatorname{Re}\frac{1}{z^k}, \qquad \operatorname{Im} z_k = -\operatorname{Im}\frac{1}{z^k}.$$

Но при равномерном расположении узлов на окружности $|z|=1$ равномерно относительно t имеет место соотношение (8). Следовательно, при $|z|=1$ равномерно относительно z

$$\lim_{n\to\infty} H_n[F(z)] = F(z). \tag{10}$$

А если на окружности $|z|=1$ равномерно относительно z имеют место формулы (9) и (10), то равномерно относительно z выполняется и соотношение

$$\lim_{n\to\infty} H_n[g(z)] = g(z),$$

что и требовалось доказать.

§ 4

Найдем наименьшую область, аналитичность функции в которой гарантирует сходимость гармонического интерполирования в круге $|z|\leqq 1$ при любом выборе узлов на окружности $|z|=1$.

Если $|t|=r$ и $|z|=|z_k^{(N)}|=1$, то, очевидно,

$$|\omega_N(z)|\leqq 2^N, \qquad |\omega_N(t)|\geqq (r-1)^N.$$

Воспользовавшись этими неравенствами, оценим правую часть неравенства (7). Мы придем к неравенству:

$$|R_n[f(z)]|\leqq C\left(\frac{2\sqrt{r}}{r-1}\right)^N.$$

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|\leqq 3+2\sqrt{2}$, то можно считать $r>3+2\sqrt{2}$. В этом случае $\dfrac{2\sqrt{r}}{r-1}<1$ и поэтому правая часть предыдущего неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, к нулю стремится и левая часть неравенства, что означает равномерную сходимость гармонического интерполирования для функции $f(z)$ на окружности $|z|=1$, а, следовательно, и в круге $|z|\leqq 1$.

Пусть, теперь,

$$z_k^{(N)}=1, \quad z=-1, \quad t=3+2\sqrt{2}.$$

Тогда

$$\omega_N(z) = -2^N, \quad \omega_N(t) = (2+2\sqrt{2})^N,$$

$$R_n\left[\frac{1}{t-z}\right] = \frac{-2^N}{(2+2\sqrt{2})^N}\,\frac{(3+2\sqrt{2})^n}{(-1)^n}\,\frac{1}{4+2\sqrt{2}} = \frac{(-1)^n}{2(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

Резюмируем сказанное.

Теорема 3. Гармонический интерполяционный процесс равномерно сходится в круге $|z| \leqq 1$ для всех аналитических при $|z| \leqq 3+2\sqrt{2}$ функций, как бы не были выбраны узлы интерполирования на окружности $|z| = 1$. Пусть $|t| \leqq 3+2\sqrt{2}$. Существует функция с единственной особенностью в точке t, для которой гармоническое интерполирование расходится в некоторой точке окружности $|z| = 1$ при некотором выборе узлов на этой окружности.

В. И. Крылов в работе [4] решил следуюшую задачу. Пусть F и Φ любые ограниченные замкнутые множества на плоскости комплексной переменной z. Найти наименьшую замкнутую область B, аналитичность функции в которой гарантирует сходимость алгебраического интерполирования на множестве Φ, при любом выборе узлов интерполирования на множестве F.

Любопытно отметить, что для случая, когда F есть окружность $|z| = 1$ а Φ круг $|z| \leqq 1$, область B есть круг $|z| \leqq 3$, радиус которого почти вдвое меньше чем полученное выше число $3+2\sqrt{2}$.

Так же, как исходя из теоремы 1, была получена теорема 2, исходя из теоремы 3 может быть получена следующая

Теорема 4. При любом выборе узлов интерполирования на окружности $|z| = 1$ гармонический интерполяционный процесс равномерно сходится там для любой функции, аналитической в кольце $3-2\sqrt{2} \leqq |z| \leqq 3+2\sqrt{2}$. Пусть t любая точка этого кольца. Тогда существует функция с единственной особенностью в этой точке, для которой гармоническое интерполирование расходится в некоторой точке окружности $|z| = 1$ при некотором выборе расположенных там узлов интерполирования.

§ 5

Имеет место следующая

Теорема 5. Для того, чтобы тригонометрический интерполяционный процесс равномерно сходился на всей вещественной оси для всех периодических и аналитических там функций, необходимо и достаточно, чтобы узлы интерполирования располагались на отрезке $[0, 2\pi]$ равномерно.

Доказательство. Пусть дана система узлов интерполирования $x_k^{(N)}$ [2] $(k=1, 2, \ldots, N; N=1, 3, \ldots)$, причем

$$0 \leqq x_1^{(N)} \leqq x_2^{(N)} \leqq \cdots \leqq x_N^{(N)} < 2\pi.$$

Мы и здесь допускаем кратные узлы.

Всегда существует единственный тригонометрический многочлен n-ой степени

$$T_n[g(x)] = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

интерполирующий любую заданную на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $g(x)$ в узлах $x_k^{(N)}$, так как

$$T_n[g(x)] = H_n[f(z)],$$

где

$$z = e^{ix}, \qquad z_k^{(N)} = e^{ix_k^{(N)}}, \qquad f(z) = \left(\frac{\ln z}{i}\right).$$

Если функция $g(x)$ пробегает все множество периодических и аналитических на вещественной оси функций, функция $f(z)$ пробегает все множество аналитических на окружности $|z|=1$ функций, и наоборот: если $f(z)$ пробегает множество аналитических при $|z|=1$ функций, то функция $g(x)=f(e^{ix})$ пробегает все множество периодических и аналитических на вещественной оси функций. Кроме того, равномерное расположение узлов $x_k^{(N)}$ на отрезке $[0, 2\pi)$ по определению равносильно равномерному распределению узлов $z_k^{(N)}$ на окружности $|z|=1$. Поэтому теорема 5 является просто перефразировкой теоремы 2, что и требовалось доказать.

Заметим, что и в этом случае равномерное распределение узлов необходимо не только для равномерной сходимости тригонометрического интерполирования периодических аналитических функций на всей вещественной оси, но и для простой сходимости там.

Аналогичным образом можно перефразировать и теорему 4:

Теорема 6. Если функция периодична и аналитична в полосе $|\mathrm{Im}\, x| \leqq 2 \ln (1+\sqrt{2})$, то тригонометрический интерполяционный процесс равномерно сходится для нее на всей вещественной оси при любом выборе узлов интерполирования на отрезке $[0, 2\pi)$. Пусть x любая точка указанной полосы. Существует периодическая функциа, аналитическая везде кроме точек $x+2\pi k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, для которой тригонометрическое интерполирование расходится в некоторой точке отрезка $[0, 2\pi)$ при некотором выборе узлов там.

[2] В дальнейшем верхний индекс часто будет опускаться.

Заметим, что область аналитичности функции, гарантирующая сходимость алгебраического интерполирования на некотором отрезке при любом выборе узлов там, равна сумме двух кругов с центрами в концах отрезка и радиусами, равными длине отрезка. (См. [4].)

В двух предыдущих теоремах мы имели в виду комплекснозначные периодические аналитические функции. Однако, теорема верна и в том случае, если иметь в виду лишь периодические аналитические функции, вещественные на вещественной оси. Докажем это. Если сходимость имеет место для всех периодических аналитических функций, то она, очевидно, имеет место и для вещественных периодических аналитических функций. Пусть сходимость имеет место для этих функций. Всякая периодическая аналитическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вещественны. Так как

$$R_n[f(x)]=R_n[f_1(x)]+iR_n[f_2(x)],$$

то равномерная сходимость к нулю последовательности $R_n[f(x)]$ следует из равномерной сходимости к нулю последовательностей $R_n[f_1(x)]$ и $R_n[f_2(x)]$.

§ 6

В дальнейшем нам придется воспользоватся известной формулой Эйлера. Она нам понадобится в несколько более общей форме чем обычно и поэтому мы сейчас приведем ее доказательство.

Прежде всего определим многочлены Бернулли. Это можно сделать так:

$$B_0(x)=1, \qquad B_k(x)=k\int_0^x B_{k-1}(t)\,dt+B_k \quad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{11}$$

Числа B_k определяются равенством

$$\int_0^{2\pi} B_k(x)\,dx=0 \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Это определение равносильно обычному (см., например, [12], стр. 392) и, исходя из него, сразу получаем нужные нам свойства этих многочленов:

$$\begin{aligned} &B'_k(x)=kB_{k-1}(x) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots),\\ &B_k(0)=B_k(1) \qquad (k=2, 3, 4, \ldots). \end{aligned} \tag{12}$$

Определив многочлен Бернулли, можно, как обычно, определить периоди-

ческие функции, ассоциированные с ними:

$$\mathcal{B}_k(x) = B_k(\{x\}), \tag{13}$$

где $\{x\}$ означает дробную часть числа x.

Теперь мы можем написать следующую формулу:

$$f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k(x)}{k!}\{f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)\} - \frac{1}{m!}\int_0^1 \mathcal{B}_m(x-t)\,df^{(m-1)}(t). \tag{14}$$

Если $m=1$, то эта формула имеет место для всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, а при $m = 2, 3, \ldots$ для всех функций, имеющих на отрезке $[0, 1]$ $m-1$-ую производную с ограниченным изменением.

Докажем это утверждение методом математической индукции.

Пусть $m=1$. Для этого случая из формул (11) и (13) получаем следующие равенства:

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \qquad \mathcal{B}_1(x-t) = \begin{cases} x - t - \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad x \geqq t, \\ x - t + \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad x < t. \end{cases} \tag{15}$$

Так как функция $f(t)$ по условию непрерывна, а функция $\mathcal{B}_1(x-t)$ имеет ограниченное изменение, то интеграл

$$\int_0^1 \mathcal{B}_1(x-t)\,df(t)$$

существует. Следующие выкладки, доказывающие формулу (14) в случае $m=1$, в комментариях не нуждаются.

$$\int_0^1 \mathcal{B}_1(x-t)\,df(t) = \int_0^1 \left(x - t - \frac{1}{2}\right) df(t) +$$

$$+ \int_x^1 df(t) = \left[\left(x - t - \frac{1}{2}\right) f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)\,d\left(x - t - \frac{1}{2}\right) + [f(1) - f(x)] =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)[f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t)\,dt - f(x) = B_1(x)\,[f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t)\,dt - f(x).$$

Предположим, что формула (14) верна при $m = r-1 \geqq 1$. Покажем, что тогда она верна и при $m=r$. Интеграл

$$\int_0^1 \mathcal{B}_r(x-t)\,df^{(r-1)}(t)$$

имеет смысл, так как при $r \geqq 2$ функция $\mathfrak{B}_r(x-t)$ непрерывна, а функция $f^{(r-1)}(t)$ имеет ограниченное изменение. Чтобы завершить доказательство, нам остается заметить, что

$$\frac{1}{r!}\int_0^1 \mathfrak{B}_r(x-t)\,df^{(r-1)}(t) = \frac{1}{r!}\left[\mathfrak{B}_r(x-t)\,f^{(r-1)}(t)\right]_0^1 - \frac{1}{r!}\int_0^1 f^{(r-1)}(t)\,d\,\mathfrak{B}_r(x-t),$$

$$-\frac{1}{r!}\int_0^1 f^{(r-1)}(t)\,d\,\mathfrak{B}_r(x-t) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 \mathfrak{B}_{r-1}(x-t)\,f^{(r-1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 \mathfrak{B}_{r-1}(x-t)\,df^{(r-2)}(t) = \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{B_k(x)}{k!}\left[f^{(k-1)}(1)-f^{(k-1)}(0)\right]-f(x)$$

и поэтому

$$\frac{1}{r!}\int_0^1 \mathfrak{B}_r(x-t)\,df^{(r-1)}(t) = \sum_{k=1}^{r}\frac{B_k(x)}{k!}\left[f^{(k-1)}(1)-f^{(k-1)}(0)\right]-f(x)+\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Преобразуем полученную формулу. Прежде всего предположим, что функция $f^{(m-1)}(x)$ абсолютно непрерывна. Тогда равенство (14) перепишется так:

$$f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_k(x)}{k!}\left[f^{(k-1)}(1)-f^{(k-1)}(0)\right] - \frac{1}{m!}\int_0^1 f^{(m)}(t)\,\mathfrak{B}_m(x-t)\,dt.$$

Это и есть формула Эйлера, которую обычно доказывают в предположении непрерывности функции $f^{(m)}(t)$.

Если предположить, что

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1),$$

то формула Эйлера будет выглядеть проще:

$$f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{m!}\int_0^1 \mathfrak{B}_m(x-t)\,f^{(m)}(t)\,dt. \tag{16}$$

Предположим, наконец, что функция $f(x)$ принадлежит классу $A_{2\pi}^{(m-1)}$. Так мы обозначим множество функций, имеющих на отрезке $[0, 2\pi]$ абсолютно непрерывную производную и удовлетворяющих условию

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi) \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1). \tag{17}$$

Для таких функций формула (16) перепишется так:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\int_0^{2\pi}f^{(m)}(t)\,K_m(x-t)\,dt, \tag{18}$$

где положено

$$K_m(x)=-\frac{(2\pi)^{m-1}}{m!}\,\mathfrak{B}_m\left(\frac{x}{2\pi}\right). \tag{19}$$

С помощью равенства (18) тригонометрический интерполяционный многочлен всякой функции из класса $A_{2\pi}^{(m-1)}$ может быть представлен формулой:

$$T_n[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\int_0^{2\pi}f^{(m)}(t)\,T_n[K_m(x-t)]\,dt. \tag{20}$$

В дальнейшем будем считать, что все узлы интерполирования простые, то есть

$$0\leqq x_1^{(N)}<x_2^{(N)}<\cdots<x_N^{(N)}<2\pi.$$

В этом случае тригонометрический интерполяционный многочлен всякой функции $f(x)$ может быть представлен в виде суммы

$$T_n[f(x)]=\sum_{k=1}^{N}f(x_k^{(N)})\,t_{k,N}(x), \tag{21}$$

где $t_{k,N}(x)$[3] суть тригонометрические многочлены n-ой степени, определенные условиями

$$t_{k,N}(x_l^{(N)})=\begin{cases}0, & \text{если}\quad l\neq k,\\ 1, & \text{если}\quad l=k\end{cases}\qquad (k,l=1,2,\ldots,N;\ N=1,3,5,\ldots).$$

Чтобы убедиться в верности формулы (20), достаточно заменить в ней $T_n[f(x)]$ и $T_n[K_m(x-t)]$ соответственно суммами

$$\sum_{k=1}^{N}f(x_k)\,t_k(x),\qquad \sum_{k=1}^{N}K_m(x_k-t)\,t_k(x)$$

и принять во внимание равенство (18).

Если ввести обозначение

$$F_{m,n}(t)=F_{m,n}(t,x)=T_n[K_{m+1}(x-t)], \tag{22}$$

то формула (20) перепишется в виде

$$T_n[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\int_0^{2\pi}f^{(m)}(t)\,F_{m-1,n}(t,x)\,dt. \tag{23}$$

[3] Мы часто будем опускать второй индекс.

Определение (22) в случае простых узлов интерполирования равносильно следующему определению:

$$F_{0,n}(t,x) = -\frac{1}{2\pi}\left[\sum_{x_k<t}(x_k+\pi)\,t_k(x) + \sum_{x_k\geqq t}(x_k-\pi)\,t_k(x) - t\right],$$

$$F_{m,n}(t,x) = -\int_0^t F_{m-1,n}(\tau,x)\,d\tau + C_{m,n}(x) \qquad (m=1,2,3,\ldots),$$

где $C_{m,n}(x)$ определяется равенством

$$\int_0^{2\pi} F_{m,n}(t,x)\,dt = 0. \tag{24}$$

Действительно, в силу формул (22), (19), (15) и (21)

$$F_{0,n}(t,x) = T_n[K_1(x-t)] = T_n\left[-\mathfrak{B}_1\left(\frac{x-t}{2\pi}\right)\right] =$$

$$= \frac{t}{2\pi} - \sum_{x_k\geqq t}\left(\frac{x_k}{2\pi}-\frac{1}{2}\right)t_k(x) - \sum_{x_k<t}\left(\frac{x_k}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)t_k(x);$$

из формул (22), (21), (19), (13) и (12) следует при $m=1,2,\ldots$ равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{m,n}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}T_n[K_{m+1}(x-t)] = \sum_{k=1}^{N} t_k(x)\frac{\partial}{\partial t}K_{m+1}(x_k-t) =$$

$$= -\frac{(2\pi)^m}{(m+1)!}\sum_{k=1}^{N} t_k(x)\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{B}_{m+1}\left(\frac{x_k-t}{2\pi}\right) = \frac{(2\pi)^{m-1}}{m!}\sum_{k=1}^{N} t_k(x)\,\mathfrak{B}_m\left(\frac{x_k-t}{2\pi}\right) =$$

$$= -T_n[K_m(x-t)] = -F_{m-1,n}(t,x),$$

а соотношение (24) при $m=0,1,2,\ldots$ следует из равенств

$$\int_0^{2\pi} F_{m,n}(t,x)\,dt = \sum_{k=1}^{N} t_k(x)\int_0^{2\pi} K_{m+1}(x_k-t)\,dt,$$

$$-\frac{(m+1)!}{(2\pi)^{m+1}}\int_0^{2\pi} K_{m+1}(x_k-t)\,dt = \int_0^{2\pi}\mathfrak{B}_{m+1}\left(\frac{x_k-t}{2\pi}\right)dt = 2\pi\int_0^1 \mathfrak{B}_{m+1}\left(\frac{x_k}{2\pi}-t\right)dt =$$

$$= 2\pi\int_0^1 B_{m+1}(t)\,dt = 0.$$

§ 7

Будем искать необходимое и достаточное условие для сходимости тригонометрического интерполирования в точке $x \in [0, 2\pi]$ для всех функций $f \in A_{2\pi}^{(m)}$.

Прежде всего заметим, что достаточно ограничиться функциями множества $\bar{A}_{2\pi}^{(m)}$. Так мы обозначим подмножество класса $A_{2\pi}^{(m)}$, элементы которого удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Действительно, если сходимость имеет место для всех функций из $\bar{A}_{2\pi}^{(m)}$, то она имеет место и для всех функций из $A_{2\pi}^{(m)}$. (Пусть $g \in A_{2\pi}^{(m)}$. Положим

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx, \quad f = g - c.$$

Тогда

$$f \in \bar{A}_{2\pi}^{(m)}, \quad \lim_{n\to\infty} T_k[g(x)] = \lim_{n\to\infty} T_n[c] + \lim_{n\to\infty} T_n[f(x)] = c + f(x) = g(x).)$$

Обратное заключение очевидно.

Если $f \in \bar{A}_{2\pi}^{(m)}$, то функция

$$\varphi(x) = f_{(x)}^{(m+1)} \tag{25}$$

принадлежит классу L. Так мы обозначаем множество суммируемых на отрезке $[0, 2\pi]$ функций, удовлетворяющих следующему условию:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 0.$$

(Так как

$$\int_0^{2\pi} f^{(m+1)}(x)\,dx = f^{(m)}(2\pi) - f^{(m)}(0) = 0.)$$

Если же $\varphi \in L$, то функция

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \varphi(t) K_{m+1}(x-t)\,dt \tag{26}$$

принадлежит множеству $\bar{A}_{2\pi}^{(m)}$. (Функция $f^{(m)}(x)$ абсолютно непрерывна, так как

$$f^{(m)}(x) = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\partial^m}{\partial x^m} K_{m+1}(x-t)\,dt = -\frac{(2\pi)^m}{(m+1)!}\int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{\partial^m}{\partial x^m}\mathfrak{B}_{m+1}\left(\frac{x-t}{2\pi}\right) dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathfrak{B}_1\left(\frac{x-t}{2\pi}\right) dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{t-x}{2\pi}\right)\varphi(t)\,dt - \int_x^{2\pi}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,\varphi(t)\,dt - \int_x^{2\pi}\varphi(t)\,dt,$$

а эта функция, очевидно, абсолютно непрерывна. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f^{(k)}(2\pi)=f^{(k)}(0)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$, так как

$$f^{(k)}(0) = -\frac{(2\pi)^{m-k}}{(m-k+1)!}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\mathfrak{B}_{m+1-k}\left(-\frac{t}{2\pi}\right) dt =$$

$$= -\frac{(2\pi)^{m-k}}{(m-k+1)!}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\mathfrak{B}_{m+1-k}\left(1-\frac{t}{2\pi}\right) dt = f^{(k)}(2\pi).)$$

Следовательно, формулы (25) и (26) устанавливают между функциями множеств $\bar{A}_{2\pi}^{(m)}$ и $\bar{L}$ взаимнооднозначное соответствие. Сопоставив этот факт с формулой

$$U_n\left[f^{(m+1)}(x)\right] = f(x) - T_n[f(x)] = \int_0^{2\pi}\left[K_{m+1}(x-t) - F_{m,n}(x,t)\right] f^{(m+1)}(t)\,dt,$$

которая сразу следует из формул (18) и (23), видим, что сходимость тригонометрического интерполирования в точке x для всех функций из множества $\bar{A}_{2\pi}^{(m)}$ равносильна выполнению условия

$$\lim_{n\to\infty} U_n[\varphi(x)] = 0 \tag{27}$$

для всех функций из множества $\bar{L}$.

Однако, если условие (27) имеет место для всех функций из $\bar{L}$, то оно имеет место и для всех суммируемых функций. Докажем это утверждение. Прежде всего условимся обозначать множество суммируемых на отрезке $[0, 2\pi]$ функций через L. Пусть

$$\varphi \in L, \quad c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt, \quad \psi = \varphi - c.$$

Тогда

$$\varphi = \psi + c, \quad \psi \in \bar{L}.$$

Выше мы видели, что

$$\int_0^{2\pi} K_{m+1}(x-t)\,dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} F_{m,n}(t, x)\,dt = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$U_n[c] = \int_0^{2\pi} c\,[K_{m+1}(x-t) - F_{m,n}(x, t)]\,dt = 0$$

и, следовательно,

$$U_n[\varphi(x)] = U_n[\psi(x)], \quad \lim_{n\to\infty} U_n[\varphi(x)] = \lim_{n\to\infty} U_n[\psi(x)] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Если условие (27) выполнено для всех функций из L, то оно, конечно, выполнено и для всех функций из $\bar{L}$.

Из сказанного ясно, что для сходимости тригонометрического интерполирования в точке x для всех $f \in A_{2\pi}^{(m)}$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $\varphi \in L$ выполнялось условие (27). Но для сходимости последовательности некоторых операторов U_n, отображающих банахого пространство F в банахого пространство G, к некоторому оператору U, как известно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. последовательность норм операторов U_n ограничена,

2. последовательность операторов U_n сходится на некотором множестве, всюду плотном в пространстве F. (См., например, [2], стр. 98.)

В нашем случае $F = L$, G есть пространство вещественных чисел (эти пространства дейсвительно являются банаховыми пространствами, где норма определена соответственно формулами

$$\|\varphi\| = \int_0^{2\pi} |\varphi(x)|\,dx, \quad \|x\| = |x|),$$

$U = 0$, условие 2 выполнено для множества тригонометрических многочленов. (Множество тригонометрических многочленов, как известно, всюду плотно в пространстве L. Если φ есть тригонометрический многочлен без постоянного члена, то нетрудно построить тригонометрический многочлен f, для которого $f^{(m+1)} = \varphi$. Но для всякого тригонометрического многочлена тригонометрический интерполяционный процесс, очевидно, сходится и поэтому для нашей функции φ выполняется условие (27). Но, как мы знаем, $U_n[c] = 0$. Поэтому условие (27) выполняется для всех тригонометрических многочленов, что и требовалось доказать.)

Как известно, для нормы интегрального оператора имеет место равенство, которое в нашем случае запишется так:

$$\|U_n\| = \max_{t\in[0,\,2\pi]} |K_{m+1}(x-t) - F_{m,\,n}(x, t)|. \tag{28}$$

(См., например, [8], стр. 175.) Правда, обычно ядро интегрального оператора считают непрерывно зависящим от t, что в нашем случае имеет место при $m=1, 2, 3, \ldots$, но соответствующая формула имеет место и для кусочнонепрерывных ядер, каковым является наше ядро при $m=0$. В этом нетрудно убедиться, просмотрев соответствующее доказательство. Следовательно, равенство (27) имеет место для всех $\varphi \in L$ в том и только в том случае, если ограничена последовательность (28).

Так как функция $K_{m+1}(x-t)$ от n не зависит, то ограниченность последовательности (28) равносильна ограниченности последовательности

$$\max_{t\in[0,\,2\pi]} |F_{m,\,n}(x, t)|. \tag{29}$$

Ограниченность этой последовательности и есть искомое необходимое и достаточное условие для сходимости тригонометрического интерполирования в точке x для всех функций из $A_{2\pi}^{(m)}$.

Для того, чтобы получить необходимое и достаточное условие равномерной сходимости тригонометрического интерполирования на отрезке $[0, 2\pi]$ а, следовательно, и на всей вещественной оси для всех функций из $A_{2\pi}^{(m)}$, надо лишь заменить формулу (28) равенством

$$\|U_n\| = \max_{x,\,t\in[0,\,2\pi]} |K_{m+1}(x-t) - F_{m,\,n}(x, t)|,$$

а последовательность (29) последовательностью

$$\max_{x,\,t\in[0,\,2\pi]} |F_{m,\,n}(x, t)|.$$

Резюмируем сказанное.

Теорема 7. Для того, чтобы тригонометрический интерполяционный процесс сходился в точке $x \in [0, 2\pi]$ для всех функций из множества $A_{2\pi}^{(m)}$ $(m \geqq 0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: существует такое число M, что при всяких $n=1, 2, 3, \ldots$ имеет место равенство

$$|F_{m,\,n}(x, t)| \leqq M. \tag{30}$$

Для равномерной сходимости на всей вещественной оси необходимо и достаточно, чтобы существовало такое не зависящее от x число M, что при $n=1, 2, 3, \ldots$ и любых $x \in [0, 2\pi]$ выполняется неравенство (30).

Заметим, что, рассуждая так же, как и выше, нетрудно было бы получить условие сходимости в среднем тригонометрического интерполиро-

вания функций из $A_{2\pi}^{(m)}$, исследовать сходимость тригонометрического интерполирования для всех функций из $A_{2\pi}^{(m)}$, $m+1$-ая производная которых суммируема со степенью $p>1$, а также доказать следующую теорему:

Теорема 8. Для того, чтобы тригонометрический интерполяционный процесс сходился в точке $x\in[0,2\pi]$ для всех функций из $C_{2\pi}^{(m)}$ $(m\geqq 0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: существует такое число M, что при всяких $n=0,1,2,\ldots$

$$\bigvee_0^{2\pi} F_{n,m}(t)\leqq M. \tag{31}$$

Сходимость равномерна на всей вещественной оси в том и только в том случае, если существует такое не зависящее от x M, что неравенство (31) выполняется для всех $x\in[0,2\pi]$ и $n=0,1,2,\ldots$.

Здесь $C_{2\pi}^{(m)}$ обозначает множество m раз непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(2\pi)\qquad (k=0,1,\ldots,m).$$

§ 8

Рассмотрим простейшие случаи предыдущих теорем.

Пусть $m=0$. Тогда неравенство (30) равносильно следующему:

$$\left|\sum_{x_k<t}(x_k+\pi)\,t_k(x)+\sum_{x_k\geqq t}(x_k-\pi)\,t_k(x)\right|\leqq M.$$

Неравенство (31) в этом случае выглядит так:

$$\lambda_n(x)\leqq M,$$

где

$$\lambda_n(x)=\sum_{k=1}^{N}|t_k(x)|.$$

Как известно, это неравенство не выполняется при всех $x\in[0,2\pi]$ и $n=0,1,2,\ldots$ ни для какой матрицы узлов интерполирования.

При $m=1$ неравенство (31) равносильно следующему:

$$\sum_{l=1}^{N+1}(x_l-x_{l-1})\left|\sum_{k=1}^{l-1}(x_k+\pi)\,t_k(x)+\sum_{k=l}^{N}(x_k-\pi)\,t_k(x)\right|\leqq M, \tag{32}$$

где положено $x_0=0$, $x_{N+1}=2\pi$. Как известно, тригонометрический интерполяционный процесс сходится для некоторой функции $f(x)$ в точке x, если выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x)\,E_n[f]=0. \tag{33}$$

Здесь

$$E_n[f] = \inf_{a_k, b_k} \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right|.$$

Сопоставим это достаточное условие с полученными выше более сложными необходимыми и достаточными условиями на одном примере.

Пусть

$$x_k^{(N)} = \frac{k-1}{N} 2\pi \quad (k = 1, 3, 4, \ldots, N), \quad 0 < x_2^{(N)} < \frac{2\pi}{N^3}.$$

Можно показать, что условие (32) выполнено для всех таких систем узлов в точке $x = \pi$, поэтому по теореме 8 тригонометрическое интерполирование сходится в точке π для всех периодических непрерывно дифференцируемых функций. Очевидно,

$$t_2(x) = \frac{\sin N\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{N}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x_2}{2} - \frac{\pi}{N}\right)}{\sin N\left(\frac{x_2}{2} - \frac{\pi}{N}\right)},$$

$$t_2(\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos\frac{\pi}{N}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N} - \frac{x_2}{2}\right)}{\sin N\frac{x_2}{2}} \sim \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2\pi}{N^2 x_2^{(N)}}.$$

Пусть $f(x)$ любая функция, не являющаяся тригонометрическим многочленом. Тогда $E_n[f] \neq 0$ и поэтому можно положить

$$x_2^{(N)} = \frac{E_n[f]}{N^3 E_0[f]}.$$

В этом случае

$$E_n[f]\, \lambda_n(\pi) \geqq |t_{2,n}(x)|\, E_n[f] \sim 2\pi N E_0[f].$$

Следовательно, условие (33) не выполнено.

§ 9

Будем теперь искать необходимое и достаточное условие сходимости тригонометрического интерполирования в точке $x \in [0, 2\pi]$ или равномерной на всей вещественной оси для функций множества $V_{2\pi}^{(m-1)} (m \geqq 2)$. Так мы обозначаем множество функций, имеющих на отрезке $[0, 2\pi]$ $m-1$ производную с ограниченным изменением и удовлетворяющих следующему условию:

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-2).$$

Прежде всего, преобразуем для этого случая формулу (14). Положив

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)'}(1) \qquad (k=0, 1, \ldots, m-2),$$

мы можем при $m \geqq 2$ переписать ее так:

$$f(x)=\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{m!}\int_0^1 [B_m(x)-\mathcal{B}_m(x-t)]\,df^{(m-1)}(t).$$

Отсюда сразу получается искомое равенство для функций из $V_{2\pi}^{(m-1)}$:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt+\int_0^{2\pi} K_m(x, t)\,df^{(m-1)}(t), \tag{34}$$

где

$$K_m(x, t)=\frac{(2\pi)^{m-1}}{m!}\left[B_m\left(\frac{x}{2\pi}\right)-\mathcal{B}_m\left(\frac{x-t}{2\pi}\right)\right].$$

Следствием формулы (34) является равенство

$$R_n[f(x)]=\int_0^{2\pi} R_n[K_m(x, t)]\,df^{(m-1)}(t). \tag{35}$$

Здесь положено

$$R_n[f(x)]=f(x)-T_n[f(x)].$$

Исходя из этой формулы, как и выше, нетрудно показать, что для сходимости тригонометрического интерполирования в точке x для всех функций из $V_{2\pi}^{(m-1)}$ необходимо, чтобы сущесвовало такое число M, что при всех $t \in [0, 2\pi]$ и $n=0, 1, 2, \ldots$ выполнено следующее неравенство:

$$|R_n[K_m(x, t)]| \leqq M. \tag{36}$$

Однако, теперь мы не знаем будет ли выполнение этого условия достаточным для сходимости, так как в пространстве V функций с ограниченным изменением на отрезке $[0, 2\pi]$ $\left(\text{где } \|\varphi\|=\bigvee\limits_0^{2\pi} \varphi(x)\right)$ множество тригонометрических многочленов не всюду плотно.

Кроме неравенства (36) при всех $t \in (0, 2\pi]$ должно выполняться также следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty} R_n[K_m(x, t)]=0, \tag{37}$$

так как функция $K_m(x, t)$ при всех $t \in (0, 2\pi]$, очевидно, принадлежит множеству $V_{2\pi}^{(m-1)}$.

Покажем, что выполнение полученных необходимых условий достаточно для сходимости тригонометрического интерполирования в точке x для всех $f \in V_{2\pi}^{(m-1)}$.

Как известно, имеет место такая теорема: если последовательность непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций $f_n(t)$ равномерно ограничена и почти везде на $[0, 2\pi]$ сходится к нулю, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f_n(t)\,dt = 0.$$ [4]

Пусть функция $g(t)$ имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ ограниченное изменение. Преобразуя, как обычно, интегралы Стилтьеса

$$\int_0^{2\pi} f_n(t)\,dg(t)$$

в интегралы Римана (см. [6], стр. 211), получаем из предыдущей теоремы такое следствие:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f_n(t)\,dg(t) = 0.$$

Положив

$$f_n(t) = R_n[K_m(x, t)]$$

(эта последовательность ограниченна в силу неравенства (36) и сходится к нулю в силу (37)),

$$g(t) = f^{(m-1)}(t),$$

получаем искомое соотношение

$$\lim_{n\to\infty} R_n[f(x)] = 0.$$

Незначительно видоизменив предыдущие рассуждения, можно найти также условия равномерной сходимости тригонометрического интерполирования на всей вещественной оси для всех функций из $V_{2\pi}^{(m-1)}$

Резюмируем сказанное.

Теорема 9. Для того, чтобы тригонометрический интерполяционный процесс сходился в точке $x \in [0, 2\pi]$ для всех функций из $V_{2\pi}^{(m-1)}$ $(m \geqq 2)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $t \in [0, 2\pi]$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялось неравенство (36) и при всех $t \in (0, 2\pi]$ условие (37). Сходимость равномерна на всей вещественной оси в том и только в том случае, если условие (36) выполнено при всех $x \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, 2\pi]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, а условие (37) выполняется равномерно относительно x при всех $t \in (0, 2\pi]$.

[4] См., например, [9], стр. 114. Там функции $f_n(t)$ считаются лишь суммируемыми.

Пусть $0 \leqq x \leqq 2\pi$; $\delta > 0$; e_1 есть множество значений t, удовлетворяющих одному из неравенств

$$|x-t| \leqq \delta, \qquad |2\pi + x - t| \leqq \delta, \qquad |x - 2\pi - t| \leqq \delta;$$

а e_2 есть множество остальных точек отрезка $[0, 2\pi]$. Имеет место следующая

Теорема 10. Пусть существует такое M, что при всех $x \in [0, 2\pi]$

(38) $$\left|\sum_{k=1}^{l} t_{k,N}(x)\right| \leqq M \qquad (l = 1, 2, \ldots, N;\ N = 1, 3, 5, \ldots),$$

и пусть при любых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $x \in [0, 2\pi]$, $t \in l_2$ существует такое N_0, что при $N > N_0$.

(39) $$\left|\sum_{x_k \leqq t} t_{k,N}(x)\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{если} \quad t < x; \qquad \left|\sum_{x_k > t} t_{k,N}(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad t > x.$$

Тогда тригонометрический интерполяционный процесс равномерно сходится на всей вещественной оси для всех периодических непрерывных функций, имеющих на отрезке $[0, 2\pi]$ ограниченное изменение.

Доказательство. Для непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций $f(x)$, формулу (35) можно переписать следующим образом:

$$R_n[f(x)] = \int_0^{2\pi} R_n[K_1(x,t)]\, df(t).$$

Так как

$$K_1(x, t) = B_1\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \mathfrak{B}_1\left(\frac{x-t}{2\pi}\right) = \begin{cases} \dfrac{t}{2\pi}, & \text{если} \quad t \leqq x, \\ \dfrac{t}{2\pi} - 1 & \text{если} \quad t > x, \end{cases}$$

то

$$R_n[K_1(x, t)] = \begin{cases} \sum\limits_{x_k < t} t_k(x), & \text{если} \quad t \leqq x, \\ -\sum\limits_{x_k \geqq t} t_k(x), & \text{если} \quad t > x. \end{cases}$$

Очевидно,

(40) $$R_n[f(x)] = \int_{e_1} R_n[K_1(x, t)]\, df(t) + \int_{e_2} R_n[K_1(x, t)]\, df(t).$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Так как функция $f(t)$ непрерывна, периодична и имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ ограниченное изменение, то существует такое $\delta > 0$, зависящее лишь от ε, что

$$\bigvee_{e_1} f(t) \leqq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}.$$

По условию (38)

$$|R_n[K_1(x, t)]| \leqq M + 1.$$

Сопоставляя эти два факта, видим, что

$$\left| \int_{c_2} R_n[K_1(x, t)]\, df(t) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

Очевидно,

$$\bigvee_{e_2} f(t) \leqq \bigvee_{0}^{2\pi} f(t).$$

Если $t \in e_2$, то при достаточно больших N по условию (39)

$$|R_n[K_1(x, t)]| \leqq \frac{\varepsilon}{2 \bigvee\limits_{0}^{2\pi} f(t)}.$$

Значит,

$$\left| \int_{e_1} R_n[K_1(x, t)]\, df(t) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{42}$$

Сопоставляя неравенства (41) и (42) и равенство (40), видим, что при достаточно больших N

$$|R_n[K_1(x, t)]| \leqq \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Легко доказать, что условия теоремы выполнены в случае равноотстоящих узлов $x_k^{(N)} = \frac{k-1}{N} 2\pi$. Поэтому теорема Валле-Пуссена, согласно которой тригонометрическое интерполирование в случае равноотстоящих узлов равномерно сходится на всей вещественной оси для непрерывных периодических функций, имеющих на отрезке $[0, 2\pi]$ ограниченное изменение, является следствием теоремы 10.

(Поступило 6. II. 1956.)

Литература

[1] L. Kalmár, Az interpolációról, *Mathematikai és Physikai Lapok*, **30** (1926), стр. 120—159.

[2] Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, Усп. Мат. Наук, **3** (1948), вып. 6 (28).

[3] О. Киш, О сходимости тригонометрического интерполирования периодических аналитических функций, ДАН СССР, **102** (1955), стр. 449—450.

[4] В. И. Крылов, Об определении наименьшей области, голоморфность в которой обеспечивает сходимость эрмитовского интерполирования при любой системе узлов, ДАН СССР, **78** (1951), стр. 857—859.

[5] В. И. Крылов, О сходимости алгебраического интерполирования в классах дифференцируемых функций, ДАН СССР, **105** (1955), стр. 214—217.
[6] А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций (1934).
[7] С. М. Лозинский, Об одной теореме H. Hahn'a, Уч. зап. ЛГУ, вып. 10, № 55 (1940), стр. 84.
[8] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа (1951).
[9] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной (Москва—Ленинград, 1950).
[10] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XX (1935).
[11] H. Hahn, Über das Interpolationsproblem, *Mathematische Zeitschrift,* 1 (1919), стр. 115—142.
[12] Г. Харди, Расходящиеся ряды (1951).

ON THE CONVERGENCE OF THE TRIGONOMETRICAL AND HARMONICAL INTERPOLATION

O. Kis (Budapest)

(Summary)

In this paper necessary and sufficient conditions are given for the uniform convergence of the trigonometrical interpolation for the following classes of functions:

1. the class of periodical analytical functions,
2. the classes of periodical, several times continuously differentiable functions,
3. the classes of periodical, several times absolute continuously differentiable functions,
4. the classes of periodical functions with several derivatives of bounded variation.

Then we give a sufficient condition for the uniform convergence of the trigonometrical interpolation in the space of the continuous functions of bounded variation and we determine the smallest closed domain with the following property: the trigonometrical interpolatory polynomials of the functions, periodical and analytical in the domain, converge uniformly if the fundamental points of the interpolation are arbitrary.

In the proof of the theorems concerning analytical functions we use some results on the interpolation by means of harmonical polynomials of functions which are analytic in the unit circle.

EXTENSION OF MULTIPLICATIVE SET FUNCTIONS WITH VALUES IN A BANACH ALGEBRA

By

A. PRÉKOPA (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

Let X be a given set, and let $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ be some classes of certain subsets of X. We say that $\mathfrak{R}$ is a ring if $A+B \in \mathfrak{R}$, $A-B \in \mathfrak{R}$ whenever $A \in \mathfrak{R}, B \in \mathfrak{R}$. We say that $\mathfrak{S}$ is a σ-ring if it is a ring and if for every sequence $A_1, A_2, \ldots$, where $A_i \in \mathfrak{S}$ $(i=1,2,\ldots)$, the sum $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ is also contained in $\mathfrak{S}$.

Let $\mathfrak{B}$ be a commutative Banach algebra with a unity, i. e. a Banach space, where for all pairs $f \in \mathfrak{B}$, $g \in \mathfrak{B}$ a product $fg=gf$ is defined such that if $h \in \mathfrak{B}$, then $(fg)h=f(gh)$, $(f+g)h=fh+gh$, $\|fg\| \leqq \|f\|\,\|g\|$ and there is an $e \in \mathfrak{B}$ such that $ef=fe=f$, $\|e\|=1$.

I shall consider set functions $f(A)$ defined on the elements of a ring $\mathfrak{R}$ such that the values $f(A)$ lie in $\mathfrak{B}$; $f(A) \in \mathfrak{B}$ for $A \in \mathfrak{R}$.

A real-valued set function $\alpha(A)$ defined on $\mathfrak{R}$ is called of bounded variation if there is a number K such that for every finite sequence of pairwise disjoint sets $A_1, A_2, \ldots, A_r$, $A_i \in \mathfrak{R}$ $(i=1,2,\ldots,r)$, we have

$$\sum_{i=1}^{r} |\alpha(A_i)| \leqq K.$$

Let $g_1, g_2, \ldots$ be a sequence of elements of $\mathfrak{B}$. I say that the infinite product $\prod_{i=1}^{\infty} g_i$ converges if the number of the factors which are equal to 0 is finite and if $g_i \neq 0$ for $i \geqq n_0$, then there is a $g_0 \in \mathfrak{B}$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \left\| g_0 - \prod_{i=n_0}^{n} g_i \right\| = 0.$$

I define the value of the infinite product as g_0 if $n_0=1$ and as

$$\prod_{i=1}^{\infty} g_i = \left(\prod_{i=1}^{n_0-1} g_i \right) g_0$$

if $n_0 > 1$.

A set function $f(A)$ is called multiplicative (completely multiplicative) in $\mathfrak{R}$ if for every $A_1 \in \mathfrak{R}, A_2 \in \mathfrak{R}, A_1 A_2 = 0$ $\left(A_1, A_2, \ldots, A_i A_k = 0 \text{ for } i \neq k, A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}\right)$, the relation

$$(1) \qquad f(A_1 + A_2) = f(A_1) f(A_2) \qquad \left(f(A) = \prod_{i=1}^{\infty} f(A_i)\right)$$

holds. I suppose in this case that $f(0) = e$.

A real-valued set function $\mu(A)$ is called subadditive (completely subadditive) if for every pair A_1, A_2 of disjoint sets of $\mathfrak{R}$ $\left(\text{for every sequence } A_1, A_2, \ldots \text{ of pairwise disjoint sets of } \mathfrak{R}, \text{ for which } A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}\right)$, we have

$$\mu(A) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) \qquad \left(\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\right).$$

The purpose of this paper is the extension of a completely multiplicative set function defined on the ring $\mathfrak{R}$ and satisfying certain conditions, to a completely multiplicative set function defined on $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, which is the smallest σ-ring containing $\mathfrak{R}$. First I prove four lemmas.

§ 1. Lemmas

LEMMA 1. *Let μ be a real-valued, non-negative, completely subadditive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If μ is of bounded variation, then the set function* $\mathrm{Var}_\mu(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$, *i. e. the least upper bound of the sums $\sum_{i=1}^{r} \mu(A_i)$, where $A_i \subset A$, $A_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $A_i A_k = 0$ for $i \neq k$, is a bounded measure*[1] *on the ring $\mathfrak{R}$.*

PROOF. Let $B_1, B_2, \ldots$ be a sequence of pairwise disjoint sets of $\mathfrak{R}$, for which $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathfrak{R}$. Let us choose subsets $A_1, A_2, \ldots, A_r$ of B which

[1] A real-valued, non-negative set function m, defined on a ring $\mathfrak{R}$, is called a measure if for every sequence $B_1, B_2, \ldots$ of disjoint sets of $\mathfrak{R}$, for which $B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathfrak{R}$, we have $m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i)$ and $m(0) = 0$.

are elements of $\mathfrak{R}$ and

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i) + \varepsilon$$

where $\varepsilon > 0$ is a given number. Using the subadditivity of the set function μ, we obtain that

$$\mu(A_i) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i B_k)$$

and thus

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i B_k) + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} \mu(A_i B_k) + \varepsilon \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k) + \varepsilon.$$

This inequality is true for all $\varepsilon > 0$, hence we obtain that

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k).$$

It is trivial that

$$\mathrm{Var}_\mu(B) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}_\mu(B_k)$$

and thus Lemma 1 is proved.

LEMMA 2. *Let $f_1, f_2, \ldots, f_r$ and $g_1, g_2, \ldots, g_r$ be such finite sequences of a Banach algebra, for which*

$$\left\| \prod_{i=1}^{l} f_i \right\| \leqq K, \qquad \left\| \prod_{i=l}^{r} g_i \right\| \leqq K \quad (l = 1, 2, \ldots, r).$$

Then

$$\left\| \prod_{i=1}^{r} f_i - \prod_{i=1}^{r} g_i \right\| \leqq K^2 \sum_{i=1}^{r} \|f_i - g_i\|.$$

PROOF. Starting from the identity

$$\prod_{i=1}^{r} f_i - \prod_{i=1}^{r} g_i = \sum_{i=1}^{r} f_1 \cdots f_{i-1} \, (f_i - g_i) g_{i+1} \cdots g_r$$

and taking the norm in both sides, we obtain the required inequality.

LEMMA 3. *Let $f_1, f_2, \ldots$ be a sequence of elements of a commutative Banach algebra with a unity. If*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|e - f_i\| < \infty,$$

then the infinite product

$$\prod_{i=1}^{\infty} f_i$$

converges to the same element by every ordering of the factors.

PROOF. By the inequality

$$\sum_{i=1}^{\infty} |1-\|f_i\|| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \|e-f_i\| < \infty$$

there is an n_0 such that $\|f_i\| > 0$ for $i \geqq n_0$, and the infinite product of positive numbers

$$\prod_{i=n_0}^{\infty} \|f_i\|$$

is absolutely convergent. Let

$$K = \prod_{i=n_0}^{\infty} (1+|1-\|f_i\||).$$

By Lemma 2, for every pair m, n $(m \geqq n_0, n \geqq n_0)$, we have

$$\left\| \prod_{i=n_0}^{m} f_i - \prod_{i=n_0}^{n} f_i \right\| \leqq K^2 \sum_{i=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \|e-f_i\|.$$

Taking into account our assumption, it follows that there is an f_0 such that $\lim_{n\to\infty} \left\| f_0 - \prod_{i=n_0}^{n} f_i \right\| = 0$. Let $i_1, i_2, \ldots$ be a rearrangement of the sequence n_0, $n_0+1, \ldots$ and let N_n be a number such that the set $n_0, n_0+1, \ldots, N_n$ contains the numbers $i_1, i_2, \ldots, i_n$. If A_n is the following set of integers: $A_n = \{n_0, n_0+1, \ldots, N_n\} - \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, then we have

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} f_{i_k} - \prod_{k=n_0}^{N_n} f_k \right\| \leqq K^2 \sum_{k \in A_n} \|e-f_k\|.$$

This inequality implies the convergence of the product $\prod_{k=1}^{\infty} f_{i_k}$ to the element f_0; this proves our assertion.

LEMMA 4. *Let $\mathfrak{R}$ be a ring and $\mu(A)$ a real- and non-negative-valued subadditive set function defined on the elements of $\mathfrak{R}$ such that the following conditions hold:*

a) *$\mu(A) \leqq K$, $A \in \mathfrak{R}$, where K is a constant;*

b) *if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of pairwise disjoint sets of the ring $\mathfrak{R}$, then*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty.$$

From these conditions it follows that the set function $\mu(A)$ is of bounded variation.

PROOF. Let us suppose that $\mu(A)$ is not of bounded variation and choose such disjoint sets of $\mathfrak{R}$, $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{k_1}^{(1)}$ $(k_1 > 1)$, for which

$$\sum_{l=1}^{k_1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq 2K.$$

Since the set function $\mu(A)$ is subadditive, it follows that at least in one of the sets $\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}$ and $\overline{\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}}$ it is not of bounded variation. Let the set $\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}$ have this property. Then we can find sets of $\mathfrak{R}$, $B_{k_1+1}^{(1)}, B_{k_1+2}^{(1)}, \ldots, B_{k_2}^{(1)}$, which are subsets of $\sum_{l=1}^{k_1} B_l^{(1)}$ and

$$\sum_{l=k_1+1}^{k_2} \mu(B_l^{(1)}) \geqq K.$$

In the same way as before it can be seen that the set function μ is not of bounded variation at least in one of the sets $\sum_{l=1}^{k_2} B_l^{(1)}$ and $\overline{\sum_{l=1}^{k_2} B_l^{(1)}}$ and so on. After a finite number of steps the chain will terminate; indeed, if $\mu(A)$ is not of bounded variation in any of the sets $\sum_{l=1}^{k_r} B_l^{(1)}$, then from the inequality

$$\sum_{l=1}^{k_r} \mu(B_l^{(1)}) \geqq (r+1)K$$

it would follow that the sequence of disjoint sets, $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots$ would have the property

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(B_l^{(1)}) = \infty,$$

but this is impossible because of Condition b). Consequently, there is a number n_1 among the numbers $k_1, k_2, \ldots$ such that $\mu(A)$ is not of bounded variation in the set $\sum_{l=1}^{n_1} B_l^{(1)}$. From the subadditivity of $\mu(A)$ it follows that the variation will be infinite at least in one of the sets $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{n_1}^{(1)}$. This may be the set $B_{n_1}^{(1)}$. Then, since

$$\sum_{l=1}^{n_1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq \sum_{l=1}^{k_1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq 2K$$

holds, we have in view of Condition a)

$$\sum_{l=1}^{n_1-1} \mu(B_l^{(1)}) \geqq K.$$

A repetition of the preceding consideration shows that in the set $B_{n_1}^{(1)}$ there are disjoint sets of $\mathfrak{R}$, $B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \ldots, B_{n_2}^{(2)}$, such that the variation is infinite in the set $B_{n_2}^{(2)}$ and

$$\sum_{l=1}^{n_2-1} \mu(B_l^{(2)}) \geqq K.$$

Carrying on this procedure we may choose a sequence

$$B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_{n_1-1}^{(1)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \dots, B_{n_2-1}^{(2)}, \dots$$

of disjoint sets of $\mathfrak{R}$ such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_k-1} \mu(B_i^{(k)}) = \infty,$$

but, by Condition b), this is a contradiction. This completes the proof of Lemma 4.

§ 2. Extension of completely multiplicative set functions

THEOREM 1. *Let $f(A)$ be a completely multiplicative set function, defined on the ring $\mathfrak{R}$, for which $\|f(A)\| \leqq 1$ $(A \in \mathfrak{R})$. If for every sequence $A_1, A_2, \dots$ of disjoint sets of $\mathfrak{R}$ the relation*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\| < \infty \tag{2}$$

holds, then there is one and only one completely multiplicative set function $f^*(A)$, defined on the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, for which $f^*(A) = f(A)$ if $(A \in \mathfrak{R})$.

If $A_1, A_2, \dots$ is a convergent sequence of sets of $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, then

$$\lim_{k\to\infty} f^*(A_k) = f^*(A).$$

PROOF. Let $A_1, A_2, \dots$ be a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{R}$, for which $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}$. From the inequality

$$\begin{aligned}\|e - f(A_1 + \dots + A_{n+1})\| &= \|e - f(A_1 + \dots + A_n) f(A_{n+1})\| = \\ &= \|e - f(A_{n+1}) + f(A_{n+1}) - f(A_1 + \dots + A_n) f(A_{n+1})\| \leqq \\ &\leqq \|e - f(A_{n+1})\| + \|f(A_{n+1})\| \cdot \|e - f(A_1 + \dots + A_n)\| \leqq \\ &\leqq \|e - f(A_{n+1})\| + \|e - f(A_1 + \dots + A_n)\|\end{aligned}$$

it follows that

$$\left\| e - f\left(\sum_{k=1}^{n+1} A_k\right)\right\| \leqq \sum_{k=1}^{n+1} \|e - f(A_k)\|. \tag{3}$$

Thus the conditions in Lemma 4 for the set function $\|e - f(A)\|$ are fulfilled, hence $\|e - f(A)\|$ is of bounded variation. Taking the limit $n \to \infty$ in the relation (3), we obtain

$$\|e - f(A)\| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \|e - f(A_i)\|. \tag{4}$$

Hence $\mu(A) = \|e - f(A)\|$ is a completely subadditive set function. By Lemma 1,

$\mathrm{Var}_\mu(A)$ is a bounded measure on $\mathfrak{R}$. Let $m(A)$ $(A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}))$ denote the extended measure of $\mathrm{Var}_\mu(A)$ to the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

Let us form a sequence of rings in the following manner: $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ is the ring of the sets which are limits of some convergent sequences of $\mathfrak{R}_0$ and if $\mathfrak{R}_\nu$ is defined for all $\nu < \nu_0 < \omega_1$, then $\mathfrak{R}_{\nu_0}$ is the ring of the sets which are limits of some convergent sequences of the ring $\sum\limits_{\nu < \nu_0} \mathfrak{R}_\nu$. Clearly, $\sum\limits_{\nu} \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

In the sequel we shall use the following remark: if E_n is a sequence of sets of $\mathfrak{R}$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = 0$, then from the inequality

$$\|e - f(E_n)\| \leq m(E_n)$$

we obtain that

$$\lim_{n\to\infty} f(E_n) = e.$$

Let A_n be a convergent sequence of sets of $\mathfrak{R}_0$. In this case

$$\lim_{m,n\to\infty} (A_n - A_m) = \lim_{m,n\to\infty} (A_m - A_n) = 0,$$

hence

$$\begin{aligned}
\|f(A_n) - f(A_m)\| &\leq \|f(A_n) - f(A_n A_m)\| + \|f(A_m) - f(A_n A_m)\| = \\
&= \|f(A_n A_m) f(A_n - A_m) - f(A_n A_m)\| + \|f(A_n A_m) f(A_m - A_n) - f(A_n A_m)\| \leq \\
&\leq \|f(A_n A_m)\| \cdot \|e - f(A_n - A_m)\| + \|f(A_n A_m)\| \cdot \|e - f(A_m - A_n)\| \leq \\
&\leq \|e - f(A_n - A_m)\| + \|e - f(A_m - A_n)\| \to 0 \text{ if } m, n \to \infty.
\end{aligned}$$

Thus the sequence $f(A_n)$ is convergent. Let us define the set function f_1 as follows: if $A \in \mathfrak{R}_1$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ where $A_n \in \mathfrak{R}_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then

$$f_1(A) = \lim_{n\to\infty} f(A_n).$$

We prove that $f_1(A)$ is uniquely determined. Let $A_n \in \mathfrak{R}_0$, $A'_n \in \mathfrak{R}_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ be two sequences such that

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A'_n = A.$$

Clearly,

$$A_n = A_n A'_n + (A_n - A'_n), \qquad A'_n = A_n A'_n + (A'_n - A_n),$$
$$f(A_n) = f(A_n A'_n) f(A_n - A'_n), \qquad f(A'_n) = f(A_n A'_n) f(A'_n - A_n).$$

Since $A_n A'_n \to A$ and

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n - A'_n) = \lim_{n\to\infty} f(A'_n - A_n) = e,$$

it follows that the sequence $f(A_n A'_n)$ converges and

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n) = \lim_{n\to\infty} f(A'_n) = \lim_{n\to\infty} f(A_n A'_n).$$

The uniqueness of the set function f_1 implies that $f_1(A) = f(A)$ for $A \in \mathfrak{R}_0$.

$f_1(A)$ is a multiplicative set function on $\mathfrak{R}_1$. In fact, if A and B are disjoint sets of $\mathfrak{R}_1$, $A=\lim_{n\to\infty} A_n$, $B=\lim_{n\to\infty} B_n$, $A_n\in\mathfrak{R}_0$, $B_n\in\mathfrak{R}_0$ $(n=1,2,\ldots)$, then since $f(A)$ is a multiplicative set function on $\mathfrak{R}_0$, we have

$$f_1(A+B)=\lim_{n\to\infty} f(A_n+(B_n-A_n))=\lim_{n\to\infty} f(A_n)f(B_n-A_n)=f_1(A)f_1(B).$$

We prove that $f_1(A)$ is a completely multiplicative set function on $\mathfrak{R}_1$. First we prove that if $\mu_1(A)=\|e-f_1(A)\|$, $A\in\mathfrak{R}_1$ and if $B\in\mathfrak{R}_1$, then $\mathrm{Var}_{\mu_1}(B)\leqq\leqq m(B)$. In fact, if $B_1, B_2, \ldots, B_r$ are disjoint sets of $\mathfrak{R}_1$ for which $B_i\subseteq B$ $(i=1,2,\ldots,r)$ and $B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \ldots, B_r^{(n)}$ are sequences of sets of $\mathfrak{R}_0$ for which $B_i=\lim_{n\to\infty} B_i^{(n)}$ $(i=1,2,\ldots,r)$, $B_i^{(n)}B_k^{(n)}=0$ for $i\neq k$, $n=1,2,\ldots$, then

$$\sum_{i=1}^{r}\|e-f(B_i^{(n)})\|\leqq m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i^{(n)}\right)\qquad (n=1,2,\ldots).$$

If $n\to\infty$, we obtain

$$\sum_{i=1}^{r}\|e-f_1(B_i)\|\leqq m\left(\sum_{i=1}^{r} B_i\right)\leqq m(B),$$

which proves the assertion.

If $B_1, B_2, \ldots$ is a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{R}_1$, $B=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\in\mathfrak{R}_1$, then from the inequality

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|e-f_1(B_k)\|\leqq m(B)$$

it follows the convergence of the infinite product $\prod_{k=1}^{\infty} f_1(B_k)$. As $f_1(B)$ is multiplicative on $\mathfrak{R}_1$, if $C_n=\sum_{k=n}^{\infty} B_k$, we obtain

$$\left\|f_1(B)-\prod_{k=1}^{n} f_1(B_k)\right\|=\left\|\left(\prod_{k=1}^{n} f_1(B_k)\right)f_1(C_{n+1})-\prod_{k=1}^{n} f_1(B_k)\right\|\leqq$$
$$\leqq\|e-f_1(C_{n+1})\|\leqq m(C_{n+1})\to 0 \text{ if } n\to\infty,$$

hence $f_1(B)$ is a completely multiplicative set function on the ring $\mathfrak{R}_1$.

Such as for $\mathfrak{R}_0$, we can prove also for $\mathfrak{R}_1$ that the set function $\mu_1(A)==\|e-f_1(A)\|$ $(A\in\mathfrak{R}_1)$ is completely subadditive and of bounded variation. By Lemma 1, $\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)$ is a bounded measure on $\mathfrak{R}_1$. We have seen that if $A\in\mathfrak{R}_0\subseteq\mathfrak{R}_1$, then

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)\leqq m(A).$$

On the other hand, since $\mathfrak{R}_0\subseteq\mathfrak{R}_1$, we have

$$\mathrm{Var}_{\mu}(A)\leqq\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)\quad\text{for}\quad A\in\mathfrak{R}_0.$$

Thus

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)=m(A) \quad \text{if} \quad A\in\mathfrak{R}_0,$$

and since the extension of a bounded measure is uniquely determined, we obtain

$$\mathrm{Var}_{\mu_1}(A)=m(A) \quad \text{if} \quad A\in\mathfrak{R}_1.$$

Let us suppose that for every ordinal number ν for which $\nu<\nu_0<\omega_1$, a completely multiplicative set function $f_\nu(A)$ $(A\in\mathfrak{R}_\nu)$ is defined satisfying

$$f_\nu(A)=f_{\nu'}(A) \quad \text{if} \quad A\in\mathfrak{R}_{\nu'},\ \nu'<\nu$$

and

$$\mathrm{Var}_{\mu_\nu}(A)=m(A) \quad \text{where} \quad \mu_\nu=\|e-f_\nu(A)\|,\ A\in\mathfrak{R}_\nu.$$

Let us define a set function g_{ν_0} on the ring $\sum\limits_{\nu<\nu_0}\mathfrak{R}_\nu$ as follows:

$$g_{\nu_0}(A)=f_\nu(A) \quad \text{if} \quad A\in\mathfrak{R}_\nu,\ \nu<\nu_0.$$

Obviously, g_{ν_0} is a multiplicative set function. We shall prove that it is also completely multiplicative. In fact, if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of disjoint sets of the ring $\sum\limits_{\nu<\nu_0}\mathfrak{R}_\nu$, $A=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\in\sum\limits_{\nu<\nu_0}\mathfrak{R}_\nu$, then

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|e-g_{\nu_0}(A_k)\|\leqq m(A),$$

hence the infinite product $\prod\limits_{k=1}^{\infty}g_{\nu_0}(A_k)$ converges. Since

$$g_{\nu_0}(A)=\left(\prod_{k=1}^{n}g_{\nu_0}(A_k)\right)g_{\nu_0}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k\right),$$

it follows that

$$\left\|g_{\nu_0}(A)-\prod_{k=1}^{n}g_{\nu_0}(A_k)\right\|\leqq\left\|e-g_{\nu_0}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k\right)\right\|\leqq m\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k\right)\to 0 \text{ if } n\to\infty$$

whence

$$g_{\nu_0}(A)=\prod_{k=1}^{\infty}g_{\nu_0}(A_k).$$

Such as we have constructed the set function f_1 we can construct the set function f_{ν_0} defined on $\mathfrak{R}_{\nu_0}$ with the aid of the set function g_{ν_0} defined on $\sum\limits_{\nu<\nu_0}\mathfrak{R}_\nu$ and it is easy to see that f_{ν_0} has the properties what we have supposed in the transfinite induction.

Let us define the set function $f^*(A)$ $(A\in\mathfrak{S}(\mathfrak{R}))$ in the following manner:

$$f^*(A)=f_\nu(A) \quad \text{if} \quad A\in\mathfrak{R}_\nu.$$

$f^*(A)$ is a completely multiplicative set function. In fact, if $A_1, A_2, \ldots$ is a

sequence of disjoint sets of the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})=\sum_{\nu}\mathfrak{R}_\nu$ and $A_k\in\mathfrak{R}_{\nu_k}$ $(k=1,2,\ldots)$, then there is a $\nu'<\omega_1$ such that $\nu_k<\nu'$ $(k=1,2,\ldots)$. It follows that $A_k\in\mathfrak{R}_{\nu'}$ $(k=1,2,\ldots)$, $\sum_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathfrak{R}_{\nu'}$, hence

$$f^*\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=f_{\nu'}\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}f_{\nu'}(A_k)=\prod_{k=1}^{\infty}f^*(A_k).$$

By the same way we can prove that if A_n is a convergent sequence of sets of $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, $\lim_{n\to\infty}A_n=A$, then

$$\lim_{n\to\infty}f^*(A_n)=f^*(A).$$

Proof of the uniqueness of the extension. Let f^{**} be a completely multiplicative set function defined on the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$. First we remark that if $A_1,A_2,\ldots$ is a non-decreasing sequence of sets of $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, $\lim_{n\to\infty}A_n=A$, then

$$f^{**}(A)=\left(\prod_{k=1}^{\infty}f^{**}(A_{k+1}-A_k)\right)f^{**}(A_1)=f^{**}(A_1)\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}f^{**}(A_{k+1}-A_k),$$

hence

$$f^{**}(A)=\lim_{n\to\infty}f^{**}(A_n). \tag{5}$$

Let us suppose that the set functions f^*,f^{**} coincide on the ring $\sum_{\nu<\nu_0}\mathfrak{R}_\nu$,

$$f^*(A)=f^{**}(A)\quad\text{if}\quad A\in\sum_{\nu<\nu_0}\mathfrak{R}_\nu.$$

We shall prove that f^* and f^{**} coincide on the ring $\mathfrak{R}_\nu$, too.

Let $B_1,B_2,\ldots$ be a non-increasing sequence of sets of $\sum_{\nu<\nu_0}\mathfrak{R}_\nu$, $\lim_{n\to\infty}B_n=B$. The set functions f^*,f^{**} are completely multiplicative, hence

$$f^*(B_n)=f^*(B)\prod_{k=n}^{\infty}f^*(B_k-B_{k+1}),$$

$$f^{**}(B_n)=f^{**}(B)\prod_{k=n}^{\infty}f^{**}(B_k-B_{k+1}).$$

Taking into account our assumption, we obtain

$$f^*(B_n-B)=\prod_{k=n}^{\infty}f^*(B_k-B_{k+1})=\prod_{k=n}^{\infty}f^{**}(B_k-B_{k+1}),$$

$$f^*(B_n)=f^{**}(B_n),$$

hence

$$f^*(B)f^*(B_n-B)=f^{**}(B)f^*(B_n-B).$$

Since $\lim_{n\to\infty}f^*(B_n-B)=e$, it follows that $f^*(B)=f^{**}(B)$.

Let $C_1, C_2, \ldots$ be a convergent sequence of sets of $\sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, $\lim_{n\to\infty} C_n = C$. Let

$$A_n = C_n C_{n+1} \ldots, \quad A_{r,n} = C_n C_{n+1} \ldots C_{n+r} \qquad (r, n = 1, 2, \ldots).$$

Obviously, $A_{r,n} \in \sum_{\nu<\nu_0} \mathfrak{R}_\nu$, $A_{r,n} \subseteq C_n$, $A_{r,n} \supseteq A_{r+1,n}$. Hence we conclude

$$f^{**}(C_n) = f^{**}(C_n - A_{r,n}) f^{**}(A_{r,n}) = f^*(C_n - A_{r,n}) f^{**}(A_{r,n}). \tag{6}$$

Since $\lim_{r\to\infty} A_{r,n} = A_n$ and for every fixed n the sequence $A_{1,n}, A_{2,n}, A_{3,n}, \ldots$ is non-increasing, we have

$$\lim_{r\to\infty} f^{**}(A_{r,n}) = \lim_{r\to\infty} f^*(A_{r,n}) = f^*(A_n) = f^{**}(A_n). \tag{7}$$

On the other hand, we know that

$$\lim_{r\to\infty} f^*(C_n - A_{r,n}) = f^*(C_n - A_n), \tag{8}$$

hence by (6), (7) and (8) we can write

$$f^{**}(C_n) = f^*(C_n - A_n) f^{**}(A_n). \tag{9}$$

The sequence $A_1, A_2, \ldots$ is non-decreasing, $\lim_{n\to\infty} A_n = C$, hence by (5) we obtain

$$\lim_{n\to\infty} f^{**}(A_n) = f^{**}(C). \tag{10}$$

We know furthermore that

$$\lim_{n\to\infty} f^{**}(C_n) = \lim_{n\to\infty} f^*(C_n) = f^*(C), \quad \lim_{n\to\infty} f^*(C_n - A_n) = e. \tag{11}$$

Taking the limit $n \to \infty$ in the relation (9), (10) and (11) imply

$$f^*(C) = f^{**}(C).$$

By the principle of transfinite induction it follows that the set functions f^*, f^{**} coincide on the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \sum_\nu \mathfrak{R}_\nu$. Thus Theorem 1 is proved.

THEOREM 2. *Let $\mathfrak{R}$ be a ring and $f(A)$ a completely multiplicative set function, defined on the ring $\mathfrak{R}$, for which $f(A) \in \mathfrak{B}$, $A \in \mathfrak{R}$. Let us further suppose that there is a bounded, completely additive, real-valued set function $\varphi(A)$, defined on the ring $\mathfrak{R}$, for which*

$$\|f(A)\| \leqq 2^{\varphi(A)} \qquad (A \in \mathfrak{R}), \tag{12}$$

and that for every sequence A_k of disjoint sets of $\mathfrak{R}$ we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\| < \infty.$$

In this case there is a uniquely determined completely multiplicative set function $f^*(A)$, defined on the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, for which $f^*(A) = f(A)$ if $A \in \mathfrak{R}$; for

every convergent sequence $A_1, A_2, \ldots$ *of the* σ*-ring* $\mathcal{S}(\mathfrak{R})$ *we have*

$$\lim_{k\to\infty} f^*(A_k) = f^*(A)$$

where $A = \lim_{k\to\infty} A_k$.

PROOF. Let us consider the set function $g(A) = 2^{-\varphi(A)} f(A)$. I prove that $g(A)$ satisfies the conditions of Theorem 1. By (12), $\|g(A)\| \leqq 1$. Furthermore

$$\|e - g(A)\| = \|e - e2^{-\varphi(A)} + e2^{-\varphi(A)} - 2^{-\varphi(A)} f(A)\| \leqq$$

$$\leqq |1 - 2^{-\varphi(A)}| + \|e - f(A)\| 2^{-\varphi(A)} \leqq K(|\varphi(A)| + \|e - f(A)\|), \tag{13}$$

where K is a positive constant, hence if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{R}$, then by (13) we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|e - g(A_k)\| \leqq K\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(A_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} \|e - f(A_k)\|\right) < \infty.$$

Let $g^*(A)$ and $\varphi^*(A)$ denote the extended set functions corresponding to the set functions $g(A)$ and $\varphi(A)$, respectively. Clearly, the set function

$$f^*(A) = 2^{\varphi^*(A)} g^*(A) \qquad (A \in \mathcal{S}(\mathfrak{R}))$$

is completely multiplicative and $f^*(A) = f(A)$ for $A \in \mathfrak{R}$. If $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of sets of $\mathcal{S}(\mathfrak{R})$, $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, then by Theorem 1 we have

$$\lim_{k\to\infty} g^*(A_k) = g^*(A)$$

whence

$$\lim_{k\to\infty} f^*(A_k) = f^*(A).$$

Thus Theorem 2 is proved.

REMARK. If for every $A \in \mathfrak{R}$ the inequality $0 < \delta_1 \leqq \|f(A)\| \leqq \delta_2$ holds, where δ_1, δ_2 are constants, and if

$$\|f(A)f(B)\| = \|f(A)\|\,\|f(B)\|, \tag{14}$$

where $A \in \mathfrak{R}, B \in \mathfrak{R}, AB = 0$, then for the set function $f(A)$ the condition (12) of Theorem 2 is fulfilled. In fact, for $\varphi(A) = \log_2 \|f(A)\|$ the relation (12) holds. For instance, (14) holds in the Banach algebra of the complex numbers.

Finally, I express my thanks to Á. CSÁSZÁR for his valuable remarks.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 26 January 1956)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА СО ЗНАЧЕНИЯМИ ИЗ АЛГЕБРЫ БАНАХА

А. Прекопа (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $\mathfrak{B}(f, g, \ldots)$ есть некоторая коммутативная алгебра Банаха с единичным элементом. Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k, \qquad f_k \in \mathfrak{B} \quad (k=1, 2, \ldots)$$

называется сходящимым, если существует такое n_0, что $f_k \neq 0$, если $k \geqq n_0$, и существует такое $f_0 \in \mathfrak{B}$, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f_0 - \prod_{k=1}^{n} f_k \right\| = 0.$$

Пусть $\mathfrak{R}$ есть некоторое кольцо множеств. Определенная на элементах кольца $\mathfrak{R}$ функция $f(A)$ $(f(A) \in \mathfrak{B}$, если $A \in \mathfrak{R})$ называется вполне мультипликативной, если для всякой последовательности непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots$ из $\mathfrak{R}$, для которой $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, имеет место соотношение

$$f(A) = \prod_{k=1}^{\infty} f(A_k).$$

Предмет работы — распространение вполне мультипликативных функций множества, удовлетворяющих некоторым условиям, на наименьшее σ-кольцо $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, содержащее кольцо $\mathfrak{R}$.

ON STOCHASTIC SET FUNCTIONS. I

By

A. PRÉKOPA (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

The theory of stochastic processes, as it has been founded by KOLMOGOROV in 1931, originally dealt with the mathematical treatment of random time processes. In later years, however, there arose many practical problems which are not random time processes but the method of solution of which was similar to those used in the theory of stochastic processes. Such problems occur e. g. when investigating the spatial distribution of stars or colloid particles, when counting bloodcells, when investigating the quantity of rain or crop in a given area etc.

There is, however, an essential difference between the mathematical models of the above mentioned problems and that of those described by random time processes. In a time process we are generally interested only in the state of the system at the moment t, which is characterised by a random variable ξ_t, when considering the random distribution of points in the plane, however, the state of the point system will be described most perfectly by random variables attached to sets of the plane and not by such that are attached to the points of the plane. If A is a set of the plane, then there corresponds to A a random variable $\xi(A)$ which gives the number of points in the set A. Thus $\xi(A)$ is a *random set function*.

The subject of this paper is the investigation of some problems concerning such random set functions. I introduce the notions of *stochastic additive* and *stochastic completely additive* set functions and examinate problems some of which are generalizations of problems arising in the theory of real-valued set functions or similar to them and some of which are of probabilistic nature.

DEFINITION 1. *Let $\mathfrak{R}$ be a ring consisting of some subsets of a space H. Suppose that to every element A of $\mathfrak{R}$ there corresponds a random variable $\xi(A)=\xi(\omega, A)$ such that if $A_1, A_2, \ldots, A_r$ are disjoint sets belonging to the*

ring $\mathfrak{R}$, then the random variables $\xi(A_1), \xi(A_2), \ldots, \xi(A_r)$ are independent and

$$(1) \qquad \xi(A) = \sum_{k=1}^{r} \xi(A_k);$$

in this case $\xi(A)$ will be called a stochastic additive set function.

DEFINITION 2. *A stochastic additive set function $\xi(A)$ defined on a ring $\mathfrak{R}$ will be called a stochastic completely additive set function if for every sequence $A_1, A_2, \ldots$ of disjoint sets of $\mathfrak{R}$, for which $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, the equality*

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

is satisfied.

For the sake of brevity, the word "stochastic" will be omitted and if an ordinary real-valued additive (or completely additive) set function will be considered, this will be mentioned explicitly.

The idea of random set functions has appeared first in a paper of S. BOCHNER [2]. The notion introduced by him is similar to that introduced by Definition 1 but in [2] it is not required that the random variables belonging to disjoint sets should be independent. It is possible to make further generalizations, for instance, taking instead of the ring $\mathfrak{R}$ a Boolean algebra, or instead of a single random variable $\xi(A)$ a random vector $\vec{\xi}(A) = (\xi_1(A), \xi_2(A), \ldots, \xi_n(A))$ etc. Some special random set functions have been considered by H. CRAMÉR [3], E. MARCZEWSKI [9], C. RYLL-NARDZEWSKI [12], further by A. BLANÇ-LAPIERRE and R. FORTET [1].

From the point of view of practical applications it is important that if e. g. H is some finite-dimensional Euclidean space, there should correspond a random variable to any sphere, domain, and eventually even to more complicated sets. As it will be shown in § 1 of Chapter III, by the construction of KOLMOGOROV ([6], § 4) we can construct stochastic additive set functions which are defined on intervals or on finite sums of intervals but the general problem cannot be solved by this method. In order to get further we have to deal with the problem of the *extension* of stochastic set functions.

The main purpose of this paper is the extension of a stochastic completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$ and satisfying certain conditions, to the smallest σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ which contains $\mathfrak{R}$.

The extension of some special stochastic set functions defined on sets of Euclidean spaces has been considered by H. CRAMÉR [3], E. MARCZEWSKI [9] and C. RYLL-NARDZEWSKI [12]. The theorems of the present paper contain as special cases the relevant theorems of [9] and [12]. In [3] a theorem

is proved concerning the extension of a random set function generated by the differences of an ordinary one-dimensional stochastic process.

The problem of extension of stochastic set functions is a generalization of the convergence problem of the series of independent random variables. Namely, if $\xi_1, \xi_2, \dots$ is a sequence of independent random variables and $\mathfrak{R}$ is the ring of the finite sets of the natural numbers, then the set function

$$\xi(A) = \sum_{k \in A} \xi_k \qquad (A \in \mathfrak{R})$$

can be extended to the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ if and only if the series $\sum_{k=1}^{\infty}{}' \xi_k$ converges with probability 1 regardless of the order of summation ([4], p. 118, Corollary 1).

There is also another way to construct the theory of random set functions. The theory of stochastic processes can be built up by considering the space of functions of a real variable and defining a measure in this space. As it has been proved by E. HOPF [5] the same procedure can be carried out also in the space of additive set functions defined on a ring $\mathfrak{R}$. The measure thus defined is, however, only finitely additive. From several points of view, however, it is necessary that the probability should be completely additive. Thus the extension problem arises in another connection also here. But in this case the fulfilment of the conditions ensuring the possibility of extension is not a simple problem even in particular cases.

The notion of a stochastic additive set function is in some sense a generalization of the notion of a process with independent increments. Namely, we are often interested in the differences $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ only; these and their finite sums can, however, be regarded as a stochastic additive set function.

I wish to express my thanks to Professors A. RÉNYI, B. SZŐKEFALVI-NAGY and Á. CSÁSZÁR for their valuable remarks.

Definitions and notations

Let H be an arbitrary set and $\mathfrak{R}$ a class of sets of some subsets of H. The class $\mathfrak{R}$ of sets will be called a *ring* if $A+B \in \mathfrak{R}$, $A-B \in \mathfrak{R}$, provided that $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$. If $H \in \mathfrak{R}$, then $\mathfrak{R}$ is called an *algebra*. If for an arbitrary sequence $A_1, A_2, \dots$ of sets of the ring (algebra) $\mathfrak{R}$ we have $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, then $\mathfrak{R}$ will be called a *σ-ring* (*σ-algebra*). If $\mathfrak{R}$ is a ring (σ-ring) and $A \in \mathfrak{R}$, then $A\mathfrak{R}$ denotes the algebra (σ-algebra), the elements of which are those subsets of A which belong to the ring $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ denotes the smallest σ-ring containing the ring $\mathfrak{R}$.

A real-valued, non-negative set function $m(A)$ defined on the elements of a ring $\mathfrak{R}$ will be called a *measure*, if for every sequence $A_1, A_2, \ldots$ of disjoint sets of $\mathfrak{R}$ for which $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$ we have

(2) $$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

If $m(A)$ may have also negative values but the relation (2) holds without any restriction, then $m(A)$ will be called a *completely additive set function.*

The n-dimensional Euclidean space is denoted by R_n. If A is a Lebesgue measurable set of the space R_n, then $|A|$ denotes its n-dimensional Lebesgue measure.

The random variables which we consider in this paper are all supposed to be defined on the same space of elementary events Ω. The elements of Ω are denoted by ω. We suppose that there is a σ-algebra $\mathfrak{S}$ consisting of some subsets of the space Ω and on the elements of $\mathfrak{S}$ a probability measure $\mathbf{P}$ is defined for which $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. The measurable functions defined on the space Ω, which are finite-valued almost everywhere, are called *random variables.* If ξ and η are two random variables, then the relation $\xi = \eta$ means that

$$\mathbf{P}(\xi = \eta) = 1.$$

Inequalities between random variables have similar meaning. If $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is a sequence of random variables, then the relation $\xi_k \to \xi$ (or $\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi$) denotes that

$$\mathbf{P}(\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi) = 1.$$

The relation $\xi_k \Rightarrow \xi$ (or $\lim_{k\to\infty} \text{st}\, \xi_k = \xi$) denotes that for every positive ε

(3) $$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(|\xi_k - \xi| > \varepsilon) = 0.$$

If $f_k(t)$ and $f(t)$ are the characteristic functions of ξ_k and ξ, respectively, and $f_k(t) \to f(t)$ for every value of t (or what is the same, the convergence is uniform in every finite t-interval), then this will be expressed by

(4) $$f_k(t) \Rightarrow f(t).$$

(4) follows from (3), and if $\xi = 0$, then (3) follows from (4).

If ξ is a random variable and for the real number $Q(\lambda)$ the relations

$$\mathbf{P}(\xi \leqq Q(\lambda)) \geqq \lambda, \quad \mathbf{P}(\xi \geqq Q(\lambda)) \geqq 1-\lambda$$

(where $0 < \lambda < 1$) are satisfied, then the number $Q(\lambda)$ will be called *a λ-quantile* of the random variable ξ.

I. AUXILIARY THEOREMS

§ 1. Set functions which are subadditive or of bounded variation

DEFINITION. Let $\mathfrak{A}(A, B, \ldots)$ be a class of sets. A real-valued set function $\alpha(A)$ defined on the elements of $\mathfrak{A}$ will be called *of bounded variation* if there is a number K such that for every system of sets $A_1, A_2, \ldots, A_r$, consisting of disjoint sets belonging to $\mathfrak{A}$, the relation

$$\sum_{k=1}^{r} |\alpha(A_k)| \leqq K$$

holds.

The smallest number K for which the preceding inequality holds, is called *the variation* of α. If only sets $A_k \subseteq A$ $(k=1, 2, \ldots, r)$ are admitted, then the number

$$\sup_{\{A_k\}} \sum_{k=1}^{r} |\alpha(A_k)|$$

will be called *the variation of the set function α in A*. We denote this quantity by $\mathrm{Var}_\alpha(A)$.

DEFINITION. Let $\mathfrak{A}(A, B, \ldots)$ be a class of sets and $\alpha(A)$ a real-valued set function defined on the elements of $\mathfrak{A}$. We call the set function α *subadditive* (*superadditive*) if for every system $A_1, A_2, \ldots, A_r$, consisting of disjoint sets belonging to $\mathfrak{A}$, for which $A = \sum_{k=1}^{r} A_k \in \mathfrak{A}$, the relation

$$\alpha(A) \leqq \sum_{k=1}^{r} \alpha(A_k) \qquad \left(\alpha(A) \geqq \sum_{k=1}^{r} \alpha(A_k)\right)$$

holds.

If a set function α is both subadditive and superadditive, we say that α is an *additive set function*. If in the above inequality r may be also infinite, then α will be called *completely subadditive* (*completely superadditive*).

If α is a set function of bounded variation, then the set function $\mathrm{Var}_\alpha(A)$ is obviously completely superadditive. We shall often use the following theorems which are proved in [11].

THEOREM 1. 1. *Let $\mathfrak{R}$ be a ring and α a real-valued, non-negative set function defined on $\mathfrak{R}$ for which the following conditions are satisfied:*

a) *$\alpha(A) \leqq K$ where K is a constant;*

b) *$\alpha(A)$ is subadditive;*

c) *if* $A_1, A_2, \ldots$ *is a sequence of disjoint sets of* $\mathfrak{R}$, *then*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k) < \infty.$$

Under these conditions $\alpha(A)$ *is of bounded variation.*

THEOREM 1.2. *Let* $\mathfrak{R}$ *be a ringand* $\alpha(A)$ *a completely subadditive set function of bounded variation. Then the set function* $\mathrm{Var}_\alpha(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ *is a bounded measure on* $\mathfrak{R}$.

§ 2. Some inequalities

In this § we derive some inequalities which we shall use later. In advance we mention the following elementary inequalities:

$$1-\frac{\sin x}{x} \geqq \frac{x^2}{8} \quad \text{if} \quad |x| \leqq 1,$$

$$1-\frac{\sin x}{x} \geqq 1-\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{if} \quad 0<\varepsilon \leqq 1 \text{ and } |x| \geqq \varepsilon,$$

$$1-\frac{\sin x}{x} > \frac{1}{10} \quad \text{if} \quad |x| \geqq 1.$$

Let ξ be a random variable, $F(x)$ and $f(t)$ denote its distribution function and characteristic function, respectively. If $0<\varepsilon \leqq 1$, then using the preceding inequalities we obtain

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |1-f(t)|\,dt \geqq \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} (1-f(t))\,dt\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{itx})\,dF(x)\,dt\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)dF(x) \geqq \frac{1}{8}\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x) + \left(1-\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)\mathbf{P}(|\xi|>\varepsilon).$$

Hence

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |1-f(t)|\,dt \geqq \min\left(\frac{1}{8}, 1-\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x) + \mathbf{P}(|\xi|>\varepsilon)\right]. \tag{1.1}$$

Let δ be an arbitrary positive number. Then analogously we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |1-f(t)|\,dt &\geqq \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF(x) \geqq \\ &\geqq \int_{|x|>\frac{1}{\delta}}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF(x) \geqq \frac{1}{10}\mathbf{P}\left(|\xi|>\frac{1}{\delta}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

We shall often use the following well-known inequality: if $f(t)$ is a characteristic function, then

$$1-\Re f(2t)\leqq 4(1-\Re f(t))^{1} \tag{1.3}$$

(see e. g. [5], p. 61).

The following theorem is a straightforward generalization of a lemma in [4], p. 113.

THEOREM 1.3. *Let ξ be a random variable and denote $Q(\lambda)$ a λ-quantile of ξ. Let z be an arbitrary real number and $s(x)$ a non-negative function such that if $x\geqq z$, then $s(x)$ is non-decreasing and if $x\leqq z$, it is non-increasing. We suppose further that $M[s(\xi-\eta)]$ exists where η is a random variable having the same distribution as ξ and independent of ξ. Under these conditions $M[s(\xi-Q(\lambda))]$ also exists and the following inequality holds:*

$$M[s(\xi-\eta)]\geqq \min(\lambda, 1-\lambda)M[s(\xi-Q(\lambda))]. \tag{1.4}$$

PROOF. Let $\xi_1=\xi-Q(\lambda)$, $\eta_1=\eta-Q(\lambda)$. Then the value 0 is a λ-quantile of ξ_1. Denote $F_1(x)$ the common distribution function of ξ_1 and η_1. Then we have

$$\begin{aligned}M[s(\xi-\eta)]&=M[s(\xi_1-\eta_1)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(x-y)\,dF_1(x)\,dF_1(y)\geqq\\ &\geqq\int_{x\geqq z,\ y\leqq 0}\int s(x-y)\,dF_1(x)\,dF_1(y)+\int_{x<z,\ y\geqq 0}\int s(x-y)\,dF_1(x)\,dF_1(y)\geqq\\ &\geqq\int_{y\leqq 0}dF_1(y)\int_{x\geqq z}s(x)\,dF_1(x)+\int_{y\geqq 0}dF_1(y)\int_{x<z}s(x)\,dF_1(x)\geqq\\ &\geqq\min(\lambda, 1-\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}s(x)\,dF_1(x)=\min(\lambda, 1-\lambda)M[s(\xi-Q(\lambda))].\end{aligned}$$

COROLLARY. *If $s(x)$ is the function defined by*

$$s(x)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad |x|\leqq\varepsilon,\\ 1 & \text{if}\quad |x|>\varepsilon\end{cases}\qquad(\varepsilon>0),$$

then the inequality (1.4) *gives*

$$\mathbf{P}(|\xi-\eta|>\varepsilon)\geqq\min(\lambda, 1-\lambda)\mathbf{P}(|\xi-Q(\lambda)|>\varepsilon). \tag{1.5}$$

From the inequalities (1.2) *and* (1.5) *it follows that*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-|f(t)|^2)\,dt&>\frac{1}{10}\mathbf{P}\left(|\xi-\eta|>\frac{1}{\delta}\right)\geqq\\ &\geqq\frac{\min(\lambda, 1-\lambda)}{10}\mathbf{P}\left(|\xi-Q(\lambda)|>\frac{1}{\delta}\right).\end{aligned} \tag{1.6}$$

[1] $\Re_z$ denotes the real part of the complex number z.

§. 3 Boundedness of sets of quantiles

Let Z be an arbitrary set and ξ_z $(z \in Z)$ a family of random variables. Denote by $Q(\lambda, z)$ a λ-quantile of the variable ξ_z. If for every z we choose a $Q(\lambda, z)$, then we obtain a set: $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ (this set is uniquely determined or not according to whether the quantiles $Q(\lambda, z)$ for every z being uniquely determined or not).

Let us define the following quantities:

$$\mu_1 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{z \in Z} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon), \quad \mu_2 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{z \in Z} \mathbf{P}(\xi_z > \varepsilon).$$

The connection between the variables ξ_z and the quantities μ_1, μ_2 is shown by the following

THEOREM 1. 4. *If the quantiles $Q(\lambda, z)$ can be chosen in such a way that the set $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ is bounded from below (from above), then we have*

$$(1.7) \qquad \mu_1 \leqq \lambda \quad (\mu_2 \leqq 1 - \lambda).$$

If the quantiles $Q(\lambda, z)$ can be chosen in such a way that the set $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ is not bounded from below (from above), then

$$(1.8) \qquad \mu_1 \geqq \lambda \quad (\mu_2 \geqq 1 - \lambda).$$

PROOF. Let us first prove the first half of the inequalities (1. 7) and (1. 8). The proof of the statements in the brackets proceeds in a similar way. Suppose that there is a number $K(\lambda)$ for which the inequality $Q(\lambda, z) \geqq \geqq K(\lambda)$ $(z \in Z)$ holds with a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda, z)$, and suppose that $\mu_1 > \lambda$. Then, for every ε, the relation

$$\sup_{z \in Z} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon) > \lambda$$

will be fulfilled. Let ε_0 be a number such that $-\varepsilon_0 \leqq K(\lambda)$ and let us choose a z_0 for which

$$\mathbf{P}(\xi_{z_0} < -\varepsilon_0) > \lambda.$$

Hence it follows that for every λ-quantile $Q(\lambda, z_0)$ of the variable ξ_{z_0} the relation

$$Q(\lambda, z_0) < -\varepsilon_0 \leqq K(\lambda)$$

holds which is a contradiction. Consequently, the first half of (1. 7) is true.

Now suppose that the set $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ is not bounded from below with a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda, z)$. Then, for every ε, we can find a z_ε such that

$$\mathbf{P}(\xi_{z_\varepsilon} < -\varepsilon) \geqq \lambda.$$

It follows that for every ε the relation

$$\sup_{z \in Z} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon) \geqq \lambda$$

holds, hence

$$\mu_1 = \lim_{\varepsilon\to\infty} \sup_{z\in Z} \mathbf{P}(\xi_z < -\varepsilon) \geqq \lambda.$$

Thus we have proved also the first half of (1. 8).

Corollary. *It follows from the inequalities* (1.7) *and* (1.8) *that, for every fixed value of* λ $(0<\lambda<1)$, *the sets*[2] $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ *will be bounded from below (from above) if and only if* $\mu_1=0$ $(\mu_2=0)$. *Let us define the quantity*

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon\to\infty} \sup_{z\in Z} \mathbf{P}(|\xi_z| > \varepsilon).$$

Clearly we have

$$\mu_1 \leqq \mu_3, \quad \mu_2 \leqq \mu_3, \quad \mu_3 \leqq \mu_1+\mu_2:$$

Hence it follows that for every fixed value of λ $(0<\lambda<1)$ *the sets* $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ *will be bounded if and only if* $\mu_3=0$.

Similarly, from the inequalities (1.7) *and* (1.8) *we obtain also the following statements:*

For every fixed value of λ *the sets* $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ $(0<\lambda<1)$ *are not bounded from below (from above) if and only if* $\mu_1=1$ $(\mu_2=1)$.

For every fixed value of λ *the sets* $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ $(0<\lambda<1)$ *are bounded if and only if* $\mu_3=1$.

§ 4. Compactness of sets of distribution functions

Denote by $\mathfrak{F}$ the set of one-dimensional distribution functions. P. Lévy has introduced the notion of the distance of two distribution functions. The distance of the distribution functions $F_1(x)$ and $F_2(x)$ is defined as the lower bound of those values h for which the following inequality holds:

$$F_1(x-h)-h \leqq F_2(x) \leqq F_1(x+h)+h \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Let us denote this number by $L(F_1, F_2)$. Clearly $L(F_1, F_2) \leqq 1$. It is known that this distance satisfies the axioms of metric spaces, i. e.

a) $L(F_1, F_2)=0$ if and only if $F_1\equiv F_2$;

b) $L(F_1, F_2)=L(F_2, F_1)$;

c) $L(F_1, F_3) \leqq L(F_1, F_2)+L(F_2, F_3)$.

[2] If we speak about the boundedness (unboundedness) of the sets $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ for every fixed λ $(0<\lambda<1)$, the special choice of the quantiles $Q(\lambda, z)$ does not matter as in this case the boundedness (unboundedness) of the sets $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ with a special choice of the quantiles $Q(\lambda, z)$ implies the boundedness of the sets $\{Q(\lambda, z), z\in Z\}$ with every choice of the quantiles. In this case we may interpret $\{Q(\lambda, z)\ z\in Z\}$ as the set of all the λ-quantiles of all the variables ξ_z, too.

It is also known that the space $\mathfrak{F}$ is complete with respect to the distance of LÉVY ([5], p. 42, Theorem 2). Consequently, $\mathfrak{F}$ is a bounded and complete but non-compact metric space. In what follows we shall deal with the question, under what condition a subset $\mathfrak{F}'$ of the space $\mathfrak{F}$ will be compact.

THEOREM 1.5. *A subset $\mathfrak{F}' = \{F(x,z),\ z \in Z\}$ of the space $\mathfrak{F}$ is compact if and only if the set $\{Q(\lambda, z),\ z \in Z\}$ $(0 < \lambda < 1)$ is bounded for every λ.*

PROOF. According to the Corollary to Theorem 1.4 the sets $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ will be bounded for every fixed value of λ if and only if

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{z \in Z} [F(-\varepsilon, z) + 1 - F(\varepsilon + 0, z)] = 0.$$

This is equivalent with

$$\sup_{z \in Z} F(-\varepsilon, z) \to 0, \quad \inf_{z \in Z} F(\varepsilon, z) \to 1 \quad \text{if} \quad \varepsilon \to \infty.$$

Consequently, if $F(x, z_1), F(x, z_2), \ldots$ is a sequence of distribution functions belonging to $\mathfrak{F}'$ and a subsequence $F(x, z_{n_k})$ of this sequence converges[3] to a non-decreasing function $F(x)$, which is continuous on the left, at every point of continuity of the latter, then $F(-\infty) = 0$ and $F(+\infty) = 1$.

THEOREM 1.6. *A set $\mathfrak{F}' = \{F(x,z),\ z \in Z\}$ of the space $\mathfrak{F}$ is compact if and only if $\mu_3 = 0$.*

PROOF. The theorem is a straightforward consequence of Theorem 1.5 and of the Corollary to Theorem 1.4.

THEOREM 1.7. *A set $\mathfrak{F}' = \{F(x,z),\ z \in Z\}$ of the space $\mathfrak{F}$ is compact if and only if the characteristic functions $f(t,z)$ $(z \in Z)$ are equally continuous at the point $t = 0$, i. e. to every positive ε there belongs a $\delta > 0$ such that*

(1.9) $$|1 - f(t, z)| < \varepsilon \quad \textit{if} \quad |t| < \delta.$$

PROOF. Suppose the set $\mathfrak{F}'$ to be compact. Hence if c is sufficiently large,

$$\sup_{z \in Z} \mathbf{P}(|\xi_z| > c) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Since

$$|1 - f(t, z)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x, z) \right| \le |t| \int_{|x| \le c} |x|\, dF(x, z) +$$

$$+ 2\mathbf{P}(|\xi_z| > c) \le |t|\, c + \frac{\varepsilon}{2},$$

the inequality (1.9) will be satisfied whenever $|t| < \dfrac{\varepsilon}{2c} = \delta$.

[3] The existence of such a sequence is assured by the well-known Theorem of HELLY.

Now suppose that the inequality (1.9) is satisfied. Then from the inequality (1.2) we obtain $\mu_3 < 10\varepsilon$, but this can be valid for every positive ε only if $\mu_3 = 0$.

THEOREM 1.8. *Suppose that for the set $\mathfrak{F} = \{F(x, z),\ z \in Z\}$ the following two conditions are satisfied:*

1. *There exists a measurable function which is continuous at the point $t=0$ and for which $0 \leqq g(t) \leqq 1$, $g(0) = 1$, and*

$$|f(t,z)| \geqq g(t) \qquad (z \in Z).$$

2. *There exists a number λ_1 $(0 < \lambda_1 < 1)$ such that with a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_1, z)$, the set $\{Q(\lambda_1, z), z \in Z\}$ is bounded from below (from above).*

In this case the set $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ will be bounded from below (from above) for every λ $(0 < \lambda < 1)$.

PROOF. Let us prove that under the mentioned conditions the sets $\{Q(\lambda, z),\ z \in Z\}$ will be bounded from below. The boundedness from above can be proved similarly. Let $Q(\lambda_1, z) \geqq K_1$ $(z \in Z)$. By means of the inequality (1.6) we get that if $\delta > 0$, then

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-g^2(t))\,dt \geqq \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-|f(t,z)|^2)\,dt \geqq$$

$$\geqq \frac{\min(\lambda_1, 1-\lambda_1)}{10}\mathbf{P}\left(|\xi_z - Q(\lambda, z)| > \frac{1}{\delta}\right) \geqq \frac{\min(\lambda_1, 1-\lambda_1)}{10}\mathbf{P}\left(\xi_z < K_1 - \frac{1}{\delta}\right),$$

consequently

$$\frac{\min(\lambda_1, 1-\lambda_1)}{10}\sup_{z\in Z}\mathbf{P}\left(\xi_z < K_1 - \frac{1}{\delta}\right) \leqq \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-g^2(t))\,dt.$$

When $\delta \to 0$, it follows that $\mu_1 = 0$, i. e. according to the Corollary to Theorem 1.4, the set $\{Q(\lambda, z), z \in Z\}$ is bounded for every fixed λ. This completes the proof.

THEOREM 1.9. *The subset $\mathfrak{F}' = \{F(x, z),\ z \in Z\}$ of the space $\mathfrak{F}$ is compact if and only if the Condition 1 in Theorem 1.8 is satisfied and there is a number λ_1 $(0 < \lambda_1 < 1)$ such that the set $\{Q(\lambda_1, z), z \in Z\}$ is bounded by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_1, z)$.*

PROOF. Suppose the condition of our theorem to be satisfied. Then by Theorem 1.8 the set $\{Q(\lambda, z),\ z \in Z\}$ is bounded for every fixed λ. Hence, according to Theorem 1.5, the set $\mathfrak{F}'$ is compact.

Now let us suppose that the set $\mathfrak{F}'$ is compact. Then, according to Theorem 1.5, the set $\{Q(\lambda, z),\ z \in Z\}$ will be bounded for every λ. Thus we have to show the existence of the function $g(t)$ only. For this purpose it clearly suffices to prove that the function

$$\inf_{z \in Z} |f(t, z)| = g_1(t)$$

is continuous at the point $t = 0$. In contradiction to the statement let us suppose that there is a number $q < 1$ and two sequences t_k and z_k such that $t_k \to 0$ if $k \to \infty$ and

$$|f(t_k, z_k)| \leqq q < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Since the set $\mathfrak{F}'$ is compact, it follows that the sequence $F(x, z_k)$ contains a subsequence which converges to a distribution function $F(x)$. Without restricting the generality we can assume that the sequence $F(x, z_k)$ itself has this property. If $f(t)$ denotes the characteristic function of $F(x)$, then, according to what has been said, the sequence $f(t, z_k)$ converges uniformly to the limiting function $f(t)$ in every finite interval. But this is a contradiction because $f(t)$ is a continuous function and $f(0) = 1$.

§ 5. Some theorems concerning the convergence of a series of independent random variables

In this paragraph we mention two theorems, the proofs of which are given in [10].

The theorems deal with the question that if $\xi_1, \xi_2, \ldots$ are independent random variables, under what conditions will the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \tag{1.10}$$

converge with probability 1 regardless of the order of summation.

Let us introduce the following notations: Denote by $\mathfrak{K}$ the set of finite subsets of the set of natural numbers and by $\mathfrak{S}$ the set of all subsets of the set of natural numbers. Let us put

$$\xi(A) = \sum_{k \in A} \xi_k \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{K} \quad \text{or} \quad A \in \mathfrak{S} \tag{1.11}$$

assuming that the sum on the right hand side converges with probability 1 regardless of the order of summation. Denote by $F(x, A)$ the distribution function and by $Q(\lambda, A)$ an arbitrary λ-quantile of $\xi(A)$.

THEOREM 1.10. *If the set* $\{F(x, A),\ A \in \mathfrak{R}\}$ *is compact, then the series* (1.10) *converges with probability* 1 *regardless of the order of summation.*

Conversely, if the series (1.10) *converges with probability* 1 *regardless of the order of summation, then the set* $\{F(x, A),\ A \in \mathfrak{S}\}$ *is compact.*

THEOREM 1.11. *If there exists a pair of numbers* λ_1, λ_2 $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1)$ *such that by a convenient choice of the quantiles* $Q(\lambda_1, A)$, $Q(\lambda_2, A)$ *the sets* $\{Q(\lambda_1, A),\ A \in \mathfrak{R}\}$, $\{Q(\lambda_2, A),\ A \in \mathfrak{R}\}$ *are bounded, then the series* (1.11) *converges with probability* 1 *regardless of the order of summation. Conversely, if the series* (1.10) *converges with probability* 1 *regardless of the order of summation, then the sets* $\{Q(\lambda, A),\ A \in \mathfrak{S}\}$ *are bounded for every fixed value of* λ.

COROLLARY 1. *Let the distributions of the random variables* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *be symmetric with respect to the point* 0. *If there exists a* $\lambda \neq \frac{1}{2}$ $(0 < \lambda < 1)$ *such that by a convenient choice of the quantiles* $Q(\lambda, A)$ *the set* $\{Q(\lambda, A),$ $A \in \mathfrak{R}\}$ *is bounded, then the series* (1.10) *converges with probability* 1 *regardless of the order of summation.*

COROLLARY 2. *Let the random variables* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *be non-negative. If there is a* λ $(0 < \lambda < 1)$ *such that by a convenient choice of the quantiles* $Q(\lambda, A)$ *the set* $\{Q(\lambda, A),\ A \in \mathfrak{R}\}$ *is bounded, then the series* (1.10) *converges with probability* 1.

II. ADDITIVE SET FUNCTIONS DEFINED ON RINGS AND ALGEBRAS

In this chapter we shall analyse the properties of an additive set function $\xi(A)$ defined on the elements of a ring or algebra $\mathfrak{R}$, consisting of some subsets of a set H. These investigations will help us to find out under which conditions we can extend the set function $\xi(A)$ to the smallest σ-ring containing the ring (or algebra) $\mathfrak{R}$. It is clear that one of the conditions necessary for this is the complete additiveness of $\xi(A)$ over $\mathfrak{R}$. Therefore we have to find first a condition that ensures that an additive set function should be completely additive. This question will be answered by

THEOREM 2.1. *In order that an additive set function* $\xi(A)$ *defined on the elements of the ring* $\mathfrak{R}$ *should be completely additive it is necessary and sufficient that for every non-decreasing sequence of sets* $B_1, B_2, \ldots$ *with* $B_k \in \mathfrak{R}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $\prod_{k=1}^{\infty} B_k = 0$, *the following condition holds:*

$$\mathbf{P}(|\xi(B_k)| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{if} \quad k \to \infty \tag{2.1}$$

where ε *is an arbitrary positive number.*

PROOF. Suppose that the condition (2. 1) is satisfied. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of disjoint sets of the ring $\mathfrak{R}$. Let $A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, $B_n=\sum_{k=n}^{\infty} A_k$.

Since $\xi(A)$ is an additive set function, it follows that

$$\xi(A)=\sum_{k=1}^{n-1}\xi(A_k)+\xi(B_n) \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Hence

$$\xi(A)-\sum_{k=1}^{n-1}\xi(A_k)=\xi(B_n)\Rightarrow 0 \quad \text{if} \quad n\to\infty,$$

consequently ([4], p. 119, Corollary 2)

$$\xi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi(A_k).$$

Now let us suppose that $\xi(A)$ is completely additive. If $B_1, B_2, \ldots$ is a sequence of sets having the properties mentioned in Theorem 2. 1 and $A_n=B_n-B_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$, then $A_iA_k=0$ if $i\neq k$ and

$$B_1=\sum_{k=1}^{\infty}A_k,$$

hence, by the complete additiveness of $\xi(A)$, it follows that

$$\xi(B_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi(A_k).$$

Thus we obtain that the following relation holds:

$$\xi(B_n)=\sum_{k=n}^{\infty}\xi(A_k)\to 0 \quad \text{if} \quad n\to\infty,$$

consequently, it is also true that if $\varepsilon>0$, then

$$\mathbf{P}(|\xi(B_n)|>\varepsilon)\to 0.$$

COROLLARY. *Let* $\xi(A)$ *be an additive set function defined on the ring* $\mathfrak{R}$. *If there exists a positive number* T *such that for every non-increasing sequence* $B_1, B_2, \ldots$ *of sets belonging to* $\mathfrak{R}$ *for which* $\lim_{k\to\infty} B_k=0$, *we have*

$$\lim_{k\to\infty} f(t, B_k)=1 \quad \textit{if} \quad |t|\leq T,$$

then the set function $\xi(A)$ *is completely additive.*

PROOF. From the inequality (1. 3), valid for every characteristic function, it follows that the relation

$$\lim_{k\to\infty} f(t, B_k)=1$$

holds for every t, i. e.

$$\xi(A_k) \Longrightarrow 0 \quad \text{if} \quad k \to \infty.$$

The statement then follows from Theorem 2. 1.

In what follows some theorems concerning the quantiles $Q(\lambda, A)$ of the random variables $\xi(A)$ will be proved. We shall make use of the results of the preceding chapter.

THEOREM 2. 2. *Let $\xi(A)$ be an additive set function defined on an algebra $\mathfrak{R}$. Suppose that there is a number λ_1 such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_1, A)$ the set $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded from below (from above). Then, for every λ, the set $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded from below (from above). If the set $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded from both sides, then the set $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is compact.*

PROOF. If $A \in \mathfrak{R}$, then, by assumption, $\bar{A} \in \mathfrak{R}$ and $H = A + \bar{A} \in R$. Hence it follows that

$$\xi(H) = \xi(A) + \xi(\bar{A}), \quad f(t, H) = f(t, A) f(t, \bar{A}).$$

Since $|f(t, A)| \leqq 1$, it follows that

$$|f(t, A)| \geqq |f(t, H)| \quad (A \in \mathfrak{R}). \tag{2.2}$$

$f(t, H)$ is a characteristic function; consequently $f(t, H)$ is continuous, and $f(0, H) = 1$. Hence, if

$$g(t) = |f(t, H)|,$$

we obtain that Condition 1 of Theorem 1. 8 is satisfied. As the fulfilment of Condition 2 has been supposed one part of the statement is proved.

If we suppose that the set $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded from both sides, then from inequality (2. 2), further from Theorem 1. 9 it follows that the set $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is compact. This completes the proof of the theorem.

If $\mathfrak{R}$ is a ring, the existence of a quantile-set bounded from both sides does not imply that every quantile-set is bounded. If e. g. $\mathfrak{R}$ is the ring formed by the finite sets of positive integers and

$$F(x, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

then $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0$ if $A \in \mathfrak{R}$. However, the quantities $Q(\lambda, A)$ are not bounded. In case of a ring we obtain, using the results of Chapter I, the following theorems.

THEOREM 2. 3. *Let $\xi(A)$ be an additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. Suppose that there is a pair of numbers λ_1, λ_2 $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1)$ such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_1, A)$, $Q(\lambda_2, A)$ the sets $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$, $\{Q(\lambda_2, A), A \in \mathfrak{R}\}$ are bounded. In this case the set $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded for every fixed λ $(0 < \lambda < 1)$.*

PROOF. Contrarily to the statement of the theorem let us suppose that there is a number λ_0 and a sequence of sets A_k such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_0, A_k)$ we have $|Q(\lambda_0, A_k)| \to \infty$ if $k \to \infty$. Let $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$, $C_n = B_{n+1} - B_n$. Then $C_i C_k = 0$ if $i \neq k$. Hence the random variables $\xi(C_n)$ are independent. The conditions of our theorem and Theorem 1. 11 together imply the convergence with probability 1 of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi(C_n).$$

Denote by ξ the sum of this series and by $f(t)$ the characteristic function of ξ. It is clear that

$$f(t) = f(t, A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \prod_{k=n}^{\infty} f(t, C_k),$$

further that

$$f(t, A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = f(t, (A_1 + A_2 + \cdots A_n) - A_n) f(t, A_n),$$

hence

$$|f(t)| \leqq |f(t, A_1 + A_2 + \cdots + A_n)| \leqq |f(t, A_n)|.$$

We know that the set $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded; hence, by Theorems 1. 9 and 1. 5 it follows that the quantiles of the random variables $\xi(A_n)$ are bounded, but this is a contradiction because we have supposed that $|Q(\lambda_0, A_n)| \to \infty$ if $n \to \infty$.

THEOREM 2. 4. *Let $\xi(A)$ be an additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. Suppose that $\xi(A) \geqq 0$ $(A \in \mathfrak{R})$ and there is a number λ_1 such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_1, A)$ the set $\{Q(\lambda_1, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded. In this case the sets $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ will be bounded for every fixed λ $(0 < \lambda < 1)$.*

PROOF. Contrarily to our statement let us suppose that there is a number λ_0 and a sequence of sets A_k such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_0, A_k)$ we have $Q(\lambda_0, A_k) \to \infty$ if $k \to \infty$. If $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$, then $B_{n+1} \supseteq B_n$, $B_n \supseteq A_n$. Since $\xi(A)$ is additive and non-negative, we have $\xi(B_n) \geqq \xi(A_n)$. If $C_n = B_{n+1} - B_n$, then $C_i C_k = 0$ if $i \neq k$, consequently the va-

riables $\xi(C_n)$ are independent. We know further that if $A \in \mathfrak{R}$, then the quantities $Q(\lambda_1, A)$ are bounded, hence by Corollary 2 of Theorem 1.11 we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi(C_n) < \infty.$$

If we denote the sum of this series by ξ, then

$$0 \leqq \xi(A_n) \leqq \xi(B_n) = \sum_{k=1}^{n} \xi(C_k) \leqq \xi,$$

but this is a contradiction because we have supposed that $Q(\lambda_0, A_k) \to \infty$. Thus our theorem is proved.

Let $\mathfrak{R}$ be a ring and $\xi(A)$ a set function defined on the elements of $\mathfrak{R}$. Let us define the following set functions:

$$\mu_1(A) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{B \in A\mathfrak{R}} \mathbf{P}(\xi(B) < -\varepsilon),$$

$$\mu_2(A) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{B \in A\mathfrak{R}} \mathbf{P}(\xi(B) > \varepsilon),$$

$$\mu_3(A) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{B \in A\mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(B)| > \varepsilon).$$

The set functions $\mu_1(A), \mu_2(A), \mu_3(A)$ are the same as the quantities μ_1, μ_2, μ_3 defined in Chapter I, provided that $Z = A\mathfrak{R}$. It is clear that if $B \in A\mathfrak{R}$, $A \in \mathfrak{R}$, then

$$\mu_i(B) \leqq \mu_i(A) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

In addition there holds the following

THEOREM 2.5. *If $\xi(A)$ is an additive set function defined on the elements of a ring $\mathfrak{R}$, and A_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ is a finite sequence of sets belonging to $\mathfrak{R}$, then*

$$\mu_i\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{r} \mu_i(A_k) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

PROOF. Let us carry out the proof in the case $i = 3$. The other cases can be treated in a similar way. Let $A_k \in \mathfrak{R}$, $A_k' \in A_k\mathfrak{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, $A_i A_l = 0$ if $i \neq l$, then we have

$$\mathbf{P}(|\xi(A_1' + A_2' + \cdots + A_r')| > \varepsilon) = \mathbf{P}(|\xi(A_1') + \xi(A_2') + \cdots + \xi(A_r')| > \varepsilon) \leqq$$
$$\leqq \mathbf{P}\left(|\xi(A_1')| > \frac{\varepsilon}{r}\right) + \mathbf{P}\left(|\xi(A_2')| > \frac{\varepsilon}{r}\right) + \cdots + \mathbf{P}\left(|\xi(A_r')| > \frac{\varepsilon}{r}\right).$$

Consequently

$$\sup_{C \in \sum_{k=1}^{r} A_k\mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(C)| > \varepsilon) \leqq \sum_{k=1}^{r} \sup_{A_k' \in A_k\mathfrak{R}} \mathbf{P}\left(|\xi(A_k')| > \frac{\varepsilon}{r}\right),$$

hence it follows that

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{r} \mu_3(A_k).$$

Now, if $A_1, A_2, \ldots, A_r$ are arbitrary sets belonging to the ring $\mathfrak{R}$, then, according to the previous inequalities, we have

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \mu_3(A_1) + \mu_3(A_2 - A_1) + \cdots + \mu_3\left(A_r - \sum_{k=1}^{r-1} A_k\right).$$

Since the set functions $\mu_i(A)$ $(i=1, 2, 3)$ are monotonous, it follows that

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{r} \mu_3(A_k).$$

This completes the proof of our statement.

Regarding the set functions $\mu_i(A)$ a law of 0 or 1 holds. This will be expressed by

THEOREM 2. 6. *The set functions $\mu_1(A), \mu_2(A), \mu_3(A)$ defined on the elements of the ring $\mathfrak{R}$ can take on only the values* 0 *or* 1.

PROOF. Let $A \in \mathfrak{R}$ and consider those elements of the ring $\mathfrak{R}$ for which $B \subseteq A$ holds. If $\mu_1(A) > 0$ $(\mu_2(A) > 0)$, then by the Corollary of Theorem 1. 4 there is a λ_1 (λ_2) such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_1, B)$ $(Q(\lambda_2, B))$, the set $\{Q(\lambda_1, B), B \in A\mathfrak{R}\}$ $(\{Q(\lambda_2, B), B \in A\mathfrak{R}\})$ is not bounded from below (from above). Then, using Theorem 2. 2, it follows that also the sets $\{Q(\lambda, B), B \in A\mathfrak{R}\}$ are not bounded from below (from above) for every fixed value of λ. Hence, using again the Corollary of Theorem 1. 4, we get $\mu_1(A) = 1$ $(\mu_2(A) = 1)$. Finally, let us consider the value of $\mu_3(A)$. If $\mu_3(A) > 0$, then, from $\mu_3(A) \leqq \mu_1(A) + \mu_2(A)$, it follows that at least one of $\mu_1(A)$ and $\mu_2(A)$ is positive. Taking into account what has been said above and the fact that $\mu_3(A) \geqq \mu_1(A)$, $\mu_3(A) \geqq \mu_2(A)$, it follows that $\mu_3(A) = 1$. This completes the proof.

Finally let us prove

THEOREM 2. 7. *Let $\xi(A)$ be an additive (completely additive) set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. Then the set function $|1 - f(t, A)|$ is subadditive (completely subadditive) for every fixed t.*

PROOF. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of disjoint sets of the ring $\mathfrak{R}$. By the inequality

$$|1 - z_1 z_2 \cdots z_r| \leqq |1 - z_1| + |1 - z_2| + \cdots + |1 - z_r|$$

valid for such complex numbers z_i for which $|z_i| \leqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, we ob-

tain that

$$\left|1-f\left(t, \sum_{k=1}^{r} A_k\right)\right| = \left|1-\prod_{k=1}^{r} f(t, A_k)\right| \leqq \sum_{k=1}^{r} |1-f(t, A_k)| \qquad (r=1,2,\ldots).$$

If $\xi(A)$ is additive, the statement is proved. If $\xi(A)$ is completely additive and $A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, then, by virtue of

$$f\left(t, \sum_{k=1}^{r} A_k\right) = \prod_{k=1}^{r} f(t, A_k) \Rightarrow f(t, A),$$

it follows that

$$|1-f(t, A)| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |1-f(t, A_k)|.$$

This completes the proof.

III. EXTENSION OF COMPLETELY ADDITIVE SET FUNCTIONS

§ 1. The discussion of the problem

Let $\mathfrak{R}$ be a ring consisting of certain subsets of a space H and $\xi(A)$ a completely additive set function defined on the elements of $\mathfrak{R}$. In this chapter we shall deal with the question under what conditions can the set function $\xi(A)$ be extended to the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$. We mean by extension the construction of a completely additive set function $\xi^*(A)$ defined on the elements of $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ for which

$$\xi^*(A) = \xi(A) \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{R}.$$

It is clear that not every completely additive set function can be extended; if, in particular, $\xi(\omega, A)$ is constant, $\xi(\omega, A) \equiv \varphi(A)$ where $\varphi(A)$ is a real-valued, completely additive set function defined on the elements of $\mathfrak{R}$, then we need also further conditions for its extension.

Let H be e. g. the square $0 \leqq x < 1$, $0 \leqq y < 1$ on the (x, y)-plane and $\mathfrak{R}$ be the algebra formed 1. by the finite sums of intervals, closed to the left, open to the right and lying on straight lines parallel to the x-axis, 2. by the complements of the previous sets (these sets will be shortly called to be of complementary type) and 3. by the set H itself. If $A=\sum_{k=1}^{n} \{a_k \leqq x < b_k,\, y=y_k\}$, then put $\varphi(A)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$ and $\varphi(\bar{A}) = -\varphi(A)$. $\varphi(A)$ is a completely addi-

tive set function. In fact, if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{R}$ and $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, then there will be at most one set among the sets $A_1, A_2, \ldots$ which is of complementary type. If there is none, then A is the sum of a finite number of intervals closed to the left and open to the right, such that each of them is divided into a sum of intervals of the same type. In whatever order we add the lengths of them we always get the same sum. i. e. $\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$. But if we have a set of complementary type and this is A_1, then from $\varphi(A) = \varphi(A_1) + \varphi\left(\sum_{k=2}^{\infty} A_k\right)$ and $\varphi\left(\sum_{k=2}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi(A_k)$ it follows that $\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$. In spite of this, $\varphi(A)$ can not be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, because the values $+\infty$ and $-\infty$ can not occur simultaneously in the set of values of a completely additive set function defined on a σ-ring ([6], p. 18, Theorem 3. 4. 13).

In case of ordinary real-valued set functions it is known that in order to be able to carry out the extension and to have an extended set function of finite value it is necessary and sufficient that the original set function should be bounded from both sides. The extension can be carried out most simply by representing the set function as the difference of two non-negative, completely additive set functions and by extending both these separately.

In case of random-valued set functions this way is inpracticable, namely if the set of the measurable subsets of the set A is not countable, then the functions

$$\eta^+(A) = \sup_{B \in A\mathfrak{R}} \xi(B), \quad \eta^-(A) = \inf_{B \in A\mathfrak{R}} \xi(B)$$

defined on the space of the elementary events are not certainly measurable; admitted that they are measurable, it is again possible that they have an infinite value on a set of positive measure. Therefore we have to look for another way of extension in this case.

We have to emphasize that in the particular case $\xi(\omega, A) \equiv \varphi(A)$ the requirement of $\xi(\omega, A)$ being a random variable means that the value $\varphi(A)$ is finite. Consequently, from the real-valued set functions we obtain as particular cases of random set functions only the finite-valued ones.

There arises the question whether we can construct the whole theory of random-valued set functions starting from the family of sample functions (which should be common real-valued set functions). This way is suitable only if we are satisfied with additive set functions. Namely, if we require

the sample functions to be completely additive, then we have to exclude several important set functions from the investigations. E. g. let ξ_t $(t \geqq 0)$ be the well-known Brownian movement process with $\mathbf{M}(\xi_t)=0, \mathbf{D}^2(\xi_t)=t$. If $\mathfrak{R}$ consists of finite sums of intervals of the real axis, which are closed to the left and open to the right and the set function $\xi(A)$ is an additive set function formed by the corresponding differences and sums of differences, respectively, of the process, then the sample functions $\omega(A)$ of the set function $\xi(A)$ can not be completely additive. This can be seen easily. Let us restrict ourselves to the interval $I=[0, 1)$, i. e. suppose $A \subseteq I$. Let $\tilde{\xi}_t$ be a separable Brownian movement process defined in the interval $0 \leqq t \leqq 1$ such that

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_t=\xi_t)=1,$$

and let $\tilde{\xi}(A)$ be the additive set function generated by the differences and by the sums of differences, respectively, of the process $\tilde{\xi}_t$. It is clear that

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}(A)=\xi(A))=1 \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{R}.$$

Almost every sample function of the process $\tilde{\xi}_t$ is continuous ([4], p. 393, Theorem 2. 2). Hence and by Theorem 2. 3 of [4] (p. 395) it follows that almost every sample function of a separable Brownian movement process is not of bounded variation. Let us divide the interval $I=[0, 1)$ into a sum of disjoint intervals $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$ of length $\frac{1}{n}$, closed to the left, open to the right and put

$$\tilde{\zeta}_n=\sum_{k=1}^{n}|\tilde{\xi}(\mathfrak{J}_k)|, \quad \zeta_n=\sum_{k=1}^{n}|\xi(\mathfrak{J}_k)|.$$

From what has been said above it follows that

$$\mathbf{P}(\tilde{\zeta}_n \to \infty)=1.$$

Since $\mathbf{P}(\tilde{\zeta}_n=\zeta_n)=1$, we have

$$\mathbf{P}(\zeta_n \to \infty)=1;$$

i. e. almost every sample function of the set function $\xi(A)$ is not of bounded variation.

The results of this chapter will help us to solve existence problems of additive set functions $\xi(A)$ defined on Borel sets of the space H. We shall consider first, to make clear the idea, a concrete case.

Let us construct e. g. a set function $\xi(A)$, defined on the set $\mathfrak{R}$ of Borel subsets of some finite closed n-dimensional interval H of the space $\mathfrak{R}_n$, such that $\xi(A)$ has for any $A \in \mathfrak{R}$ a Cauchy distribution; the characteristic function of the random variable $\xi(A)$ will be

$$f(t, A)=e^{-|A||t|}.$$

First of all by aid of the construction due to KOLMOGOROV ([8], § 4) we construct a family of random variables $\xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in H$ for which the following conditions hold:

a) If I is the n-dimensional interval

$$I = \{a_i \leqq x_i < a_i + h_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}, \quad I \subseteq H \tag{3. 1}$$

and

$$\Delta_{h_i} \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n} = \xi_{t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + h_i, t_{i+1}, \ldots, t_n} - \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n},$$

further

$$\Delta_I \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n} = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_n} \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n},$$

then the random variable

$$\xi(I) = \Delta_I \xi_{t_1, t_2, \ldots, t_n} \tag{3. 2}$$

has a Cauchy distribution, namely

$$f(t, I) = e^{-h_1 h_2 \cdots h_n |t|}. \tag{3. 3}$$

b) If $I_1, I_2, \ldots, I_r$ are n-dimensional disjoint intervals lying in the interval H, then the random variables

$$\xi(I_1), \xi(I_2), \ldots, \xi(I_r)$$

defined by expression (3. 2) are independent.

We consider the ring $\mathfrak{R}$ formed by the finite sums of the interval (3. 1) and let the random variables

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{r} \xi(I_k) \tag{3. 4}$$

correspond to its elements $A = I_1 + I_2 + \cdots + I_r$, $I_l \subseteq H$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$, $I_j I_l = 0$ if $j \neq l$.

Having arrived so far through KOLMOGOROV's construction, we state that $\xi(A)$ is completely additive on the ring $\mathfrak{R}$, further the set $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is compact. Then, taking Theorem 3. 2 into account, we carry out the extension of the set function $\xi(A)$ to the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ of the Borel sets of the set H.[4]

The complete additiveness of $\xi(A)$ follows from Theorem 2. 1 and from that $|A_n| \to 0$ if $A_n \to 0$. Namely, by (3. 3) and (3. 4) we obtain

$$f(t, A_n) = e^{-|A_n|\,|t|} \Rightarrow 0 \quad \text{if} \quad n \to \infty.$$

The second property, the compactness of the set $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ follows from

$$f(t, A) = e^{-|A|\,|t|} \geqq e^{-|H|\,|t|} = g(t),$$

where $g(t)$ is a continuous function, $0 \leqq g(t) \leqq 1$, $g(0) = 1$. As $Q\left(\frac{1}{2}, A\right) = 0$, the conditions of Theorem 1. 9 are satisfied. By this step the construction is finished.

[4] In the present case $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ is not only a σ-ring, but also a σ-algebra.

§ 2. Extension of a set function defined on a ring

THEOREM 3.1. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If there is a positive number T such that for every fixed value of t for which $|t| \leqq T$ the set function $|1-f(t, A)|$ is of bounded variation, then $\xi(A)$ can be extended to the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$. The extension is unique in the sense that if $\xi^*(A)$ and $\xi^{**}(A)$ are completely additive set functions defined on the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ and*

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A) \quad \textit{if} \quad A \in \mathfrak{R},$$

then

$$\xi^*(A) = \xi^{**}(A) \quad \textit{if} \quad A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}).$$

Conversely, if $\xi(A)$ is a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$ and T is an arbitrary positive number, then the set function

$$\sup_{|t| \leqq T} |1-f(t, A)| \tag{3.5}$$

is of bounded variation.

PROOF OF THE FIRST PART OF THE THEOREM. By assumption $\xi(A)$ is a completely additive set function on the ring $\mathfrak{R}$. Now, if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of disjoint sets of the ring $\mathfrak{R}$, $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, then

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t| \leqq T} \left| f(t, A) - \prod_{k=1}^{n} f(t, A_k) \right| = 0. \tag{3.6}$$

Let us consider the Banach-algebra $\mathfrak{B}$ of continuous functions in the interval $[-T, T]$; let the maximum of the absolute value of a function be its norm. It is clear that $\mathfrak{B}$ is commutative and has a unit element. By (3.6), if we consider the characteristic functions, defined on the ring $\mathfrak{R}$, only in the interval $[-T, T]$ and put $g(t, A) = f(t, A)$ if $|t| \leqq T$, then $g(t, A)$ will be a completely multiplicative[5] set function defined on the ring $\mathfrak{R}$ whose values belong to the Banach algebra $\mathfrak{B}$. We note that in virtue of $g(0, A) = 1$, for $A \in \mathfrak{R}$, the values of the set function $g(t, A)$ are different from 0.

We prove that the set function $\|1-g(t, A)\|$ $(A \in \mathfrak{R})$ is of bounded variation and completely subadditive.

In order to prove the first statement we show that the conditions of Theorem 1.1 hold. Since $\|g(t, A)\| \leqq 1$, consequently $\|1-g(t, A)\| \leqq 2$, hence Condition 1 is satisfied.

According to Theorem 2.7 if $A_1, A_2, \ldots, A_r$ are disjoint sets of the ring

[5] The definition of this notion may be found in the paper [11].

$\mathfrak{R}$, $A=\sum_{i=1}^{r} A_i$, then for every value of t

$$|1-f(t, A)| \leqq \sum_{k=1}^{r} |1-f(t, A_k)|,$$

i. e.

$$\|1-g(t, A)\| = \sup_{|t|\leqq T} |1-f(t, A)| \leqq \sum_{k=1}^{r} \sup_{t\leqq T} |1-f(t, A_k)| = \sum_{k=1}^{r} \|1-g(t, A_k)\|.$$

Consequently, Condition 2 is also satisfied. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of disjoint sets of the ring $\mathfrak{R}$. According to the condition of our theorem

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1-f(t, A_k)| < \infty \quad \text{if} \quad |t| \leqq T.$$

Hence it follows ([4], p. 115, Theorem 2.7) that every rearrangement of the series $\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$ converges with probability 1. On the other hand, this involves the absolute convergence of the infinite series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi(A_k)| > \varepsilon)$$

([8], § 5).

According to what has been said above it follows from the inequality

$$\|1-g(t, A_k)\| = \sup_{|t|\leqq T} |1-f(t, A_k)| \leqq \sup_{|t|\leqq T} \left| \int_{|x|\leqq\varepsilon} (e^{itx}-1-itx)\,dF(x, A_k) + \right.$$

$$\left. +it \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A_k) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)| > \varepsilon) \leqq$$

$$\leqq \frac{T^2}{2} \int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A_k) + T \left| \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A_k) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)| > \varepsilon)$$

that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|1-g(t, A_k)\| < \infty,$$

i. e. Condition 3 of Theorem 1.1 is also satisfied.

The second statement follows immediately from Theorem 2.7; namely, if the set function $|1-f(t, A)|$ is completely subadditive for every value of t, then the set function $\|1-g(t, A)\| = \sup_{|t|\leqq T} |1-f(t, A)|$ is also completely subadditive.

We have thus proved that the conditions of Theorem 1 in [11] are satisfied; consequently, the set function $g(t, A)$ can be uniquely extended to the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$. By other words, there exists one and only one completely

multiplicative set function $g^*(t, A)$, defined on the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, for which

$$g^*(t, A) = g(t, A) \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{R}$$

and

$$g^*(t, A) \in \mathfrak{B} \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R}).$$

Further, it is true that if $A_n \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ and $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, then $\lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = g^*(t, A)$. In particular, if $A = 0$, then the equality $g^*(t, 0) = 1$ implies that $\lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = 1$.

The extension of the set function $\xi(A)$ will be carried out by transfinite induction.

Let us construct a transfinite sequence of classes of sets $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ as follows. If for every number ν for which $\nu < \nu' < \omega_1$ the class of sets $\mathfrak{R}_\nu$ has been already defined, then let $\mathfrak{R}_{\nu'}$ be the system of the sets which can be obtained as limits of convergent sequences of sets belonging to the class $\sum_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$. It is clear that every class $\mathfrak{R}_\nu$ $(\nu < \omega_1)$ is a ring.

Suppose that there are already corresponding random variables to the elements of every ring $\mathfrak{R}_\nu$ where $\nu < \nu' < \omega_1$; more exactly suppose that for every $\nu < \nu'$ we have defined on the elements of $\mathfrak{R}_\nu$ a completely additive set function $\xi_\nu(A)$ for which the relations

$$\begin{aligned} &\xi_\nu(A) = \xi_{\nu_0}(A) \quad \text{if} \quad \nu_0 < \nu, \quad A \in \mathfrak{R}_{\nu_0}, \\ &f_\nu(t, A) = g^*(t, A) \quad \text{if} \quad |t| \leqq T, \quad A \in \mathfrak{R}_\nu \end{aligned} \tag{3.7}$$

are satisfied where $f_\nu(t, A)$ is the characteristic function of the random variable $\xi_\nu(A)$. Now we start to define the set function $\xi_{\nu'}(A)$ $(A \in \mathfrak{R}_{\nu'})$.

First we show that if $A_1, A_2, \ldots$ is a convergent sequence of the ring $\sum_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$, $A_k \in \mathfrak{R}_{\nu_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, then the sequence $\xi_{\nu_k}(A_k)$ converges stochastically to some random variable. Let us put $C_k = \prod_{n=1}^{k} A_n$, $D_k = C_k - C_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$. As the sets $C_1, D_2, D_3, \ldots$ are disjoint, by applying the assumption of transfinite induction it follows that the random variables $\xi_{\nu_1}(C_1), \xi_{\nu_2}(D_2), \xi_{\nu_3}(D_3), \ldots$ are independent. Since in addition $C_k = C_1 + D_2 + \cdots + D_k$ and thus

$$\xi_{\nu_k}(C_k) = \xi_{\nu_1}(C_1) + \sum_{n=2}^{k} \xi_{\nu_n}(D_n), \tag{3.8}$$

applying the assumption of induction (3.7) we get

$$f_{\nu_k}(t, C_k) = f_{\nu_1}(t, C_1) \prod_{n=2}^{k} f_{\nu_n}(t, D_n) = g^*(t, C_1) \prod_{n=2}^{k} g^*(t, D_n) \quad \text{if} \quad |t| \leqq T. \tag{3.9}$$

The sequence on the right hand side of (3.9) converges to a function which is continuous in the interval $[-T, T]$; consequently (see [4], p. 115, Theorem 2.7) the series on the right hand side of the expression (3.8) and thus also the sequence $\xi_{\nu_k}(C_k)$ converges with probability 1 to a limit which shall be denoted by ξ. We show that

$$\xi_{\nu_k}(A_k) \Longrightarrow \xi \quad \text{if} \quad k \to \infty.$$

Consider the following relation

$$\xi_{\nu_k}(A_k) = \xi_{\nu_k}(C_k) + \xi_{\nu_k}(A_k - C_k).$$

It suffices to show that

$$\xi_{\nu_k}(A_k - C_k) \Longrightarrow 0 \quad \text{if} \quad k \to \infty.$$

Since $\lim\limits_{k\to\infty}(A_k - C_k) = 0$, it follows that if $|t| \leqq T$, then $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\nu_k}(t, A_k - C_k) = \lim\limits_{k\to\infty} g^*(t, A_k - C_k) = 1$. On the other hand, by the inequality (1.3) the relation

$$1 - Rf_\nu(2t, A_k - C_k) \leqq 4(1 - Rf(t, A_k - C_k))$$

is satisfied for every value of t, hence $f_{\nu_k}(t, A_k - C_k) \Longrightarrow 1$ if $k \to \infty$; thus our statement is proved.

Let us define the set function $\xi_{\nu'}(A)$ $(A \in \mathfrak{R}_{\nu'})$ as follows: if $A \in \mathfrak{R}_{\nu'}$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ where $A_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}(\nu_n < \nu';\ n = 1, 2, \ldots)$, put

$$\xi_{\nu'}(A) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{st} \xi_{\nu_n}(A_n).$$

We prove that $\xi_{\nu'}(A)$ is uniquely defined. Let $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ be two convergent sequences of the ring $\sum\limits_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = A$. The members of the sequences $A_n B_n$, $A_n - B_n$ are also elements of the ring $\sum\limits_{\nu<\nu'} \mathfrak{R}_\nu$. Besides $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$. If $A_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}$, $B_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}$ $(\nu_n < \nu'; n = 1, 2, \ldots)$, then

$$\xi_{\nu_n}(A_n) = \xi_{\nu_n}(A_n B_n) + \xi_{\nu_n}(A_n - B_n),$$
$$\xi_{\nu_n}(B_n) = \xi_{\nu_n}(A_n B_n) + \xi_{\nu_n}(B_n - A_n).$$

Since $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$ and thus if $|t| \leqq T$,

$$\left.\begin{aligned} f_{\nu_n}(t, B_n - A_n) &= g^*(t, B_n - A_n) \to 1, \\ f_{\nu_n}(t, A_n - B_n) &= g^*(t, A_n - B_n) \to 1 \end{aligned}\right\} \text{ if } n \to \infty,$$

then, taking into account the inequality (1.3), it follows that

$$\left.\begin{aligned} \xi_{\nu_n}(A_n) - \xi_{\nu_n}(A_n B_n) &\Longrightarrow 0, \\ \xi_{\nu_n}(B_n) - \xi_{\nu_n}(A_n B_n) &\Longrightarrow 0 \end{aligned}\right\} \text{ if } n \to \infty,$$

consequently

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{st} \xi_{\nu_n}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{st} \xi_{\nu_n}(B_n).$$

Thus the definition of $\xi_{\nu'}(A)$ is unique. This implies that

$$\xi_{\nu'}(A) = \xi_\nu(A) \quad \text{if } \nu < \nu'.$$

Now we shall prove that all what has been supposed about the set functions $\xi_\nu(A)$ corresponding to the ordinal numbers $\nu < \nu'$ will be satisfied also for the set function $\xi_{\nu'}(A)$. First we show that $f_{\nu'}(t, A) = g^*(t, A)$ if $|t| \leqq T$. Put $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ where $A_n \in \mathfrak{R}_{\nu_n}$ ($\nu_n < \nu'$; $n = 1, 2, \ldots$). Since $\xi_{\nu_n}(A_n) \Rightarrow \xi_{\nu'}(A)$ if $n \to \infty$ and consequently $f_{\nu_n}(t, A) \Rightarrow f_{\nu'}(t, A)$, further $g^*(t, A_n) \to g^*(t, A)$ if $n \to \infty$, it follows that

$$f_{\nu'}(t, A) = \lim_{n\to\infty} f_{\nu_n}(t, A_n) = \lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = g^*(t, A) \quad \text{if} \quad |t| \leqq T.$$

The statement that $\xi_{\nu'}(A)$ is an additive set function can be proved as follows. Let $A_1, A_2, \ldots$ be disjoint sets belonging to the ring $\mathfrak{R}_{\nu'}$. Let $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_r^{(n)}$ be sequences of sets belonging to the ring $\sum_{\nu < \nu'} \mathfrak{R}_\nu$ for which

$$\lim_{n\to\infty} A_k^{(n)} = A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \quad A_i^{(n)} A_k^{(n)} = 0 \quad \text{if} \quad i \neq k.$$

To the sets $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_r^{(n)}$ correspond independent random variables and the sum of these random variables corresponds to the sum of these sets. Since these properties hold even after carrying out the limiting process, the random variables $\xi_{\nu'}(A_1), \xi_{\nu'}(A_2), \ldots, \xi_{\nu'}(A_r)$ are independent and $\xi_{\nu'}\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) = \sum_{k=1}^{r} \xi_{\nu'}(A_k)$ is completely additive, too. In fact, as we have seen $f_{\nu'}(t, A) = g^*(t, A)$ if $|t| \leqq T$ and for every non-increasing sequence $A_1, A_2, \ldots$ of sets belonging to $\mathfrak{R}_{\nu'}$ for which $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$, we have

$$\lim_{n\to\infty} f_{\nu'}(t, A_n) = \lim_{n\to\infty} g^*(t, A_n) = 1 \qquad (|t| \leqq T).$$

Thus the condition of the Corollary of Theorem 2. 1 is satisfied, hence our assertion holds.

Finally, let us define the set function $\xi^*(A)$ as follows:

$$\xi^*(A) = \xi_\nu(A) \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{R}_\nu \quad (\nu < \omega_1).$$

Since $\sum_\nu \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, the set function $\xi^*(A)$ has been defined for every element A of $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$. It is clear that $\xi^*(A)$ is an additive set function. $\xi^*(A)$ is even completely additive. This follows from the fact that, as we have seen,

for the characteristic functions $f^*(t, A)$ of the random variables $\xi^*(A)$ the relation $f^*(t, A) = g^*(t, A)$ $(|t| \leqq T)$ holds. Thus for every non-increasing sequence of $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ tending to 0, we have

$$\lim_{n \to \infty} f^*(t, A_n) = \lim_{n \to \infty} g^*(t, A_n) = 1 \quad \text{if} \quad |t| \leqq T$$

which according to the Corollary of Theorem 2.1 implies that $\xi^*(A)$ is a completely additive set function.

The uniqueness of the extension can be proved as follows. Let ξ^* and ξ^{**} be two completely additive set functions defined on the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$. Suppose that ξ^* and ξ^{**} coincide on the ring $\mathfrak{R}$. Let $\mathfrak{M}$ denote the class of those sets A for which $\xi^*(A) = \xi^{**}(A)$. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a monotone sequence of sets of $\mathfrak{M}$, $A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$. The complete additiveness of the set functions ξ^*, ξ^{**} implies that

$$\lim_{n \to \infty} \xi^*(A_n) = \xi^*(A), \quad \lim_{n \to \infty} \xi^{**}(A_n) = \xi^{**}(A).$$

Since $\xi^*(A_n) = \xi^{**}(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, it follows that $A \in \mathfrak{M}$. Hence $\mathfrak{M}$ is a monotone class of sets. We know that $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ but these together imply that $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, because the smallest monotone class containing a ring $\mathfrak{R}$ is identical with the σ-ring $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

Proof of the second part of the theorem. In order to prove the second half of the theorem we shall show that for any positive number T the conditions of Theorem 1.1 are satisfied for the set function (3.5). Condition a) is obviously satisfied because $f(t, A)$ is a characteristic function and accordingly

$$\sup_{|t| \leqq T} |1 - f(t, A)| \leqq 2.$$

Let us investigate Condition b). By Theorem 2.7 the set function $|1 - f(t, A)|$ is subadditive for every fixed value of t. Hence it follows that if T is a fixed positive number, then the set function $\sup\limits_{|t| \leqq T} |1 - f(t, A)|$ is also subadditive, i. e. Condition b) is also satisfied.

Finally, as for Condition c), let us consider an arbitrary sequence of disjoint sets $A_1, A_2, \ldots$ of the σ-ring $\mathfrak{S}$. Since the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

converges with probability 1 regardless of the order of summation, it follows that the infinite series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{|x| \leqq 1} x^2 dF(x, A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int\limits_{|x| \leqq 1} x dF(x, A_k) \right|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi(A_k)| > 1)$$

are convergent ([8], § 5). Hence by the inequality

$$|1-f(t, A_k)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{itx}) dF(x, A_k) \right| = \left| \int_{|x|\leq 1} + \int_{|x|>1} \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_{|x|\leqq 1} (e^{itx}-1-itx) dF(x, A_k) \right| + |t| \left| \int_{|x|\leqq 1} x dF(x, A_k) \right| +$$

$$+ 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)|>1) \leqq \frac{t^2}{2} \int_{|x|\leqq 1} x^2 dF(x, A_k) +$$

$$+ |t| \left| \int_{|x|\leqq 1} x dF(x, A_k) \right| + 2\mathbf{P}(|\xi(A_k)|>1)$$

it follows that Condition c) is also satisfied, i. e. the set function (3. 6) is of bounded variation. Thus Theorem 3. 1 is proved.

As a consequence of Theorem 3. 1 we can prove

THEOREM 3. 2. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If for every sequence $A_1, A_2, \ldots$ of disjoint sets of $\mathfrak{R}$ the series*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

converges with probability 1, *then $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.*

PROOF. The above series must converge with probability 1 regardless of the order of summation, since a rearrangement A_{i_k} of the sequence A_k consists also of disjoint sets of $\mathfrak{R}$. Hence by Theorem 2. 1 of [4] (p. 115) it follows that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1-f(t, A_k)| < \infty$$

for every t. By Theorems 2. 7 and 1. 1, for every t, $|1-f(t, A)|$ $(A \in \mathfrak{R})$ is of bounded variation, and thus the conditions in Theorem 3. 1 are fulfilled. This completes the proof of the theorem.

The proof of the following theorem is contained implicitly in the proof of Theorem 3. 1. However, we give here another proof which does not use transfinite induction and is based only on the second assertion of Theorem 3. 1.

THEOREM 3. 3. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$. If $A_1, A_2, \ldots$ is a convergent sequence of sets of $\mathfrak{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, then*

$$\xi(A_n) \Longrightarrow \xi(A) \quad \text{if} \quad n \to \infty.$$

PROOF. By Theorem 2. 7, for every fixed t, $|1-f(t, A)|$ is a completely additive set function. Hence it follows that for every $T>0$, $\sup\limits_{t\leqq T} |1-f(t, A)|$

is also completely subadditive and by Theorem 3.1 it is also of bounded variation. Let $W(T, A)$ denote the variation of $\sup_{|t|\leqq T}|1-f(t, A)|$ on the set $A \in \mathfrak{S}$, then by Theorem 1.2 it follows that $W(T, A)$ is a bounded measure on $\mathfrak{S}$. Since $\lim_{n\to\infty}(A_n - A) = \lim_{n\to\infty}(A - A_n) = 0$, we have $\lim_{n\to\infty} W(T, A_n - A) = \lim_{n\to\infty} W(T, A - A_n) = 0$. Taking into account the inequality

$$\sup_{|t|\leqq T}|1-f(t, B)| \leqq W(T, B) \qquad (B \in \mathfrak{S}),$$

we obtain that $\lim_{n\to\infty} f(t, A_n - A) = \lim_{n\to\infty} f(t, A - A_n) = 1$ if $|t| \leqq T$. As this is true for every $T > 0$, it follows that

$$\xi(A - A_n) \Rightarrow 0, \quad \xi(A_n - A) \Rightarrow 0 \quad \text{if} \quad n \to \infty.$$

From this fact and from the inequality

$$|\xi(A_n) - \xi(A)| \leqq |\xi(A_n - A)| + |\xi(A - A_n)|$$

our assertion follows immediately.

§ 3. An extension theorem under condition on the distribution functions

In the following theorems the possibility of carrying out the extension will be proved by reducing it to Theorem 3.1. Thus we need not state again the uniqueness of the extension.

THEOREM 3.4. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If the set of distribution functions $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is compact, then $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.*

Conversely, if $\xi(A)$ is a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$, then the set $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ is compact.

PROOF OF THE FIRST PART OF THE THEOREM. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{R}$. The set $\mathfrak{F}' = \{F(x, A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots + A_{i_r})\}$ is a subset of $\{F(x, A), A \in \mathfrak{R}\}$, hence $\mathfrak{F}'$ is compact. According to Theorem 1.10, the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)$$

converges with probability 1 regardless of the order of summation, hence by Theorem 3.2 $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

PROOF OF THE SECOND PART OF THE THEOREM. First we prove that the set function $\mu_3(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ is completely subadditive. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence

of disjoint sets of the σ-ring $\mathfrak{S}$. By Theorem 2.5 it follows that

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \mu_3(A_k) + \mu_3\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\right).$$

Consequently, we have merely to show that the second member on the right hand side converges to 0. Let $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$. The set function $\mu_3(A)$ is monotonous, hence the sequence $\mu_3(B_n)$ is non-increasing. By Theorem 2.6 $\mu_3(A)$ can take on only the values 0 and 1, therefore there are two cases: either there is an N such that $\mu_3(B_n) = 0$ if $n > N$ or $\mu_3(B_n) = 1$ for all values of n. Contrarily to the statement let us suppose that the latter case holds. Then by the Corollary of Theorem 1.4 and by Theorem 2.2 there exists a sequence $C_1, C_2, \ldots$ of sets such that $C_k \in \mathfrak{S}, C_k \subseteq B_k, \left|Q\left(\frac{1}{2}, C_k\right)\right| > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Since $B_k \to 0$, it follows that $C_k \to 0$, hence by Theorem 3.2 $\xi(C_k) \Longrightarrow 0$ if $k \to \infty$. Thus $Q\left(\frac{1}{2}, C_k\right) \to 0$ if $k \to \infty$, what is a contradiction. Consequently, $\mu_3(A)$ is completely subadditive.

It follows from the monotonity of the set function $\mu_3(A)$ that the following property also holds: if $A_1, A_2, \ldots$ are arbitrary sets belonging to the σ-ring $\mathfrak{S}$, then

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3(A_k).$$

Namely

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l\right) \qquad (A_0 = 0),$$

therefore, since $\mu_3(A)$ is completely subbaditive and monotonically increasing, it follows that

$$\mu_3\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3\left(A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3(A_k).$$

Consider the completely additive set function $\xi(A)$ defined on the σ-ring $\mathfrak{S}$. In contradiction to the statement, let us suppose that the set $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ is not compact. Then, by Theorem 1.6,

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{A \in \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = \varrho > 0.$$

Hence it follows that for every positive ε

$$\sup_{A \in \mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) \geqq \varrho > 0$$

Since

$$\sup_{A\in\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)|>\varepsilon)=\sup_{A\in\mathfrak{S}}\ \sup_{B\in A\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)|>\varepsilon),$$

it follows that there exists a sequence of sets A_n ($A_n\in\mathfrak{S}$) for which

$$\sup_{B\in A_n\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B_n)|>n)\geqq\frac{\varrho}{2}>0.$$

If $A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$, then by the preceding inequalities

$$\sup_{B\in A\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)|>n)\geqq \sup_{B\in A_n\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)|>n)\geqq\frac{\varrho}{2}>0;$$

therefore

$$\mu_3(A)=\lim_{n\to\infty}\sup_{B\in A\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(B)|>n)\geqq\frac{\varrho}{2}>0.$$

By Theorem 2.6 $\mu_3(A)$ can take on only the values 0 and 1; hence it follows that $\mu_3(A)=1$.

Now we shall prove that if $B\in\mathfrak{S}$, $\mu_3(B)=1$, then for every pair of numbers λ, m we can found a set $B_m\in B\mathfrak{S}$ such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda, B_m)$ we have

$$\mu_3(B_m)=1,\quad |Q(\lambda, B_m)|>m.$$

Suppose that such a set does not exist. Since $\mu_3(B)=1$, we can find sets $C_k\in B\mathfrak{S}$ ($k=1,2,\ldots$) such that $|Q(\lambda, C_k)|>k$. According to our assumption $\mu_3(C_k)=0$ if $k\geqq m$. Consider the set $C=\sum_{k=m}^{\infty}C_k$. We have proved that

$$\mu_3(C)\leqq\sum_{k=m}^{\infty}\mu_3(C_k),$$

therefore $\mu_3(C)=0$. Then, by Theorems 1.6 and 1.5, there exists a number $K(\lambda)$ such that for all $Q(\lambda, C')$ we have

$$|Q(\lambda, C')|\leqq K(\lambda)\quad\text{if}\quad C'\in C\mathfrak{S},$$

but this is a contradiction.

Applying to the set $B=A$ what has been said above let us choose a set $B_1\in A\mathfrak{S}$ for which $\mu_3(B_1)=1$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_1\right)\right|>1$. Similarly, it follows that there exists a set $B_2\in B_1\mathfrak{S}$ for which $\mu_3(B_2)=1$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_2\right)\right|>2$ etc. Therefore we can construct a non-increasing sequence of sets $B_1, B_2,\ldots$ for which

$B_n \in \mathfrak{S}$, $\left|Q\left(\frac{1}{2}, B_n\right)\right| > n$. The sequence $\xi(B_n)$ is convergent because

$$\xi(B_n) = \xi(B) + \sum_{k=n}^{\infty} (\xi(B_k) - \xi(B_{k+1})), \qquad B = \prod_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Consequently, the series $Q\left(\frac{1}{2}, B_n\right)$ is bounded, but this is a contradiction. Thus Theorem 3. 2 is proved.

COROLLARY. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If*

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon\to\infty} \sup_{A\in\mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = 0,$$

then $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

Conversely, if $\xi(A)$ is a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$, then

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon\to\infty} \sup_{A\in\mathfrak{S}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon) = 0.$$

PROOF. The statement follows from Theorems 3. 4 and 1. 6 immediately.

§ 4. Extension theorems under conditions on quantiles

The following theorems are simple applications of Theorems 3. 1 and 3. 2 and of those of Chapter II and deal with the reduction of the condition in Theorem 3. 4.

Theorem 3. 4 contains when compared with the case of ordinary real-valued set functions a surplus of conditions which are needed to ensure the extension of a completely additive random-valued set function $\xi(A)$. If $\varphi(A)$ is a completely additive real-valued set function defined on a ring $\mathfrak{R}$ and

$$\xi(\omega, A) \equiv \varphi(A) \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{R},$$

then

$$Q(\lambda, A) \equiv \varphi(A) \quad \text{if} \quad 0 < \lambda < 1, \quad A \in \mathfrak{R},$$

i. e. all quantiles of $\xi(\omega, A)$ coincide with the value $\varphi(A)$. Since it has been shown that for the extension of $\varphi(A)$ the boundedness of the set $\{\varphi(A), A \in \mathfrak{R}\}$ is needed, we can say that the set function $\xi(A) = \varphi(A)$ can be extended if there is a λ for which the set $\{Q(\lambda, A), A \in \mathfrak{R}\}$ is bounded.

If the random variables $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ are not constants, then for the extension the boundedness of two quantile-sets is required.

THEOREM 3. 5. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If there exists a pair of numbers λ_1, λ_2 $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1)$ such that*

with a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda_1, A), Q(\lambda_2, A)$ *the sets* $\{Q(\lambda_1, A), A\in\mathfrak{R}\}, \{Q(\lambda_2, A), A\in\mathfrak{R}\}$ *are bounded, then* $\xi(A)$ *can be extended to* $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

PROOF. The theorem is a straightforward consequence of Theorems 1. 11 and 3. 2.

THEOREM 3. 6. *Let* $\xi(A)$ *be a completely additive set function defined on a ring* $\mathfrak{R}$. *If the random variables* $\xi(A)$ $(A\in\mathfrak{R})$ *are symmetrically distributed and there exists a number* $\lambda\neq\frac{1}{2}$ $(0<\lambda<1)$ *such that with a convenient choice of the quantiles* $Q(\lambda, A)$ *the set* $\{Q(\lambda, A), A\in\mathfrak{R}\}$ *is bounded, then* $\xi(A)$ *can be extended to* $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

PROOF. Since $\lambda\neq\frac{1}{2}$, it follows that $\lambda\neq 1-\lambda$. On the other hand, $\xi(A)$ has a symmetric distribution, hence with a convenient choice of the quantiles $Q(1-\lambda, A)$ the set $\{Q(1-\lambda, A), A\in\mathfrak{R}\}$ is also bounded together with the set $\{Q(\lambda, A), A\in\mathfrak{R}\}$ and thus the conditions of Theorem 3. 5 are satisfied.

THEOREM 3. 7. *Let* $\xi(A)$ *be a completely additive set function defined on a ring* $\mathfrak{R}$. *If the random variables* $\xi(A)$ *are non-negative and there is a* λ $(0<\lambda<1)$ *such that with a convenient choice of the quantiles* $Q(\lambda, A)$ *the set* $\{Q(\lambda, A), A\in\mathfrak{R}\}$ *is bounded, then* $\xi(A)$ *can be extended to* $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

PROOF. The theorem is a straightforward consequence of Corollary 2 of Theorem 1. 11 and of Theorem 3. 2.

§ 5. Further extension theorems

THEOREM 3. 8.[6] *Let* $\xi(A)$ *be a completely additive set function defined on a ring* $\mathfrak{R}$. *If there is a positive number* ε *such that the following set functions*

$$\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x, A), \qquad \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\, dF(x, A), \qquad \mathbf{P}(|\xi(A)|>\varepsilon) \qquad (A\in\mathfrak{R}) \tag{3. 15}$$

are of bounded variation, then $\xi(A)$ *can be extended to* $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

Conversely, if $\xi(A)$ *is a completely additive set function defined on a* σ*-ring* $\mathfrak{S}$, *then the set functions* (3. 15) $(A\in\mathfrak{S})$ *are of bounded variation for every positive* ε.

PROOF OF THE FIRST PART OF THE THEOREM. We shall show that the set function $|1-f(t, A)|$ is of bounded variation for every fixed value of t.

[6] This theorem can be regarded as a generalization of the three series theorem of KOLMOGOROV.

Namely, if $\varepsilon>0$, then

$$|1-f(t, A)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{itx})\,dF(x, A)\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{t^2}{2}\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x, A)+|t|\left|\int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A)\right|+2\mathbf{P}(|\xi(A)|>\varepsilon) \qquad (A\in\mathfrak{R}).$$

PROOF OF THE SECOND PART OF THE THEOREM. By Theorem 3. 1 the set function (3. 5) is of bounded variation. By inequality (1. 1) it follows that if $0<\varepsilon\leqq 1$, the set function

$$\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x, A)$$

is of bounded variation.

By inequality (1. 2) it follows that

$$\mathbf{P}(|\xi(A)|>\varepsilon) \qquad (A\in\mathfrak{S})$$

is of bounded variation for every $\varepsilon>0$. In addition, since for an arbitrary positive ε we have

$$\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x, A)\leqq\int_{|x|\leqq 1} x^2\,dF(x, A)+\varepsilon^2\mathbf{P}(|\xi(A)|>1),$$

taking into account what has been said previously we obtain that the set function

$$\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x, A)$$

is also of bounded variation for every positive ε. Let us consider the following inequality:

$$f(t, A)-1=\int_{|x|\leqq\varepsilon}(e^{itx}-1-itx)\,dF(x, A)+$$

$$+it\int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A)+\int_{|x|>\varepsilon}(e^{itx}-1)\,dF(x, A).$$

If $t\neq 0$, it follows

$$\left|\int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x, A)\right|\leqq\frac{1}{|t|}|1-f(t, A)|+\frac{|t|}{2}\int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2\,dF(x, A)+\frac{2}{|t|}\mathbf{P}(|\xi(A)|>\varepsilon),$$

hence the set functions (3. 15) are of bounded variation for every positive ε. Thus we have proved the theorem.

THEOREM 3. 9. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If the set function*

$$1-P_0(A)=1-\mathbf{P}(\xi(A)=0)$$

is of bounded variation, then $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

PROOF. The theorem is a straightforward consequence of the inequality

$$|1-f(t, A)| \leqq 2(1-P_0(A))$$

and of Theorem 3. 1.

THEOREM 3. 10. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If the set function*

$$\mathbf{M}(|\xi(A)|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x, A) \qquad (A \in \mathfrak{R})$$

is of bounded variation, then $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

PROOF. The theorem is an immediate consequence of the inequality

$$|1-f(t, A)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{itx}) dF(x, A) \right| \leqq |t| \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x, A)$$

and of Theorem 3. 1.

THEOREM 3. 11. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. If the set functions*

$$M(A) = \mathbf{M}(\xi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, A),$$

$$D^2(A) = \mathbf{D}^2(\xi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x, A) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, A) \right)^2$$

are of bounded variation, then $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

PROOF. According to CHEBYSEV's inequality

$$\mathbf{P}(|\xi(A) - M(A)| > \varepsilon) \leqq \frac{D^2(A)}{\varepsilon^2}.$$

Consequently, if $|M(A)| \leqq M_1$, $D^2(A) \leqq D_1$, then

$$\mathbf{P}(|\xi(A)| > M_1 + \varepsilon) \leqq \mathbf{P}(|\xi(A) - M(A)| > \varepsilon) \leqq \frac{D^2(A)}{\varepsilon^2} \leqq \frac{D_1}{\varepsilon^2}.$$

Hence we have

$$\mu_3 = \lim_{\varepsilon \to \infty} \sup_{A \in \mathfrak{R}} \mathbf{P}(|\xi(A)| > M_1 + \varepsilon) = 0,$$

therefore, by Theorem 1.6 and the Corollary of Theorem 3. 4, the extension can be carried out.

REMARK. We see that the set functions $M(A)$ and $D^2(A)$ need not to be completely additive. The extension can be carried out also if they are only bounded.

§ 6. Extension of a set function defined on an algebra

If the domain of definition of the set function $\xi(A)$ is an algebra, the conditions concerning the extension can be reduced. This is shown by the following theorems:

THEOREM 3.12. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on an algebra $\mathfrak{R}$. If there exists a number $\lambda\,(0<\lambda<1)$ such that by a convenient choice of the quantiles $Q(\lambda, A)$ the set $\{Q(\lambda, A),\ A\in\mathfrak{R}\}$ is bounded, then $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.*

PROOF. The theorem is a straightforward consequence of Theorems 2.2, 1.5 and 3.2.

THEOREM 3.13. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on an algebra $\mathfrak{R}$. If the random variables $\xi(A)\,(A\in\mathfrak{R})$ are symmetrically distributed, then the set function $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.*

PROOF. Since the quantiles $Q\left(\frac{1}{2}, A\right)$ can be chosen in such a way that $Q\left(\frac{1}{2}, A\right)=0$, the statement follows from Theorem 3.12 immediately.

THEOREM 3.14. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on an algebra $\mathfrak{R}$. If $\xi(A)\geqq 0\ (A\in\mathfrak{R})$, then the set function $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.*

PROOF. From

$$\xi(H)=\xi(A)+\xi(\bar{A}) \qquad (A\in\mathfrak{R})$$

it follows that $\xi(A)\leqq\xi(H)$. Hence if $Q(\lambda, H)$ is the greatest λ-quantile of $\xi(H)$, then

$$0\leqq Q(\lambda, A)\leqq Q(\lambda, H)=K(\lambda),$$

therefore by Theorems 1.5 and 3.4 $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$.

§ 7. The case of Euclidean spaces

There often occur problems in which we need to have an additive set function $\xi(A)$ with given properties on the ring of the bounded Borel sets of the space R_n. In this case we act in such a way that we divide the space R_n into a sum of an enumerable number of n-dimensional intervals in each of which the extension can be carried out.

In the present case H is the n-dimensional Euclidean space, $H=R_n$ and $\mathfrak{R}$ is the ring whose elements are finite sums of n-dimensional intervals of the following type:

$$a_k \leqq x_k < b_k \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on the ring $\mathfrak{R}$. Suppose that H can be divided into a countable sum of disjoint intervals $H_1, H_2, \ldots$ which have the property that every bounded set can be covered with a finite number of the intervals H_k and $\xi(A)$ can be extended to the σ-algebras $H_k\mathfrak{R}$. Under these conditions there is a set function $\xi^*(B)$ defined on the ring $\mathfrak{B}_1$ of the bounded Borel sets such that $\xi^*(B)$ is completely additive and

$$\xi^*(B)=\xi(B) \quad \text{if} \quad B\in\mathfrak{R}.$$

The extension is unique, i. e. if $\xi^{**}(B)$ is a completely additive set function defined on the ring $\mathfrak{B}_1$ and

$$\xi^*(B)=\xi^{**}(B) \quad \text{if} \quad B\in\mathfrak{R},$$

then

$$\xi^*(B)=\xi^{**}(B) \quad \text{if} \quad B\in\mathfrak{B}_1.$$

This can be seen as follows. Carry out the extension inside the sets H_k. If $B\in\mathfrak{B}_1$, then there is a number N such that $B\subseteq\sum_{k=1}^{N} H_k$. Let

$$\xi^*(B)=\sum_{k=1}^{N}\xi^*(BH_k).$$

It is easy to see that $\xi^*(B)$ is completely additive on the ring $\mathfrak{B}_1$ and on the elements of $\mathfrak{R}$ it coincides with $\xi(B)$. Also the statement concerning the uniqueness can be simply proved.

From the precedings and from Theorems 3. 11 and 3. 12 it follows immediately that if $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}_1$ and $\xi(A)$ denote the same as above and for every set $A\in\mathfrak{R}$ the variable $\xi(A)$ has a symmetrical distribution or for every set $A\in\mathfrak{R}$ we have $\xi(A)\geqq 0$, then the set function $\xi(A)$ can be extended to the ring $\mathfrak{B}_1$.

In the following theorem we consider as random variables also the functions $\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$ which are measurable but eventually may have an infinite value with positive probability.

THEOREM 3. 15. *Denote by $\mathfrak{R}$ the same ring as above. Let $\mathfrak{B}$ be the σ-algebra of Borel sets of the space R_n and $\xi(A)$ a completely additive set function defined on the elements of $\mathfrak{R}$ for which*

$$0\leqq\xi(A)<\infty \qquad (A\in\mathfrak{R}).$$

Under these conditions $\xi(A)$ can be extended to all elements of $\mathfrak{B}$ and the extension is unique.

Proof. First, according to what has been said above, let us carry out the extension of $\xi(A)$ to the ring $\mathfrak{B}_1$. Now, if B is an unbounded Borel set and $B=\sum_{k=1}^{\infty} B_k$ where the sets $B_1, B_2, \ldots$ are bounded disjoint Borel sets, then put

$$\xi^*(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k).$$

This correspondence is unique. In fact, if $C_1, C_2, \ldots$ is a sequence of bounded disjoint Borel sets for which $B=\sum_{k=1}^{\infty} C_k$, then, according to

$$B_n=\sum_{k=1}^{\infty} B_n C_k$$

and

$$C_k=\sum_{n=1}^{\infty} C_k B_n,$$

it follows that

$$\xi^*(B_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_n C_k), \quad \xi^*(C_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi^*(C_k B_n).$$

Thus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi^*(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_n C_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\xi^*(C_k B_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(C_k).$$

$\xi^*(B)$ is a completely additive set function. Namely, by the construction it is clear that if the sets $B_1, B_2, \ldots, B_r$ are pairwise disjoint sets, then the random variables $\xi^*(B_1), \xi^*(B_2), \ldots, \xi^*(B_r)$ are independent. If $B=\sum_{k=1}^{r} B_k$, where B_k is a sequence of disjoint Borel sets, let us construct the sequences $\{C_{kn}\}$ consisting of bounded Borel sets for which we have

$$B_k=\sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}, \quad C_{kn}C_{km}=0 \quad \text{if} \quad n\neq m \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

We know that

$$\xi^*(B_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi^*(C_{kn}),$$

therefore, by the uniqueness of the definition of $\xi^*(B)$, it follows that,

$$\xi^*(B)=\sum_{k,\,n}\xi^*(C_{kn})=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\xi^*(C_{kn})=\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k).$$

This completes the proof of the theorem.

REMARK 1. The random variables $\xi^*(B)\,(B\in\mathfrak{B})$ are either finite-valued with probability 1 or infinite-valued with probability 1. Namely, if $B=\sum_{k=1}^{\infty}B_k$ where $B_iB_k=0$ if $i\neq k$, $B_k\in\mathfrak{B}_1$ $(k=1,2,\ldots)$, then the probability that the sum of the series $\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k)$ is finite is either 0 or 1 ([8], p. 60).

REMARK 2. Suppose that the set function $\xi(A)$ defined on the ring $\mathfrak{R}$ is homogeneous, i. e. the distribution of $\xi(A)$ depends on the measure of the set A only, but it does not depend on its position. In this case in order to have $\xi^*(B)<\infty$ it is necessary and sufficient that $|B|<\infty$.

Namely, if $|B|<\infty$ and $B_1, B_2, \ldots$ is a sequence of bounded disjoint Borel sets for which $B=\sum_{k=1}^{\infty}B_k$, then there exists a bounded Borel set A and a sequence A_k consisting of disjoint Borel sets such that

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k,\quad |B_k|=|A_k|\quad (k=1,2,\ldots).$$

Since

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-f(t,B_k)|=\sum_{k=1}^{\infty}|1-f(t,A_k)|<\infty,$$

it follows that the sum of the series $\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k)$ is finite with probability 1, i. e. $\xi^*(B)<\infty$. Conversely, if $|B|=\infty$, then let $B_1, B_2, \ldots$ be disjoint Borel sets such that $B=\sum_{k=1}^{\infty}B_k$, $|B_k|=1$. In this case

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-f(t,B_k)|=|1-f(t,B_1)|+|1-f(t,B_1)|+\cdots=\infty,$$

therefore the series $\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k)$ is not convergent. Thus, according to the 0 or 1 law, the equality

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi^*(B_k)=\xi^*(B)=\infty$$

has the probability 1, and thus we have proved our statement.

IV. THE PROPERTIES OF COMPLETELY ADDITIVE SET FUNCTIONS DEFINED ON A σ-RING

§ 1. Set functions of bounded variation

In Chapter III we have seen that if $\xi(A)$ is a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$, then for every positive T and ε the set functions

$$\sup_{|t|\leqq T}|1-f(t,A)|,\quad \int_{|x|\leqq\varepsilon} x^2 dF(x,A),\quad \int_{|x|\leqq\varepsilon} x\,dF(x,A),\quad \mathbf{P}(|\xi(A)|>\varepsilon)$$

are of bounded variation. Starting from this fact, we shall prove two theorems.

THEOREM 4.1. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$ and $g(x)$ a polynomial for which $g(0)=0$. If the point 0 is not a limiting point of the closed interval $[a,b]$, then the set function*

$$\int_{a\leqq x\leqq b} g(x)\,dF(x,A)$$

is of bounded variation.

PROOF. It is clear that it suffices to prove that the set functions

$$\int_{a\leqq x\leqq b} x\,dF(x,A),\quad \int_{a\leqq x\leqq b}|x|^k dF(x,A)\quad (k\geqq 2)$$

are of bounded variation. Let $c_1=\min(|a|,|b|)$, $c_2=\max(|a|,|b|)$. If $a<0<b$, then.

$$\left|\int_{a\leqq x\leqq b} x\,dF(x,A)\right|\leqq\left|\int_{|x|\leqq c_1} x\,dF(x,A)\right|+c_2\mathbf{P}(|\xi(A)|>c_1),$$

$$\int_{a\leqq x\leqq b}|x|^k\,dF(x,A)\leqq\int_{|x|\leqq 1} x^2 dF(x,A)+c_2^k\mathbf{P}(|\xi(A)|>1).$$

On the other hand, if $b<0$ or $a>0$, then

$$\left|\int_{a\leqq x\leqq b} x\,dF(x\ A)\right|\leqq\int_{a\leqq x\leqq b}|x|\,dF(x,A)\leqq c_2\mathbf{P}(|\xi(A)|\geqq c_1),$$

$$\int_{a\leqq x\leqq b}|x|^k dF(x,A)\leqq c_2^k\mathbf{P}(|\xi(A)|\geqq c_1),$$

hence our statement is proved.

REMARK. In Chapter V we shall see that the set function $\int_{|x|\leqq\varepsilon}|x|\,dF(x,A)$ is not always of bounded variation.

THEOREM 4.2. *Lẹt $\xi(A)$ be a completely additive set funetion defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$ and $h(x)$ be a Borel measurable function for which*

$$|h(x)| \leqq c, \qquad h(x) = o(x^2) \quad \text{if} \quad x \to 0$$

where c is a constant. From these conditions it follows that the set function

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x, A)$$

is of bounded variation.

PROOF. By assumption there is a positive ε and a constant K such that $|h(x)| \leqq Kx^2$ if $|x| \leqq \varepsilon$. Thus we obtain that

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x, A) \right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dF(x, A) \leqq K \int_{|x| \leqq \varepsilon} x^2 dF(x, A) + c\mathbf{P}(|\xi(A)| > \varepsilon).$$

Since on the right hand side there stand set functions of bounded variation, our statement is proved.

§ 2. A further convergence theorem

Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$ and $A_n \in \mathfrak{S}$ a convergent sequence, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Theorem 3.2 states that the sequence of random variables $\xi(A_n)$ converges stochastically to $\xi(A)$. Besides, if A_n is a monotonic sequence, the complete additiveness of ξ implies the more stronger relation

$$\lim_{n\to\infty} \xi(A_n) = \xi(A).$$

In the following theorem we shall suppose regarding the set function $\xi(A)$ only that to disjoint sets there belong independent variables. Since we only permit non-negative-valued random variables, the theorem can be proved in the same way as the corresponding theorem concerning ordinary measures.

THEOREM 4.4. *Let $\mathfrak{S}$ be a σ-ring. To each element A of $\mathfrak{S}$ let a non-negative random variable $\xi(A)$ correspond in such a manner that if $A_1, A_2, \ldots$ is a sequence of disjoint sets of $\mathfrak{S}$, $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, then*

$$\xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k). \tag{4.1}$$

In this case the set function ξ has the following property: if $B_1, B_2, \ldots$ is a convergent sequence of sets belonging to the σ-ring $\mathfrak{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, then

$$\lim_{n\to\infty} \xi(B_n) = \xi(B).$$

PROOF. Put

$$C_n = B_n B_{n+1} \ldots, \quad D_n = B_n + B_{n+1} + \cdots$$

Since

$$C_n \subseteq B_n \subseteq D_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

it follows that

$$\xi(C_n) \leqq \xi(B_n) \leqq \xi(D_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.2}$$

On the other hand,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} B_n = B,$$

consequently, by the relation (4.1) we obtain that for the monotonous sequences C_n and D_n of sets

$$\lim_{n\to\infty} \xi(C_n) = \lim_{n\to\infty} \xi(D_n) = \xi(B). \tag{4.3}$$

From (4.2) and (4.3) it follows that

$$\lim_{n\to\infty} \xi(B_n) = \xi(B).$$

Thus we have proved the theorem.

It is an open question whether the relation

$$\xi(A_n) \to \xi(A) \quad \text{if} \quad A_n \to A, \quad A_n \in \mathfrak{S}$$

holds always for a completely additive set function $\xi(A)$ defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$. In some particular cases, however, this stronger convergence holds even for set functions $\xi(A)$ which take on positive and negative values equally. The author wishes to return to these problems in a forthcoming paper.

§ 3. Continuous and complete set functions

Let $\mathfrak{S}$ be a σ-ring consisting of some subsets of a set H. Suppose that the elements of H belong to $\mathfrak{S}$. A completely additive set function $\xi(A)$ defined on the σ-ring $\mathfrak{S}$ will be called continuous if for every element h of the set H we have

$$\xi(h) = 0.$$

The set function $\xi(A)$ will be called purely discontinuous if there exists an enumerable set H_1 such that

$$\xi(A\bar{H}_1) = 0 \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{S}.$$

If $\xi(A)$ is a completely additive set function and $\xi(h) \neq 0$ where $h \in H$, then the point h will be called a discontinuity point of $\xi(A)$.

In the theory of real-valued set functions it is well known that every completely additive set function possessing points of discontinuity can be

decomposed into the sum of a continuous and a purely discontinuous set function. A similar decomposition can be carried out here, too. Before passing to this we prove the following

THEOREM 4. 5. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$. If T is a fixed positive number, then the set function $\xi(A)$ is absolutely continuous with respect to the measure $W(T, A)$,*[7] *i. e.*

$$\xi(A)=0 \quad \text{if} \quad W(T, A)=0.$$

PROOF. Since

$$|1-f(t, A)| \leqq W(T, A) \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{S},$$

it follows that

$$f(t, A)=1 \quad \text{if} \quad |t| \leqq T.$$

From the inequality (1. 3) it follows that, for every t, $f(t, A)=1$, what was to be proved.

Now we shall prove

THEOREM 4. 6. *Let $\xi(A)$ be a completely additive set function defined on a σ-ring $\mathfrak{S}$. Suppose that the elements of H belong to $\mathfrak{S}$ also and $\xi(A)$ has at least one discontinuity point. In this case there exist continuous and purely discontinuous completely additive set functions $\xi'(A)$ and $\xi''(A)$, resp., such that*

$$\xi(A)=\xi'(A)+\xi''(A) \quad \text{if} \quad A \in \mathfrak{S}.$$

PROOF. Let T be a fixed positive number. As $W(T, A)$ is a finite measure, there exists an enumerable set H_1 such that

$$W(T, h)=0 \quad \text{if} \quad h \in H-H_1.$$

Since $\xi(A)$ is absolutely continuous, regarding the measure $W(T, A)$, it follows that the set function

$$\xi'(A)=\xi(A\bar{H}_1)$$

is continuous. On the other hand, the set function

$$\xi''(A)=\xi(AH_1)$$

is purely discontinuous and

$$\xi(A)=\xi(A\bar{H}_1)+\xi(AH_1).$$

Thus our theorem is proved.

In the same way as in case of ordinary set functions we can introduce also here the notion of completeness. The definition is also a perfect analogue to that on p. 34 of [6] therefore we do not consider it in detail. Taking Theorem 4. 5 into account we can easily see that the process of completion can also be carried out without any difficulty.

[7] See p. 244.

V. EXAMPLES

1. Poisson set functions. Denote $M(A)$ a real-valued, finite, non-negative, additive set function defined on a ring $\mathfrak{R}$. Further let $\xi(A)\,(A \in \mathfrak{R})$ be an additive set function. If

$$\mathbf{P}(\xi(A)=k)=\frac{M^k(A)}{k!}e^{-M(A)} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

then the set function $\xi(A)$ will be called to be of Poisson type. In this case the characteristic function of $\xi(A)$ has the form

$$f(t, A)=e^{M(A)(e^{it}-1)}.$$

If the set function $M(A)$ is completely additive (in other words: if $M(A)$ is a measure), the same holds for the set function $\xi(A)$, too. Namely, let $A_1, A_2, \ldots$ be a non-increasing sequence of sets consisting of the elements of $\mathfrak{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=0$, then, from the relations

$$|1-f(t, A)| \leqq M(A)|t|e^{M(A)|t|} \tag{5.1}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} M(A_n)=0,$$

it follows that

$$f(t, A_n) \Rightarrow 1 \quad \text{if} \quad n\to\infty,$$

hence by Theorem 2.1 $\xi(A)$ is completely additive. If the measure $M(A)$ is bounded, then, by (5.1), the set function $|1-f(t, A)|$ is of bounded variation, hence $\xi(A)$ can be extended. Particularly, if $H=R_1$, $M(A)=c|A|$ where c is a constant, we get the set function generated by the differences of an ordinary homogeneous Poisson process.

2. Composed Poisson set functions. Let $M_1(A), M_2(A), \ldots$ be a sequence of real-valued, non-negative, additive set functions defined on a ring $\mathfrak{R}$. The additive set function $\xi(A)$ defined on the ring $\mathfrak{R}$ will be called to be of composed Poisson type if the characteristic function of $\xi(A)$ has the form

$$f(t, A)=\exp\sum_{k=1}^{\infty} M_k(A)(e^{i\lambda_k t}-1), \tag{5.2}$$

where the set $\{\lambda_k\}$ is the set of all possible values of the random variables $\xi(A)\,(A \in \mathfrak{R})$ and

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(A)<\infty \qquad (A \in \mathfrak{R}).$$

If

$$M(A)=\sum_{k=1}^{\infty} M_k(A) \qquad (A\in\mathfrak{R})$$

is a finite measure on the ring $\mathfrak{R}$, then in the same way as in the case of Poisson set functions it can be shown that $\xi(A)$ is completely additive. If, in addition, we suppose that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| M_k(A)<\infty \quad (A\in\mathfrak{R}) \tag{5. 3}$$

and the sum (5. 3) is a bounded measure on the ring $\mathfrak{R}$, then by the relation (5. 2) we obtain that

$$|1-f(t, A)|=\left|\prod_{k=1}^{\infty} e^{M_k(A)(e^{i\lambda_k t}-1)}-1\right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{M_k(A)(e^{i\lambda_k t}-1)}-1\right| \leqq$$

$$\leqq |t| \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| M_k(A) e^{\lambda_k t M_k(A)} \leqq L(t) \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| M_k(A)$$

where

$$L(t)=\max_k e^{|\lambda_k t| M_k(A)},$$

hence $|1-f(t, A)|$ is of bounded variation for every fixed value of t; thus $\xi(A)$ can be extended to the σ-ring $\mathfrak{S}(R)$.

It is easy to see that if $\mathfrak{R}$ is a ring of some subsets of the space $\mathfrak{R}_n$ and the distribution of $\xi(A)$ depends on the measure $|A|$ of the set A only, then

$$M_k(A)=c_k |A| \qquad (k=1,2,\ldots)$$

where $c_1, c_2, \ldots$ are constants.

3. Laplace—Gauss set function. That is the name of additive set functions $\xi(A)$ for which

$$f(t, A)=e^{itM(A)-D^2(A)\frac{t^2}{2}} \qquad (A\in\mathfrak{R})$$

where $M(A)$ and $D^2(A)$ are real-valued, additive set functions, $D^2(A)\geqq 0\,(A\in\mathfrak{R})$. If both set functions $M(A)$ and $D^2(A)$ are completely additive, then taking into account Theorem 2. 1 it follows that $\xi(A)$ is completely additive, too. If, in addition, the set functions $M(A)$ and $D^2(A)$ are bounded, then from the inequalities

$$|1-f(t, A)| \leqq |1-e^{itM(A)}|+1-e^{-D^2(A)\frac{t^2}{2}} \leqq |t| M(A)+D^2(A)\frac{t^2}{2}$$

it follows that for any fixed value of t the set function $|1-f(t, A)|$ is of bounded variation, therefore $\xi(A)$ can be extended to $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$. If $\mathfrak{R}$ is a ring of

ertain subsets of the space R_n and the distribution of $\xi(A)$ depends on $|A|$ nly, then it is easy to see that

$$M(A)=M|A|, \quad D^2(A)=D^2|A|,$$

vhere M and D^2 are constants. In particular, if $n=1$, then $\xi(A)$ is nothing lse than the set function generated by the differences of the ordinary 3rownian movement process.

4. Let $f_n(x)$ denote the n-th Rademacher function

$$f_n(x)=\operatorname{sg}\sin 2^n\pi x \qquad (0\leq x\leq 1).$$

Let the interval [0, 1] be the space of the elementary events and the possible events be the Lebesgue measurable sets of this interval. Then the functions $\{f_n(x)\}$ will be independent random variables. Consider the random variables

$$g_n(x)=\frac{f_n(x)}{n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Since

$$M(g_n(x))=0, \quad D^2(g_n(x))=\frac{1}{n^2},$$

t follows that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

converges with probability 1 regardless of the order of summation. If A is a set of natural numbers, then the series

$$\sum_{n\in A} g_n(x)$$

converges with probability 1 in every rearrangement to the same function, further the set function

$$g(x, A)=\sum_{n\in A} g_n(x)$$

is completely additive on the σ-ring $\mathfrak{S}$ of the subsets of the set H of natural numbers ([4], p. 118, Corollary 1). The set function $g(x, A)$ has the following properties:

a) $\mathbf{P}\left(|g_n(x)|=\frac{1}{n}\right)=1$, and thus the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|$$

diverges. Hence it follows that the set function $g(x, A)$ can not be decomposed in such a way that

$$g(x, A)=g^+(x, A)-g^-(x, A)$$

where $g^+(x, A)$, $g^-(x, A)$ are completely additive, non-negative set functions Namely, if such a decomposition would exist, then from the inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \leqq g^+(x, H) + g^-(x, H)$$

it would follow that the series $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converges absolutely, what is not true.

b) Since for every positive ε we have

$$M(|g_n(x)|) = \int_{|x| \leqq \varepsilon} |x| dF(x, n) \quad \text{if} \quad n \geqq \frac{1}{\varepsilon},$$

then, by Condition a), it follows that the set function

$$\int_{|x| \leqq \varepsilon} |x| dF(x, A)$$

is not of bounded variation.

(Received 18 May 1956)

Bibliography

[1] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, Sur les répartitions de Poisson, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **240** (1955), pp. 1045—1046.

[2] S. Bochner, Stochastic processes, *Annals of Math.*, **48** (1947), pp. 1014—1061.

[3] H. Cramér, A contribution to the theory of stochastic processes, *Proc. Sec. Berkeley Symp.*, (1951), pp. 329—340.

[4] J. L. Doob, *Stochastic processes* (New York—London, 1953).

[5] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин (Москва—Ленинград, 1949).

[6] H. Hahn and A. Rosenthal, *Set functions* (New Mexico, 1948).

[7] E. Hopf, *Ergodentheorie* (Berlin, 1937).

[8] A. N. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Berlin, 1933).

[9] E. Marczewski, Remarks on the Poisson stochastic process. II, *Studia Mathematica*, **13** (1953), pp. 130—136.

[10] A. Prékopa, On the convergence of series of independent random variables, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), pp. 410—417.

[11] A. Prékopa, Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 201—213.

[12] C. Ryll-Nardzewski, On the non-homogeneous Poisson process. I, *Studia Mathematica*, **14** (1954), pp. 124—128.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА. I

А. Прекопа (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $\mathfrak{R}(A, B, \ldots)$ есть кольцо, образованное из некоторых подмножеств некоторого множества H. Если всякой элементы A кольца $\mathfrak{R}$ соответствует некоторая случайная величина $\xi(A)$ так, что если множества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ кольца $\mathfrak{R}$ непересекающие, то случайные величины $\xi(A_1), \xi(A_2), \ldots, \xi(A_r)$ независимые и

$$\mathbf{P}\left(\xi\left(\sum_{k=1}^{r} A_k\right) = \sum_{k=1}^{r} \xi(A_k)\right) = 1,$$

тогда $\xi(A)$ называется аддитивной функцией множества. Аддитивная функция множества $\xi(A)$ называется вполне аддитивной, если для всякой последовательности непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots$ из $\mathfrak{R}$, для которой $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\left(\xi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(A_k)\right) = 1.$$

Основная цель работы изучение того, при каких условиях может быть распространена вполне аддитивная функция множества $\xi(A)$ на наименьшее σ-кольцо $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$, содержащее $\mathfrak{R}$, и какими свойствами обладает впольне аддитивная функция множества определенная на некотором σ-кольце.

ON A HIGH-INDICES THEOREM IN BOREL SUMMABILITY

By

P. ERDŐS (Budapest), corresponding member of the Academy

To the memory of O. SZÁSZ

Let $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ be an infinite series. Put $a'_k = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_k$. If $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ converges, it is defined as the Euler sum of $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. It is easy to see that if $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converges, so does $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$, i. e. Euler summability is regular. Euler summability was first investigated systematically by KNOPP.[1] MEYER-KÖNIG[2] proved the following high-indices theorem for Euler summability: Assume that $a_k = 0$ except if

(1) $$k = n_j \quad \text{where} \quad \frac{n_{j+1}}{n_j} \geqq c > 1.$$

Then if $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is Euler summable, it is convergent. MEYER-KÖNIG further conjectured that the theorem remains true if (1) is replaced by the much weaker condition $n_{j+1} - n_j > c\, n_j^{1/2}$ where $c > 0$ is any constant. It is not hard to see that MEYER-KÖNIG's conjecture if true is certainly best possible.

I succeeded in proving the following somewhat weaker theorem:[3] Let $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ be Euler summable, further $a_k = 0$ except if $k = n_j$ where $n_{j+1} - n_j > C\, n_j^{1/2}$ where C is a sufficiently large constant. Then $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is convergent.

The main point in these theorems is that no restriction is placed on the speed with which a_k tends to infinity. As far as I know no analogous

[1] K. KNOPP, Über das Eulersche Summierungsverfahren. I, *Math. Zeitschr.*, **15** (1922), pp. 226—253; II, **18** (1923), pp. 125—156.

[2] W. MEYER-KÖNIG, Die Umkehrung des Euler—Knoppschen und des Borelschen Limitierungsverfahrens auf Grund einer Lückenbedingung, *Math. Zeitschr.*, **49** (1943—44), pp. 151—160.

[3] P. ERDŐS, *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, **4** (1952), pp. 51—56. Recently MEYER-KÖNIG proved his conjecture: W. MEYER-KÖNIG, Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt, *Math. Zeitschr.*, **57** (1952—53), pp. 351—352.

theorem is known for Borel summability. High-indices theorems have, in fact, been proved for Borel summability, e. g. Theorem of PITT[4] which will be used later in this paper, but as far as I know the growth of the a-s was always restricted.

The series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is said to be Borel summable to the sum s if

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{x^k}{k!} = s, \quad s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i.$$

In this paper I prove the following

THEOREM. *Let $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ be Borel summable. Assume that $a_k = 0$ except if $k = n_j$ where*

$$n_{j+1} - n_j > c_1 n_j^{1/2} \tag{2}$$

($c_1 > 0$ is any constant). Further let be

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_{j+1} - n_j} < \infty. \tag{3}$$

Then $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is convergent.

Throughout this paper $c_1, c_2, \ldots$ will denote positive absolute constants.

The proof of our Theorem will be fairly complicated. It could be somewhat simplified if we would replace (2) by the following condition: $n_{j+1} - n_j > C n_j^{1/2}$ where C is a sufficiently large constant. The somewhat large extra trouble in proving our Theorem might be justified by the possibility that our Theorem is best possible in the following sense: Let $n_1, n_2, \ldots$ be a sequence of integers which does not satisfy both (2) and (3). Then there exists a divergent series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k = 0$ except if $k = n_j$, and $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is Borel summable.

If $n_1 < n_2, \ldots$ does not satisfy (2), it is easy to construct such a series. Thus only the necessity of (3) is in doubt. In fact, it is quite possible that analogously to the MEYER-KÖNIG conjecture condition (3) is entirely superfluous. At present I am unable to decide these questions.

[4] H. R. PITT, General Tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. II, 44 (1938), pp. 243—288, Theorem 17.

One final remark: We might modify the definition of Borel summability as follows: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is summable B' if

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{t^k}{k!}$$

exists as t runs through the integers. It is not hard to show that if $n_1 < n_2, \ldots$ is any sequence of integers, there exists a divergent series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ which is summable B' despite the fact that $a_k = 0$ except if $k = n_j$. Thus no high-indices theorem holds for B' summability unless we restrict the speed with which $s_k \to \infty$ (over and beyond the trivial restriction $s_k \frac{t^k}{k!} \to 0$ for every t).

LEMMA 1. *Let*

$$|s_n|^{1/n} = O(1) \qquad (n \to \infty),$$

further $a_k = 0$ *for* $k \neq n_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $n_{j+1} - n_j > c_1 n_j^{1/2}$. *Then if* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *is Borel summable, then it is also convergent.*

This is a result of PITT.[4]

For the rest of this paper we can assume that for infinitely many n the inequality

$$|s_n| > K^n$$

holds, where K is an arbitrary constant; henceforth we shall assume that for infinitely many n

$$|s_n| > 100^n. \tag{4}$$

Let us denote by $f(x)$ the index of the maximal term of the series $e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{t^k}{k!}$; if there are several such terms, $f(x)$ has the smallest possible value.

LEMMA 2. *$f(x)$ is a non-decreasing function of x.*

This obviously follows from the following statement: Let $y > x$, $k_2 > k_1$. Assume that

$$\frac{x^{k_2}}{k_2!} > \frac{x^{k_1}}{k_1!}, \tag{5}$$

then

$$\frac{y^{k_2}}{k_2!} > \frac{y^{k_1}}{k_1!}. \tag{6}$$

This is an immediate consequence of the identities

$$\frac{y^{k_2}}{k_2!}=\frac{x^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{y}{x}\right)^{k_2}, \qquad \frac{y^{k_1}}{k_1!}=\frac{x^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{y}{x}\right)^{k_1}$$

and of $k_2 > k_1$.

Let

$$n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots$$

be an infinite sequence of positive integers which satisfy (4) and for which

(7) $$|s_{n_{i_l}}| > |s_m| \quad \text{for} \quad m < n_{i_l}.$$

Then we have

LEMMA 3.

$$f(n_{i_l}) \geqq n_{i_l}.$$

Lemma 3 follows from (7).

LEMMA 4. *We have for* $n_{i_l} \leqq x \leqq 2n_{i_l}$

$$F(x) > 30^{n_{i_l}}$$

where $F(x)$ *denotes the maximal term of the series* $e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{k!}x^k$.

PROOF. We obtain from (4) by application of Stirling's formula

$$F(x) \geqq e^{-x}\frac{x^{n_{i_l}}}{n_{i_l}!}|s_{n_{i_l}}| > e^{-2n_{i_l}}\frac{n_{i_l}^{\,n_{i_l}}}{n_{i_l}!}100^{n_{i_l}} \geqq$$

$$\geqq e^{-2n_{i_l}}\frac{e^{n_{i_l}}}{\sqrt{2\pi n_{i_l}}}100^{n_{i_l}} = \left(\frac{100}{e}\right)^{n_{i_l}}\frac{1}{\sqrt{2\pi n_{i_l}}} > 30^{n_{i_l}},$$

q. e. d.

We are going to prove that

(8) $$\lim_{l\to\infty}\ \max_{n_{i_l}\leqq x\leqq 2n_{i_l}} e^{-x}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{k!}x^k\right| = \infty.$$

Clearly, (8) implies that $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ cannot be Borel summable. Thus (8) implies our Theorem. Thus it will be sufficient to prove (8).

Before proving (8) we simplify our notation.

Denote $m_1 = n_{i_l}$, $m_1 < m_2 < \cdots < m_r$ the n_i-s in the interval $(n_{i_l}, 2n_{i_l})$ (i. e. the m-s are the n_i-s in $(n_{i_l}, 2n_{i_l})$ for which a_k does not have to be 0).

It follows from the Lemmas 2 and 3 that for $x > m_1$ $f(x) \geqq m_1$. Now we distinguish two cases. In the first case for arbitrarily large K there exist infinitely many j-s for which either

$$f(x) = [x] \qquad (m_j \leqq y \leqq x \leqq y + Ky^{1/2} \leqq m_{j+1}) \tag{9}$$

or

$$f(x) = N \qquad (m_j \leqq y \leqq x \leqq y + Ky^{1/2} \leqq m_{j+1}); \tag{10}$$

it is easy to see that either $N = m_i$ or $N = m_{i+1} - 1$. $N = m_{i+1} - 1$ holds for $N \leqq y$, $N = m_i$ for $N \geqq y + Ky^{1/2}$. We may assume that y is an integer. The second case holds when for every number of the interval $(m_1, 2m_1)$ neither (9) nor (10) holds. We make use of (3) only in the second case.

Let us treat the first case. First we assume that (9) holds. We put $T = y + \left[\frac{K}{2} y^{1/2}\right]$, $L = y + [Ky^{1/2}]$ and show that

$$e^{-T} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{k!} T_k \right| \to \infty \quad \text{for} \quad m_1 \to \infty. \tag{11}$$

We have

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{k!} T^k = \sum_{k=0}^{m_j - 1} + \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} + \sum_{k=m_{j+1}}^{\infty} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3. \tag{12}$$

We estimate $\sum_2$ from below. We have from $s_{m_j} = s_{m_j+1} = \cdots = s_{m_{j+1}-1}$

$$\left|\sum\nolimits_2\right| = |s_{m_j}| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} \frac{T^k}{k!} \geqq |s_{m_j}| \sum_{k=y}^{T} \frac{T^k}{k} \geqq$$

$$\geqq |s_{m_j}| \frac{T^y}{y!} \left[\frac{K}{2} y^{1/2}\right] = |s_{m_j}| \frac{y^y}{y!} \left(\frac{T}{y}\right)^y \left[\frac{K}{2} y^{1/2}\right].$$

We have by Stirling's formula

$$\frac{y^y}{y!} = (1 + o(1)) \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \qquad (y \to \infty),$$

further

$$\left(\frac{T}{y}\right)^y = \left(\frac{y + \left[\frac{K}{2} y^{1/2}\right]}{y}\right)^y = (1 + o(1))\, e^{\frac{K}{2} y^{1/2} - \frac{K^2}{8}}.$$

Hence

$$\left|\sum\nolimits_2\right| > |s_{m_j}| \frac{K}{2\sqrt{2\pi}} (1 + o(1))\, e^{y + \frac{K}{2} y^{1/2} - \frac{K^2}{8}},$$

i. e.

(13) $$\left|\sum\nolimits_2\right| > |s_{m_j}|\, e^{T-\frac{K^2}{8}}.$$

Next we estimate $\sum_1$ and $\sum_3$ from above.

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{s_k}{k!} T^k = \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{s_k}{k!} y^k \left(\frac{T}{y}\right)^k.$$

Since by (9)

$$\frac{|s_k|}{k!} y^k \leqq \frac{|s_y|}{y!} y^y = |s_{m_j}| \frac{y^y}{y!},$$

we have

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \leqq |s_{m_j}| \frac{y^y}{y!} \left(\frac{T}{y}\right)^{m_j} \left(1 + \frac{y}{T} + \frac{y^2}{T^2} + \cdots\right) =$$

$$= |s_{m_j}| \frac{y^y}{y!} \left(\frac{T}{y}\right)^{m_j} \frac{T}{T-y} \leqq |s_{m_j}| \frac{y^y}{y!} \left(\frac{T}{y}\right)^{y} \frac{T}{T-y},$$

thus again, by applying Stirling's formula, $\left(\frac{T}{y}\right)^y = (1+o(1))\, e^{\frac{K}{2} y^{1/2} - \frac{K^2}{8}}$ and $\frac{T}{T-y} < \frac{4}{K} y^{1/2}$ $\left(\text{this is a consequence of } T = y + \left[\frac{K}{2} y^{1/2}\right]\right)$

(14) $$\left|\sum\nolimits_1\right| \leqq \frac{4}{K} |s_{m_j}|\, e^{T-\frac{K^2}{8}}$$

and by the same method we obtain

(15) $$\left|\sum\nolimits_3\right| \leqq \frac{4}{K} |s_{m_j}|\, e^{T-\frac{K^2}{8}}.$$

From (13), (14) and (15) we obtain for sufficiently large but fixed K

(16) $$e^{-T} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{k!} T^k\right| > \frac{1}{2e^{K^2/8}} |s_{m_j}|,$$

thus because of Lemma 4 our Theorem is proved if (9) holds.

Next assume that (10) holds. Then either

(17) $$N \leqq m_j - 1$$

or

(18) $$N \geqq m_{j+1}$$

where N is the number defined in (10); i. e. either $N = m_i$ or $N = m_{i+1} - 1$. First we assume that (17) holds, i. e. we have

(19) $$f(x) = m_{i+1} - 1 \qquad (m_j \leqq y \leqq x \leqq y + Ky^{1/2} \leqq m_{j+1})$$

here $i+1\leqq j$. We put again $T=y+\left[\frac{K}{2}y^{1/2}\right]$, $L=y+[Ky^{1/2}]$ and show 11). We have

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{k!}T^k=\sum_{k=0}^{m_i-1}+\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1}+\sum_{k=m_{i+1}}^{\infty}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3.$$

irst we estimate $\sum_2$ from below. We have

$$\left|\sum\nolimits_2\right|=\left|\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1}\frac{s_k}{k!}T^k\right|=$$

$$=\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\left(1+\frac{m_{i+1}-1}{T}+\frac{(m_{i+1}-1)(m_{i+1}-2)}{T^2}+\cdots\right)>$$

$$>\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\left(1+\frac{m_{i+1}-c_1m_{i+1}^{1/2}}{T}+\cdots+\left(\frac{m_{i+1}-1-c_1m_{i+1}^{1/2}}{T}\right)^{c_1m_{i+1}^{1/2}}\right)=$$

$$=\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\left(1-\left(\frac{m_{i+1}-c_1m_{i+1}^{1/2}}{T}\right)^{c_1m_{i+1}^{1/2}}\right)\frac{T}{T-m_{i+1}+c_1m_{i+1}^{1/2}}.$$

ince (by $m_{i+1}\leqq m_j<T$)

$$\left(\frac{m_{i+1}-c_1m_{i+1}^{1/2}}{T}\right)^{c_1m_{i+1}^{1/2}}<\left(1-\frac{c_1}{m_{i+1}^{1/2}}\right)^{c_1m_{i+1}^{1/2}}<e^{-c_1^2},$$

urther for $K>4c_1$

$$\frac{T}{T-m_{i+1}+c_1m_{i+1}^{1/2}}>\frac{1}{2}\frac{T}{T-m_{i+1}},$$

e have

20) $$\left|\sum\nolimits_2\right|\geqq c_2\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\frac{T}{T-m_{i+1}},$$

here c_2 is a constant depending only on c_1 defined in (2).

We now estimate $\sum_1$ and $\sum_3$. We have by (7)

21) $$\left\{\begin{aligned}\left|\sum\nolimits_1\right|&=\left|\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{s_k}{k!}T^k\right|\leqq\sum_{k=0}^{m_1-1}\frac{|s_k|}{k!}T^k+\sum_{l=1}^{i-1}|s_{m_l}|\sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1}\frac{T^k}{k!}\leqq\\&\leqq|s_{m_1}|\sum_{k=0}^{m_1-1}\frac{T^k}{k!}+\sum_{l=1}^{i-1}|s_{m_l}|\sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1}\frac{T^k}{k!},\end{aligned}\right.$$

urther

$$\sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1}\frac{T^k}{k!}=\frac{T^{m_{l+1}-1}}{(m_{l+1}-1)!}\left(1+\frac{m_{l+1}-1}{T}+\cdots\right)<\frac{T^{m_{l+1}-1}}{(m_{l+1}-1)!}\frac{T}{T-m_{l+1}}.$$

ow since $f(y)=m_{i+1}-1$, we have (for formal reasons we will replace

s_{m_j} by $s_{m_{j+1}-1}$)

$$|s_{m_{l+1}-1}|\frac{T^{m_{l+1}-1}}{(m_{l+1}-1)!}=|s_{m_{l+1}-1}|\frac{y^{m_{l+1}-1}}{(m_{l+1}-1)!}\left(\frac{T}{y}\right)^{m_{l+1}-1}\leqq$$

$$\leqq\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}y^{m_{i+1}-1}\left(\frac{T}{y}\right)^{m_{l+1}-1}=\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_{l+1}}$$

Hence

$$\left|\sum\nolimits_1\right|\leqq\frac{|s_{m_1}|}{m_1!}T^{m_1}\frac{T}{T-m_1}+\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_{l+1}}\frac{T}{T-m_{l+1}}\leqq$$

$$\leqq\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\left\{\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_1}\frac{T}{T-m_1}+\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_{l+1}}\frac{T}{T-m_{l+1}}\right\}$$

or

$$\left|\sum\nolimits_1\right|\leqq\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\frac{T}{T-m_{i+1}}\cdot 2\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_{l+1}} \tag{22}$$

We show that the factor $\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_{l+1}}$ is arbitrarily small if K of (10) is sufficiently large. We have

$$\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_{l+1}}=\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_i}\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_i-m_{l+1}};$$

since m_i and m_l lie in the interval $(m_1, 2m_1)$ and by (2) $m_{l+1}-m_l>c_1 m_l^{1/2}$, we obtain

$$m_i-m_{l+1}\geqq(i-(l+1))\frac{c_1}{2}y^{1/2}.$$

Hence

$$\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_i-m_{l+1}}\leqq\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{y}{T}\right)^{\frac{c_1 r}{2}y^{1/2}}\leqq 2\sum_{r=0}^{\infty}e^{-c_1\frac{k}{4}r}=\frac{2}{1-e^{c_1\frac{k}{4}}}.$$

Further we have

$$\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_i}<2\left(1+\frac{K}{2y^{1/2}}\right)^{-c_1 m_i^{1/2}}\leqq 2\left(1+\frac{K}{2y^{1/2}}\right)^{-\frac{c_1}{2}y^{1/2}}$$

which is arbitrarily small if K is large enough. Hence

$$\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{y}{T}\right)^{m_{i+1}-m_{l+1}}<\varepsilon \tag{23}$$

if K is sufficiently large. We obtain from (20), (22) and (23)

$$\left|\sum\nolimits_1\right|<\frac{1}{10}\left|\sum\nolimits_2\right| \tag{24}$$

for sufficiently large K. Next we estimate $\sum_3$ from above.

$$|\textstyle\sum_3| = \left| \sum_{k=m_{j+1}}^{\infty} \frac{s_k}{k!} T^k \right| \leqq \sum_{l=i+1}^{\infty} |s_{m_l}| \sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1} \frac{T^k}{k!} =$$

$$= \sum_{l=i+1}^{j-1} |s_{m_l}| \sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1} \frac{T^k}{k!} + |s_{m_j}| \sum_{k=m_j}^{T-1} \frac{T^k}{k!} + |s_{m_j}| \sum_{k=T}^{m_{j+1}-1} \frac{T^k}{k!} +$$

$$+ \sum_{l=j+1}^{\infty} |s_{m_l}| \sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1} \frac{T^k}{k!} = \textstyle\sum_3' + \sum_3'' + \sum_3''' + \sum_3''''.$$

We have as in the estimation of $\sum_1$

$$\textstyle\sum_3' = \displaystyle\sum_{l=i+1}^{j-1} \frac{|s_{m_{l+1}-1}|}{(m_{l+1}-1)!} T^{m_{l+1}-1} \left(1 + \frac{m_{l+1}-1}{T} + \frac{(m_{l+1}-1)(m_{l+1}-2)}{T^2} + \cdots\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{l=i+1}^{j-1} \frac{|s_{m_{l+1}-1}|}{(m_{l+1}-1)!} T^{m_{l+1}-1} \frac{T}{T-m_{l+1}} = \sum_{l=i+1}^{j-1} \frac{|s_{m_{l+1}-1}|}{(m_{l+1}-1)!} L^{m_{l+1}-1} \left(\frac{T}{L}\right)^{m_{l+1}-1} \frac{T}{T-m_{l+1}} \leqq$$

$$\leqq \frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!} T^{m_{i+1}-1} \frac{T}{T-m_{i+1}} \sum_{l=i+1}^{j-1} \left(\frac{T}{L}\right)^{m_{l+1}-m_{i+1}} \frac{T-m_{i+1}}{T-m_{l+1}},$$

i. e.

$$\textstyle\sum_3' \leqq \dfrac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!} T^{m_{i+1}-1} \dfrac{T}{T-m_{i+1}} \displaystyle\sum_{l=i+1}^{j-1} \left(\frac{T}{L}\right)^{m_{l+1}-m_{i+1}} \frac{T-m_{i+1}}{T-m_{l+1}}. \tag{25}$$

It is easy to see that

$$\sum_{l=i+1}^{j-1} \left(\frac{T}{L}\right)^{m_{l+1}-m_{i+1}} \frac{T-m_{i+1}}{T-m_{l+1}} < \varepsilon, \tag{26}$$

if K is sufficiently large. Hence for sufficiently large K

$$\textstyle\sum_3' < \frac{1}{10} |\sum_2|. \tag{27}$$

We have

$$\textstyle\sum_3'''' = \displaystyle\sum_{l=j+1}^{\infty} |s_{m_l}| \sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1} \frac{T^k}{k!} = \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{|s_{m_l}|}{m_l!} T^{m_l} \left(1 + \frac{T}{m_l+1} + \cdots\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{|s_{m_l}|}{m_l!} T^{m_l} \frac{m_l+1}{m_l+1-T} = \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{|s_{m_l}|}{m_l!} L^{m_l} \left(\frac{T}{L}\right)^{m_l} \frac{m_l+1}{m_l+1-T} \leqq$$

$$\leqq \frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!} T^{m_{i+1}-1} \sum_{l=j+1}^{\infty} \left(\frac{T}{L}\right)^{m_l-m_{i+1}+1} \frac{m_l+1}{m_l+1-T} =$$

$$= \frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!} T^{m_{i+1}-1} \frac{T}{T-m_{i+1}} \sum_{l=j+1}^{\infty} \left(\frac{T}{L}\right)^{m_l-m_{i+1}+1} \frac{(m_l+1)(T-m_{i+1})}{T(m_l+1-T)}.$$

It is again easy to see that for sufficiently large K

$$\sum_{l=j+1}^{\infty}\left(\frac{T}{L}\right)^{m_l-m_{i+1}+1}\frac{(m_l+1)(T-m_{i+1})}{T(m_l+1-T)}<\varepsilon \tag{28}$$

and hence

$$\sum\nolimits_3''''<\frac{1}{10}\left|\sum\nolimits_2\right|. \tag{29}$$

It remains to estimate $\sum_3''$ and $\sum_3'''$. We have

$$\left|\sum\nolimits_3''\right|=|s_{m_j}|\sum_{k=m_j}^{T-1}\frac{T^k}{k!}=\frac{|s_T|}{T!}T^T\left(1+\frac{T-1}{T}+\cdots\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}L^{m_{i+1}-1}\left(\frac{T}{L}\right)^T(T-m_j)=$$

$$=\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\frac{T}{T-m_{i+1}}\left(\frac{T}{L}\right)^{T-m_{i+1}+1}\frac{(T-m_{i+1})(T-m_j)}{T}.$$

Since for sufficiently large K

$$\left(\frac{T}{L}\right)^{T-m_{i+1}+1}\frac{(T-m_{i+1})(T-m_j)}{T}<\varepsilon,$$

we have for sufficiently large K

$$\sum\nolimits_3''\leqq\frac{1}{10}\left|\sum\nolimits_2\right| \tag{30}$$

and similarly

$$\sum\nolimits_3'''\leqq\frac{1}{10}\left|\sum\nolimits_2\right|. \tag{31}$$

It follows from (20), (24), (27), (29), (30) and (31)

$$e^{-T}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{k!}T^k\right|>c_3\frac{|s_{m_{i+1}-1}|}{(m_{i+1}-1)!}T^{m_{i+1}-1}\frac{T}{T-m_{i+1}}. \tag{32}$$

Hence, by Lemma 4, (11) follows. If, instead of (17), (18) holds, (11) can be proved similarly and we omit the details. Thus our Theorem is proved in the first case.

Let us now treat the second case. First it is obvious that the number of the m_j-s in $(m_1, 2m_1)$ is $o(m_1^{1/2})$. This is an immediate consequence of (3). Hence it follows that the sum of the length of the intervals (m_j, m_{j+1}) in $(m_1, 2m_1)$ with $m_{j+1}-m_j<Km_j^{1/2}$ is $o(m_1)$.

We now split the numbers x in $(m_1, 2m_1)$ into three classes. In the first class are the numbers x with $f(x)=[x]$, in the second the x with $f(x)<x$, in the third the x with $f(x)>x$.

First we show that the sum of the length of the intervals of the first class is $o(m_1)$. It clearly suffices to consider the intervals (m_j, m_{j+1}) satisfying $m_{j+1}-m_j > Km_j^{1/2}$. Now we observe that the numbers x $(m_j \leqq x \leqq m_{j+1})$ for which $f(x)=[x]$ form a single interval; (this is clear since $f(x)$ is monotonic and if $f(x) \neq [x]$ then either $f(x)=m_i$ or $f(x)=m_{i+1}-1$). Now since the number of m_j-s in $(m_1, 2m_1)$ is $o(m_1^{1/2})$ and we are in the second case, the result follows. Observing that by (7) $f(m_1) \geqq m_1$, we see by similar arguments that the sum of the intervals of the second class is also $o(m_1)$. Thus it follows that the sum of the length of the intervals in the third class is greater than $(1-\varepsilon)m_1$.

If $f(x)>[x]$, we have $f(x)=n_j$ $(>m_1)$ for some j. Let us denote by (α_j, β_j) the interval for which $f(x)=n_j$ $(\alpha_j \leqq x \leqq \beta_j)$. We have (as the length of the intervals in the third class is greater than $(1-\varepsilon)m_1$)

(33) $$\sum_{m_1 \leqq \alpha_j \leqq \beta_j \leqq 2m_1} (\beta_j-\alpha_j) > (1-\varepsilon)m_1$$

($\varepsilon>0$ but arbitrarily small). As (10) does not hold, we have

(34) $$\sum_{m_1<n_j<4m_1} (\beta_j-\alpha_j) = o(m_1),$$

hence

(35) $$\sum_{n_j>4m_1} (\beta_j-\alpha_j) > (1-\varepsilon)\, m_1.$$

We may assume without loss of generality that between k^3 and $(k+1)^3$ there lies at least one n_j; we can assure this by introducing besides the old n_j-s new ones. The enlarged sequence obviously satisfies (2) and (3).

Next we prove

LEMMA 5.[5] *Denote by (α_j, β_j) the interval for which*

$$f(x)=n_j \quad (\alpha_j \leqq x \leqq \beta_j) \quad (n_j>4m_1).$$

Let K be an arbitrarily large constant. Then for sufficiently large m_1 there exist a j for which

$$\frac{\beta_j}{\alpha_j} > 1+\max_{t \neq 0} \frac{K|t|^{1/2}}{|n_{j+t}-n_j|}.$$

Clearly, Lemma 5 got considerably strengthened by the assumption that between k^3 and $(k+1)^3$ there lies at least one n_j.

[5] A similar lemma is used in a paper by MACINTYRE and myself, *Edinburgh Math. Proc.*, Ser. 2, 10 (1954).

PROOF. Assume Lemma 5 is false. Then we have for every j

$$(\beta_j-\alpha_j)<K\alpha_j \max_{t\neq 0} \frac{|t|^{1/2}}{|n_{j+t}-n_j|}.$$

It follows from $\alpha_j<2m_1$ that

$$\sum_{n_j>4m_1}(\beta_j-\alpha_j)<2Km_1\sum_{n_j>4m_1}\max_{t\neq 0}\frac{|t|^{1/2}}{|n_{j+t}-n_j|}; \tag{36}$$

we have by the inequality of the arithmetic and harmonic means for every positive integer t

$$\frac{t^{1/2}}{n_{j+t}-n_j}=\frac{1}{t^{1/2}}\frac{t}{\sum\limits_{k=j}^{t+j-1}(n_{k+1}-n_k)}\leqq\frac{1}{t^{3/2}}\sum_{k=j}^{j+t-1}\frac{1}{n_{k+1}-n_k}$$

and for every negative integer t similarly

$$\frac{|t^{1/2}|}{n_j-n_{j+t}}\leqq\frac{1}{|t|^{3/2}}\sum_{k=j+t}^{j}\frac{1}{n_{k+1}-n_k}.$$

t_j denotes the integer for which

$$\max_{t\neq 0}\frac{|t|^{1/2}}{|n_{j+t}-n_j|}=\frac{|t_j|^{1/2}}{|n_{j+t_j}-n_j|}.$$

Then we have for $t_j\geqq -M$ (where M is an arbitrarily large but fixed integer)

$$\sum_{\substack{n_j>4m_1\\ t_j\geqq -M}}\frac{|t_j^{1/2}|}{|n_{j+t_j}-n_j|}\leqq 2\sum_{t=1}^{\infty}t^{-3/2}\sum_{n_j\geqq n_{\lambda-M}}\frac{1}{n_{j+1}-n_j},$$

where n_λ denotes the smallest n_i with $n_i\geqq 4m_1$ and

$$\sum_{\substack{n_j>4m_1\\ t_j<-M}}\frac{|t_j|^{1/2}}{|n_{j+t_j}-n_j|}<2\sum_{t>M}t^{-3/2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_{j+1}-n_j}.$$

Therefore by (3) and (36)

$$\sum_{n_j>4m_1}(\beta_j-\alpha_j)<2K\varepsilon m_1$$

for an arbitrarily small $\varepsilon>0$ if m_1 is sufficiently large. But this contradicts (35) if $\varepsilon<\frac{1}{4K}$. Thus our Lemma 5 is proved.

Let j be a number satisfying Lemma 5. Put

$$S_j=1+K\max_{t\neq 0}\frac{|t^{1/2}|}{|n_{j+t}-n_j|}.$$

Then there exist three numbers y_1, T, y_2 with

$$Sy_1 = T, \qquad ST = y_2$$

for which

$$f(y_1) = f(T) = f(y_2) = n_j.$$

We prove (11) in this case, too. We put again

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{k!} T^k = \sum_{k=0}^{n_j-1} + \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} + \sum_{k=n_{j+1}}^{\infty} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3.$$

First we estimate $\sum_2$ from below. Clearly

(37) $$\left|\sum\nolimits_2\right| > |s_{n_j}| \frac{T^{n_j}}{n_j!}.$$

We now estimate $\sum_1$ and $\sum_3$ from above. We have

(38) $$\begin{cases} \left|\sum\nolimits_3\right| \leqq \displaystyle\sum_{k=n_{j+1}}^{\infty} \frac{|s_k|}{k!} T^k = \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{|s_{n_l}|}{n_l!} T^{n_l} \left(1 + \frac{T}{n_l+1} + \cdots\right) \leqq \\ \qquad \leqq \displaystyle\sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{|s_{n_l}|}{n_l!} T^{n_l} \frac{n_l}{n_l - T} \leqq 2 \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{|s_{n_l}|}{n_l!} T^{n_l}, \end{cases}$$

since $n_l > 4m_1$, $T \leqq 2m_1$.

Further, by the definition of n_j,

$$\frac{|s_{n_l}|}{n_l!} T^{n_l} = \frac{|s_{n_l}|}{n_l!} y_2^{n_l} \left(\frac{T}{y_2}\right)^{n_l} \leqq \frac{|s_{n_j}|}{n_j!} y_2^{n_j} \left(\frac{T}{y_2}\right)^{n_l} = \frac{|s_{n_j}|}{n_j!} T^{n_j} \left(\frac{T}{y_2}\right)^{n_l-n_j}.$$

Hence from (38)

(39) $$\left|\sum\nolimits_3\right| < 2 \frac{|s_{n_j}|}{n_j!} T^{n_j} \sum_{l=j+1}^{\infty} \left(\frac{T}{y_2}\right)^{n_l-n_j}.$$

We have for sufficiently large m_1

$$\left(\frac{T}{y_2}\right)^{n_l-n_j} < \left(1 + \frac{K(l-j)^{1/2}}{n_l - n_j}\right)^{-(n_l-n_j)} < 2e^{-K(l-j)^{1/2}}.$$[6]

Hence by (2)

$$\sum_{l=j+1}^{\infty} \left(\frac{T}{y_2}\right)^{n_l-n_j} < 2 \sum_{l=j+1}^{\infty} e^{-K(l-j)^{1/2}}$$

which is arbitrarily small if K is sufficiently large. Hence from (39) we

[6] This can be proved as follows: We have for $n > \frac{x^2}{2\log 2}$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > \frac{1}{2} e^x$ (namely, $n \log\left(1+\frac{x}{n}\right) > x - \frac{x^2}{2n} > x - \log 2$). Now we have by (2) and (3) $l-j = o(n_l - n_j)$. Putting $x = K(l-j)^{1/2}$, $n = n_l - n_j$, the result follows.

have for sufficiently large K

$$|\textstyle\sum_3| \leqq \frac{1}{4} |\sum_2|. \tag{40}$$

Finally, we estimate $\sum_1$. Let us define the number λ by

$$n_\lambda \leqq T < n_{\lambda+1}.$$

Then we write

$$\sum_1 = \sum_{k=0}^{n_\lambda - 1} + \sum_{k=n_\lambda}^{n_{\lambda+1}-1} + \sum_{k=n_{\lambda+1}}^{\infty} = \sum_1' + \sum_2'' + \sum_3'''.$$

We have

$$\begin{aligned} |\textstyle\sum_1'| &\leqq \sum_{l=1}^{\lambda-1} \frac{|s_{n_{l+1}-1}|}{(n_{l-1}-1)!} T^{n_{l+1}-1}\left(1+\frac{n_{l+1}-1}{T}+\cdots\right) \leqq \\ &\leqq \sum_{l=1}^{\lambda-1} \frac{|s_{n_{l+1}-1}|}{(n_{l+1}-1)!} T^{n_{l+1}-1} \frac{T}{T-n_{l+1}+1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Now we have as before

$$|s_{n_{l+1}-1}| \frac{T^{n_{l+1}-1}}{(n_{l+1}-1)!} \leqq \frac{|s_{n_j}|}{n_j!} T^{n_j} \left(\frac{y_1}{T}\right)^{n_j - n_{l+1}+1};$$

hence by (41)

$$|\textstyle\sum_1'| \leqq \frac{|s_{n_j}|}{n_j!} T^{n_j} T \sum_{l=1}^{\lambda-1} \left(\frac{y_1}{T}\right)^{n_j-n_{l+1}+1} \tag{42}$$

We have for sufficiently large m_1 as in the estimation of $\sum_3$

$$\left(1+\frac{K(j-l-1)^{1/2}}{n_j-n_{l+1}}\right)^{-(n_j-n_{l+1})} < 2e^{-K(j-l-1)^{1/2}},$$

i. e.

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{y_1}{T}\right)^{n_j-n_{l+1}} &= \left(1+K\max_{t\neq 0}\frac{|t|^{1/2}}{|n_{j+t}-n_j|}\right)^{n_j-n_{l+1}} \leqq \\ &\leqq \left(1+\frac{K(j-l-1)^{1/2}}{n_j-n_{l+1}}\right)^{n_j-n_{l+1}} < 2e^{-K(j-l-1)^{1/2}} \leqq 2e^{-\frac{K}{2}\{(j-\lambda)^{1/2}+(\lambda-l-1)^{1/2}\}} \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Since between k^3 and $(k+1)^3$ there is at least one n_l, we have $j-\lambda > n_j^{1/3}-n_\lambda^{1/3}$ and since $n_j > 4m_1$, $n_\lambda < 2m_1$, we have

$$(j-\lambda)^{1/2} > ((4m_1)^{1/3}-(2m_1)^{1/3})^{1/2} = 2^{1/6}(2^{1/3}-1)^{1/2} m_1^{1/6} = c_4 m_1^{1/6},$$

hence by (42)

$$|\textstyle\sum_1'| \leqq 4\frac{|s_{n_j}|}{n_j!} T^{n_j} m_1 e^{-\frac{K}{2}c_4 m_1^{1/6}} \sum_{l=1}^{\lambda-1} e^{-\frac{K}{2}(\lambda-l-1)^{1/2}},$$

or since

$$\sum_{l=1}^{\lambda-1} e^{-\frac{K}{2}(\lambda-l-1)^{1/2}} < \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{K}{2} l^{1/2}} = O(1)$$

and $m_1 e^{-\frac{K}{2}c_1 m_1^{1/4}}$ is arbitrarily small if m_1 is sufficiently large, we have

$$|{\textstyle\sum_1'}| < \frac{1}{12} |{\textstyle\sum_2}|. \tag{44}$$

The estimation of $\sum_1''$ can be done similarly and we obtain for sufficiently large K

$$|{\textstyle\sum_1''}| < \frac{1}{12} |{\textstyle\sum_2}|. \tag{45}$$

Finally, we estimate $\sum_2'''$ from above. We have

$$\begin{aligned} |{\textstyle\sum_1'''}| &\leqq \sum_{k=n_{\lambda+1}}^{n_j-1} \frac{|s_k|}{k!} T^k \leqq \sum_{l=\lambda+1}^{j-1} \frac{|s_{n_l}|}{n_l!} T^{n_l}\left(1+\frac{T}{n_l+1}+\cdots\right) = \\ &= \sum_{l=\lambda+1}^{j-1} \frac{|s_{n_l}|}{n_l!} T^{n_l} \frac{n_l+1}{n_l+1-T}. \end{aligned} \tag{46}$$

Further, we obtain as before

$$\frac{|s_{n_l}|}{n_l!} T^{n_l} \leqq \frac{|s_{n_l}|}{n_j!} T^{n_j} \left(\frac{y_1}{T}\right)^{n_j-n_l}; \tag{47}$$

taking into account that by the definition of y_1 and T

$$\left(\frac{y_1}{T}\right) = \left(1+\max_{t\neq 0} \frac{K|t^{1/2}|}{|n_{j+t}-n_j|}\right)^{-1}$$

we have

$$\left(\frac{y_1}{T}\right)^{n_j-n_l} < \left(1+\frac{K(j-l)^{1/2}}{n_j-n_l)}\right)^{-(n_j-n_l)} < 2e^{-K(j-l)^{1/2}}, \tag{48}$$

we have by (46)

$$|{\textstyle\sum_1'''}| \leqq \frac{|s_{n_j}|}{n_j!} T^{n_j} 2 \sum_{l=\lambda+1}^{j-1} e^{-K(j-l)^{1/2}} \frac{n_l+1}{n_l+1-T}. \tag{49}$$

Consider the sum $\sum_{l=\lambda+1}^{j-1} e^{-K(j-l)^{1/2}} \frac{n_l+1}{n_l+1-T}$. Let λ' denote the greatest number for which $n_{\lambda'} - T \leqq \frac{n_{\lambda'}}{3}$, i. e. $n_{\lambda'} \leqq \frac{3}{2} T \leqq 3m_1$. Then write

$$\sum_{l=\lambda+1}^{j-1} = \sum_{l=\lambda+1}^{\lambda'} + \sum_{l=\lambda'+1}^{j-1}.$$

First we have

$$\sum_{l=\lambda+1}^{\lambda'} e^{-K(j-l)^{1/2}} \frac{n_l+1}{n_l+1-T} < 3m_1 \sum_{l=\lambda+1}^{\lambda'} e^{-\frac{K}{2}\{(j-\lambda')^{1/2}+(\lambda'-l)^{1/2}\}};$$

hence because of $n_j > 4m_1$, $n_{\lambda'} \leqq 3m_1$ and because of the fact that between k^3 and $(k+1)^3$ there lies at least one n_l we have as before

$$(50) \qquad \sum_{l=\lambda+1}^{\lambda'} e^{-K(j-l)^{1/2}} \frac{n_l+1}{n_l+1-T} \leqq m_1 e^{-\frac{K}{2} c_6 m_1^{1/6}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{K}{2} l^{1/2}} = o(1) \qquad (m_1 \to \infty).$$

Further we have

$$\sum_{l=\lambda'+1}^{j-1} e^{-K(j-l)^{1/2}} \frac{n_l+1}{n_l+1-T} < 3 \sum_{l=\lambda'+1}^{j-1} e^{-K(j-l)^{1/2}} < 3\sum_{l=1}^{\infty} e^{-Kl^{1/2}} < 3\int_0^{\infty} e^{-Kx^{1/2}} dx = \frac{6}{K^2},$$

i. e. for arbitrarily small $\varepsilon > 0$

$$(51) \qquad \sum_{l=\lambda'+1}^{j-1} e^{-K(j-l)^{1/2}} \frac{n_l+1}{n_l+1-T} < \varepsilon,$$

if K is sufficiently large.

We obtain from (46), (47), (49), (50) and (51) for sufficiently large K

$$(52) \qquad |\textstyle\sum_1'''| < \frac{1}{12} |\sum_2|,$$

hence

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{k!} T^k\right| > |\textstyle\sum_2| - |\sum_1| - |\sum_3| > \frac{1}{2} |\sum_2|,$$

hence, by Lemma 4, (11) follows and the proof of our Theorem is complete.

We can generalize Borel summability as follows: Let $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ be an entire function, b_k real and $f(z) \to \infty$ for $z \to \infty$ along the positive axis. The series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is said to be summable f to s, if

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} \sum_{k=0}^{\infty} s_k b_k z^k = s, \qquad s_k = \sum_{l=0}^{k} a_l.$$

It seems that the following high-indices theorem holds for this summability method. There exists an increasing function $g(x)$ depending only on $f(z)$ so that if $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is summable f and $a_k = 0$ except if $k = n_j$ where $n_{j+1} > g(n_j)$, then $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converges.

Finally, I would like to thank MR. P. SZÜSZ who simplified and improved my original proofs in several aspects.

(Received 16 April 1956)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ, ОТНОСЯЩЕЙСЯ К МЕТОДУ СУММИРОВАНИЯ БОРЕЛЯ

П. Эрдёш (Будапешт)

(Резюме)

Работа содержит доказательство следующей теоремы:

Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируем по Борелю, т. е. существует предел

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{k!} x^k,$$

где $s_k = \sum_{l=0}^{k} a_l$; пусть, кроме того, выполняется следующее условие:

$$a_k = 0, \quad \text{если} \quad k \neq n_j,$$

где n_j есть некоторая последовательность натуральных чисел, для которых выполняются неравенства

(1) $$n_{j+1} - n_j > c n_j^{1/2} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

(где c — положительная постоянная),

(2) $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_{j+1} - n_j} < \infty.$$

Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится и в обычном смысле.

ON THE SUMS OF POWERS OF COMPLEX NUMBERS

By
J. W. S. CASSELS (Cambridge)
(*Presented by* P. TURÁN)

1. Let $z_1, \ldots, z_k$ be complex numbers and put

(1. 1) $$s_\nu = z_1^\nu + \cdots + z_k^\nu.$$

In § 2 of this note I shall prove that if

(1. 2) $$\max_{1 \leqq j \leqq k} |z_j| \geqq 1,$$

then

(1. 3) $$\max_{1 \leqq \nu \leqq 2k-1} |s_\nu| \geqq 1.$$

This result is the best possible of its kind since (i) if $z_1 = 1, z_2 = \cdots = z_k = 0$, then $|s_\nu| = 1$ for all ν, and (ii) for each k M. BOWEN has given sets of z_j such that $|s_\nu| < 1$ for $1 \leqq \nu \leqq 2k-2$ (see TURÁN's book[1]). (Such sets will also be given readily by our analysis.)

In the context of the problem (see [1]) it is natural to consider the more general sums

$$\sigma_\nu = b_1 z_1^\nu + \cdots + b_k z_k^\nu$$

where $b_1, \ldots, b_k$ are positive numbers not depending on ν. It turns out that the situation is here unexpectedly different, as we shall show in §§ 3, 4. Finally, in § 5 we shall discuss other applications of our methods.

For the relation of our results to DIRICHLET's theorem and other topics we refer to [1].

2. Suppose, first, that $z_1, \ldots, z_k$ are the roots of an equation

(2. 1) $$z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

with real $a_1, \ldots, a_k$. Then the s_ν are real and satisfy the Newton identities

(2. 2) $$\left.\begin{aligned} s_1 &= -a_1, \\ s_2 + a_1 s_1 &= -2a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_k + a_1 s_{k-1} + \cdots + a_k s_1 &= -k a_k, \\ s_{k+1} + a_1 s_k + \cdots + a_k s_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

[1] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953), Akadémiai Kiadó.

It follows at once that

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq k+1} s_\nu \geqq 0, \tag{2.3}$$

since otherwise (2.2) would give in order $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_k > 0$ and then the last equation of (2.2) would give a contradiction.

Now let $z_1, \ldots, z_k$ be any complex numbers. Then

$$2\Re s_\nu = z_1^\nu + \cdots + z_k^\nu + \bar{z}_1^\nu + \cdots + \bar{z}_k^\nu$$

and the argument above shows that

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq 2k+1} \Re s_\nu \geqq 0. \tag{2.4}$$

We may now prove the result enunciated in § 1 that (1.2) implies (1.3). We may suppose without loss of generality that $|z_1| = \max |z_j|$ and so, by considering z_j/z_1 instead of z_j, that

$$1 = z_1 = \max |z_j|.$$

Then, by (2.4) with $k-1$ for k, we have

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq 2k-1} |s_\nu| \geqq \max_{1 \leqq \nu \leqq 2k-1} \Re s_\nu = 1 + \max_{1 \leqq \nu \leqq 2k-1} \Re(z_2^\nu + \cdots + z_k^\nu) \geqq 1. \tag{2.5}$$

It remains to show that (2.4), (2.5) are the best possible. If

$$z_j = \exp\left(\frac{2\pi i j}{2k+1}\right) \qquad (i^2 = -1),$$

we have

$$\Re s_\nu = -\frac{1}{2} \qquad (1 \leqq \nu \leqq 2k).$$

Now put

$$z_1 = 1, \quad z_j = \varepsilon \exp\left(\frac{2\pi i (j-1)}{2k-1}\right) \qquad (j > 1)$$

where $\varepsilon > 0$ is small. Then

$$\Re s_\nu = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^\nu, \quad |\Im s_\nu| \leqq k\varepsilon^\nu \qquad (1 \leqq \nu \leqq 2k-2)$$

and hence for $\nu = 1, 2, \ldots, 2k-2$ we have

$$|s_\nu|^2 \leqq 1 - \varepsilon^\nu + \left(k^2 + \frac{1}{4}\right)\varepsilon^{2\nu} < 1,$$

provided that

$$\left(k^2 + \frac{1}{4}\right)\varepsilon^\nu < 1.$$

We note in passing that the $\geqq$ in (2. 3) cannot be strengthened to $>$ Indeed, if $z_1, \dots, z_k$ are the roots of $z^k+1=0$, we have

$$s_k=-k, \qquad s_j=0 \quad (1 \leqq j<2k, \; j \neq k).$$

On the other hand, it is easy to deduce, as above, from the first $2k$ Newton identities that if $a_1, \dots, a_k$ are real and not all 0 (so $z_1, \dots, z_k$ are not all 0), then

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq 2k} s_\nu>0.$$

From this can be deduced analogues of (2. 4), (2. 5) with $>$ for $\geqq$ and $4k+1, 4k-3$ for $2k+1, 2k-1$, respectively.

3. We now consider

$$\sigma_\nu=b_1 z_1^\nu+\cdots+b_k z_k^\nu \tag{3. 1}$$

where $z_1, \dots, z_k$ are complex numbers and $b_1, \dots, b_k$ are real and positive. Write

$$z_j=r_j \exp(2\pi i \theta_j), \quad r_j>0. \tag{3. 2}$$

By DIRICHLET's theorem there are integers $\nu, \mu_1, \dots, \mu_k$ such that

$$0<\nu<4^k$$

and

$$|\nu \theta_j-\mu_j| \leqq \frac{1}{4} \qquad (1 \leqq j \leqq k).$$

Then

$$\Re z_j^\nu \geqq 0 \qquad (1 \leqq j \leqq k)$$

so

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq 4^k-1} \Re \sigma_\nu \geqq 0. \tag{3. 3}$$

By analogy with the results of § 2 one would expect that 4^k-1 in (3. 3) could be replaced by something much smaller, say of the order of k. We shall show that this is not so, and indeed that there exist b_j, z_j such that

$$\sigma_\nu<0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq 3^k-1). \tag{3. 4}$$

Put

$$\delta=\frac{1}{k} \sin\left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{4\cdot 3^{k-1}-1}\right), \tag{3. 5}$$

$$z_j=\delta^{2(k-j)} \exp\left(\frac{2\pi i}{4\cdot 3^{j-1}-1}\right), \tag{3. 6}$$

and

$$b_j=\delta^{3^j-j}. \tag{3. 7}$$

Let ν be any integer in $1 \leqq \nu \leqq 3^k - 1$, so that

$$3^{J-1} \leqq \nu < 3^J \tag{3.8}$$

for some integer J $(1 \leqq J \leqq k)$. Then

$$\delta^{-3^J+J(1+2\nu)-2\nu k}\, \Re b_J z_J^\nu = \cos\left(\frac{2\pi\nu}{4\cdot 3^{J-1}-1}\right) \leqq -\sin\left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{4\cdot 3^{J-1}-1}\right) \leqq -k\delta. \tag{3.9}$$

For $j < J$ we have

$$\delta^{-3^J+J(1+2\nu)-2\nu k} |b_j z_j^\nu| = \delta^{3^j-3^J+(2\nu+1)(J-j)} \leqq \delta^{(J-j)(-2\cdot 3^{J-1}+2\nu+1)} \leqq \delta \tag{3.10}$$

since $3^J - 3^j = 2(3^{J-1} + \cdots + 3^j) \leqq 2\,(J-j)3^{J-1}$ and (3. 8) holds. Similarly for $j > J$ we have

$$\delta^{-3^J+J(1+2\nu)-2\nu k} |b_j z_j^\nu| = \delta^{3^j-3^J+(2\nu+1)(J-j)} \leqq \delta^{(j-J)(2\cdot 3^J-2\nu-1)} \leqq \delta. \tag{3.11}$$

Hence, by (3. 9), (3. 10), (3. 11), we see that

$$\Re\sigma_\nu \leqq \Re b_J z_J^\nu + \sum_{j \neq J} |b_j z_j^\nu| < 0,$$

as required.

4. In the counter-example constructed in § 3 the b_j were very unequal. We shall now show that this is necessarily so. Let b_j, z_j be as in § 3 and suppose that

$$|z_1| = \max |z_j|. \tag{4.1}$$

Put

$$\beta = \frac{b_2 + \cdots + b_k}{b_1}. \tag{4.2}$$

We shall show that

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq N} \Re\sigma_\nu > 0 \tag{4.3}$$

where

$$N = 2[\beta^2 + 6\beta] + 7. \tag{4.4}$$

In the particular case $b_1 = \cdots = b_k = 1$ this is much stronger than (3. 3) but still weaker than the precise result (2. 4).

The proof uses the well-known positiveness of FEJÉR's kernel, that is the fact that

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} \left(1 - \frac{\nu}{N+1}\right) \Re z^\nu \geqq 0 \tag{4.5}$$

for all positive integers N and all complex numbers z with $|z| \leqq 1$. In particular,

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(1 - \frac{\nu}{N+1}\right) \Re\sigma_\nu \geqq -\frac{1}{2}(b_1 + \cdots + b_k) = -\frac{1}{2} b_1(1+\beta). \tag{4.6}$$

ut now

$$4(\Re\,\sigma_\nu)^2 = 4(b_1\Re z_1^\nu + \Re\sum_{j\ge 2} b_j z_j^\nu)^2 \geqq 4\, b_1(\Re z_1^\nu)^2 + 8 b_1(\Re z_1^\nu)(\Re\sum_{j\ge 2} b_j z_j^\nu) =$$

$$= 2\, b_1^2 + b_1^2 z_1^{2\nu} + b_1^2 \bar z_1^{2\nu} + 2b_1 \sum_{j\geqq 2} b_j \{(z_1 z_j)^\nu + (z_1 \bar z_j)^\nu + (\bar z_1 z_j)^\nu + (\bar z_1\, \bar z_j)^\nu\}.$$

ence for any positive integer M we have, by the positivity of FEJÉR's kerel, that

$$\text{(4. 7)} \qquad 4\sum_{\mu=1}^{M}\left(1-\frac{\mu}{M+1}\right)(\Re\,\sigma_\mu)^2 \geqq (M-1)b_1^2 - 4\, b_1\sum_{j\ge 2} b_j = b_1^2(M-1-4\beta).$$

We now define N by (4. 4) and write

$$\text{(4. 8)} \qquad M = \frac{1}{2}(N+1) - 1 = [\beta^2 + 6\,\beta] + 3.$$

'ut

$$\text{(4. 9)} \qquad \xi_\mu = -\left(1-\frac{\mu}{N+1}\right)\Re\,\sigma_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq M).$$

ince

$$1 - \frac{\mu}{M+1} < \left(1-\frac{\mu}{N+1}\right)^2,$$

e inequality (4. 7) gives

$$\text{(4.10)} \qquad 4\sum \xi_\mu^2 \geqq b_1^2(M-1-4\,\beta).$$

We now suppose, if possible, that

$$\text{(4. 11)} \qquad \Re\,\sigma_\nu \leqq 0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq N).$$

hen (4. 6) and (4. 11) give

$$\text{(4. 12)} \qquad \xi_\mu \geqq 0, \quad \sum_1^M \xi_\mu \leqq \frac{1}{2}\, b_1(1+\beta).$$

ence, by (4. 10),

$$b_1^2\left\{\frac{1}{2}(1+\beta)\right\}^2 \geqq \left(\sum \xi_\mu\right)^2 \geqq \sum \xi_\mu^2 \geqq b_1^2\left(\frac{1}{4}(M-1)-\beta\right).$$

his is in contradiction with the definition (4. 8) of M. The contradiction hows that (4. 11) is false, so (4. 3) is true, as required.

5. The methods of this note have, of course, other applications to the ircle of ideas in TURÁN's book[1]. For example, I shall now sketch an nalytic proof of a result nearly as powerful as DIRICHLET's theorem. TURÁN xpresses a wish for such a proof in his book [1].

Let $\theta_2, \ldots, \theta_k$ be any $k-1$ real numbers and put

(5. 1) $$z_1 = 1, \quad z_j = \exp(2\pi i\theta_j).$$

Then for any integer $p > 0$ we have an identity of the type

(5. 2) $$|s_\nu|^{2p} = C + \sum_{J=2}^{K} D_J Z_J^\nu$$

where C, D_J, Z_J are independent of ν and

(5. 3) $$\left.\begin{array}{c} C > 0, \quad D_J > 0, \\ |Z_J| = 1, \quad C + \Sigma D_J = k^{2p}. \end{array}\right\}$$

Here C is the sum of the squares of the coefficients in the usual multinomial expansion of

$$(x_1 + \cdots + x_k)^p$$

and so for fixed k we have

(5. 4) $$C = \{\varkappa + o(1)\}\, k^{2p}/p^{\frac{1}{2}(k-1)},$$

where $\varkappa > 0$ depends on k but not on p. [We actually require only $\geqq$ in (5. 4). Perhaps the simplest way of proving (5. 4) is to note that

$$(2\pi)^{k-1} C = \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \exp(2\pi i\varphi_2) + \cdots + \exp(2\pi i\varphi_k)]^{2p} d\varphi_2 \cdots d\varphi_k.$$

For large p the only significant part of the integral is in the neighbourhood of $\varphi_2 = \cdots = \varphi_k = 0$; and there the integrand behaves like

$$k^{2p} \exp\left\{\frac{-4\pi^2 p}{k^2}\left(\sum \varphi_j^2 + \sum_{i<j} (\varphi_i - \varphi_j)^2\right)\right\}. \;]$$

Since FEJÉR's kernel is positive, (5. 2) and (5. 3) give, for any integer N,

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(1 - \frac{\nu}{N+1}\right)|s_\nu|^{2p} \geqq \frac{1}{2} NC - \frac{1}{2}\sum D_J,$$

and so

(5. 5) $$\max_{1 \leqq \nu \leqq N} |s_\nu|^{2p} \geqq \left(1 + \frac{1}{N}\right) C - \frac{k^{2p}}{N}.$$

We now let N be arbitrarily large and put

(5. 6) $$p = \left[\left(\frac{1}{2}\varkappa N\right)^{2/(k-1)}\right].$$

A straightforward calculation then deduces from (5. 4), (5. 5), (5. 6) that for all large enough N

(5. 7) $$k^{-2} \max_{1 \leqq \nu \leqq N} |s_\nu|^2 > 1 - \delta N^{-2/(k-1)} \log N$$

where δ depends only on k.

But for the values (5. 1) we have

$$|s_\nu|^2 = k^2 - 4\sum_{1<j\leqq k} \sin^2 \pi\nu\theta_j - 4\sum_{1<l<j\leqq k} \sin^2 \pi\nu(\theta_l - \theta_j).$$

ence for the maximal ν of (5. 7) we have

$$|\sin \pi\nu\theta_j| \leqq \Delta N^{-1/(k-1)}(\log N)^{1/2} \qquad (2 \leqq j \leqq k)$$

here $\Delta = \frac{1}{2} k \vartheta^{\frac{1}{2}}$ depends only on k. This may be compared with the estimate

$$|\sin \pi\nu\theta_j| \leqq \pi N^{-1 (k-1)}$$

tained from a direct application of DIRICHLET's theorem to the $k-1$ numrs $\theta_2, \ldots, \theta_k$.

NITY COLLEGE,
MBRIDGE, ENGLAND

(Received 25 May 1956)

О СУММЕ СТЕПЕНЕЙ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Е. В. С. Касселс (Кембридж)

(Резюме)

Автор в настоящей работе решает несколько проблем, поставленных П. Тураном книге *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen.* Так, для усиления ной теоремы М. Швейцера доказывается, что если $z_1, \ldots, z_n$ такие комплексные сла, для которых $\max_{j=1,\ldots,n} |z_j| \geqq 1$, то $\max_{\nu=1,2,\ldots,2n-1} |z_1^\nu + \cdots + z_n^\nu| \geqq 1$. Эта теорема точна в ух напрвлениях. Во-первых, нельзя улучшить стоящую справа 1, как это показывает стема значений $z_1 = 1, z_2 = \cdots = z_n = 0$; во-вторых, как это уже раньше показал один ример М. Боуэна, условие $1 \leqq \nu \leqq 2n-1$ не может быть заменено условием $\leqq \nu \leqq 2n-2$. Эта теорема, в несколько иной форме, показывает, что для любых компексных чисел $w_1, \ldots, w_n$

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,2n-1} \sqrt[\nu]{|w_1^\nu + \cdots + w_n^\nu|} \geqq \max_{j=1,\ldots,n} |w_j|.$$

торой основной результат направлен в сторону выполнения пожелания, высказанного книге Турана, чтобы классическая теорема Дирихле была доказана с помощью игонометрических сумм. Этим методом показывается, существенно использовав неотицательность ядра Фейера, что если $q > q_0(n)$ и $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ любые вещественные сла, то существует такое целое ν, для которого $1 \leqq \nu \leqq q^n$ и для которого при ответствующих целых e_j

$$|\vartheta_j\nu - e_j| \leqq c\frac{\sqrt{\log q}}{q} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

е c зависит лишь от n.

REMARK ON THE PRECEDING PAPER OF J. W. S. CASSELS

(APPLICATION TO APPROXIMATIVE SOLUTION OF ALGEBRAIC EQUATIONS)

By

P. TURÁN (Budapest), member of the Academy

As well known, the classical method of BERNOULLI—LOBATSHEWSKY—GRAEFFE[1] for approximative solution of the equation

(1) $$f_0(x) = a_{00} + a_{10}x + \cdots + a_{n0}x^n = 0 \qquad (a_{n0} = 1)$$

consists in forming the $f_\nu(x)$ transforms defined recursively by

(2) $$f_\nu(x) = (-1)^n f_{\nu-1}(\sqrt{x}) f_{\nu-1}(-\sqrt{x}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

If

(3) $$f_\nu(x) = a_{0\nu} + a_{1\nu}x + \cdots + a_{n\nu}x^n \qquad (a_{n\nu} = 1)$$

and for the zeros of the equation (1) to be solved we have

(4) $$|z_1| > |z_2| \geqq |z_3| \geqq \cdots \geqq |z_n|,$$

then

(5) $$|z_1| = \lim_{\nu \to +\infty} |a_{n-1,\nu}|^{2^{-\nu}}.$$

This method was used until the thirties without hesitation also for small ν values, without an estimation of the error. After the first results of SAN JUAN[2] A. OSTROWSKI[3] succeeded in a very thorough paper to modify the B.—L.—G. process, adapting it also for small ν values. Later I have found that a new trend[4] in the theory of diophantine approximations leads among many others also to a new approach to this problem;[5] the results were completed in a joint paper with A. RÉNYI.[6] The problems of this trend, relevant here, all have the form to seek the lower bound of

$$\min_{w_1, \ldots, w_n} \max_{\nu = 1, 2, \ldots, N} \frac{|w_1^\nu + \cdots + w_n^\nu|}{\left(\max\limits_{j=1,\ldots,n} |w_j|\right)^\nu} = M(N)$$

[1] For the sake of brevity we shall call it B.—L.—G. process.

[2] *Revista Math. Hispano-Americana* (1939).

[3] A. OSTROWSKI, Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent, *Acta Math.*, **72** (1940), pp. 99—257.

[4] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953), Akadémiai Kiadó.

where $N \geqq n$ is a prescribed function of n. The estimations used in [5] and in [6] were

$$M(2n) \geqq \frac{1}{2}, \quad M(n) \geqq \frac{\log 2}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \tag{6}$$

and with arbitrary $0<\varepsilon<1$

$$M\left(2+\left[\frac{n}{\varepsilon}\log\frac{2n}{\varepsilon}\right]\right) \geqq 1-\varepsilon. \tag{7}$$

A result of CASSELS in his previous paper asserts that[7]

$$M(2n-1)=1. \tag{8}$$

Using (8) instead of (6) and (7) we obtain instead of the B.—L.—G. process the following

RULE. Let (1) be the equation to be solved with the zeros $z_1, \ldots, z_n$. We assume

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_n|$$

without loss of generality. Let k be an arbitrary positive integer and we form the $f_k(x)$ transform defined by (2). Writing it in the form (3) we can compute successively the s_{jk} quantities from the Newton—Girard formulae

$$\begin{aligned}
a_{nk}s_{1k}+a_{n-1,k} &= 0\\
a_{nk}s_{2k}+a_{n-1,k}s_{1k}+2a_{n-2,k} &= 0\\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots\\
a_{nk}s_{nk}+\cdots+na_{0k} &= 0\\
a_{nk}s_{n+1,k}+\cdots+a_{0k}s_{1k} &= 0\\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots\\
a_{nk}s_{2n-1,k}+\cdots+a_{0k}s_{n-1,k} &= 0.
\end{aligned}$$

[5]. P. TURÁN, On approximative solution of algebraic equations, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1951), pp. 26—42.

[6] A. RÉNYI and P. TURÁN, On the zeros of polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), pp. 275—284.

[7] In another form his result asserts that for each system $(w_1, \ldots, w_n)$ of complex numbers we have

$$\max_{\nu=1,2,\ldots,2n-1} \sqrt[\nu]{|w_1^\nu+\cdots+w_n^\nu|} \geqq \max_{j=1,\ldots,n} |w_j|.$$

We may confront this with the estimation

$$\max_{\nu=1,\ldots,n} \sqrt[\nu]{|w_1^\nu+\cdots+w_n^\nu|} \geqq \min_{j=1,\ldots,n} |w_j|$$

Then we have the inequality

$$(9)\qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{2\cdot k} \leqq \frac{|z_1|}{\left(\max\limits_{j=1,\dots,2n-1} |s_{jk}|^{\frac{1}{j}}\right)^{2^{-k}}} \leqq 1.$$

The superiority of this rule over those in [5] and [6] is evident; it gives narrower bounds for $|z_1|$ than OSTROWSKI's rule. Its superiority over the rule with

$$(10)\qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-k}} \leqq \frac{|z_1|}{\left(\max\limits_{j=1,\dots,n} |s_{jk}|^{\frac{1}{j}}\right)^{2^{-k}}} \leqq \left\{\frac{1}{\log 2}\left(\frac{1}{1}+\dots+\frac{1}{n}\right)\right\}^{2^{-k}}$$

from [5] is not quite clear, owing to the accessory computation of the numbers

$$|s_{n+1,k}|^{\frac{1}{n+1}}, \dots, |s_{2n-1,k}|^{\frac{1}{2n-1}}.$$

Whereas CASSELS's result replaces the inequality $M(2n) \geqq \frac{1}{2}$ by the final result (8) we are still far from the determination of $M(n)$, the best known estimation being[8]

$$(11)\qquad M(n) \geqq C\,\frac{\log\log n}{\log n}$$

(C numerical constant).

The proof of our rule, having once CASSELS's theorem (8), runs on the same line than the rules in [5] and [6]; but this is so short that for the sake of completeness we reproduce it. For each $1 \leqq j \leqq 2n-1$ we have evidently

$$|s_{jk}| = \left|\sum_{l=1}^{n} z_l^{j\cdot 2^k}\right| \leqq n\,|z_1|^{j\cdot 2^k} \leqq n^j\,|z_1|^{j\cdot 2^k},$$

i. e. also

$$\max_{1\leqq j\leqq 2n-1} |s_{jk}|^{\frac{1}{j}} \leqq n\,|z_1|^{2^k}$$

which is only another form of the lower estimation in (9). In order to obtain the upper estimation we apply CASSELS's theorem (8) to the numbers

$$\left(\frac{z_j}{z_1}\right)^{2^k} \qquad (j=1, 2, \dots, n).$$

---

on p. 26 of my book. The problem, to find the minimal $h(n)$ with the property

$$\max_{\nu=1,2,\dots,h(n)} \sqrt[\nu]{|w_1^\nu + \dots + w_n^\nu|} \geqq \max_{j=1,\dots,n} |w_j|$$

hold for each $(w_1, \dots, w_n)$-systems, was raised by P. ERDŐS independently of me.

[8] Communicated by N. G. DE BRUIJN in a letter.

This ensures the existence of an integer r_0 with $1 \leqq r_0 \leqq 2n-1$ such that

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{z_j}{z_1}\right)^{r_0 \cdot 2^k}\right| \geqq 1.$$

This means

$$|z_1|^{2^k} \leqq |s_{r_0,k}|^{\frac{1}{r_0}} \leqq \max_{1 \leqq j \leqq 2n-1} |s_{jk}|^{\frac{1}{j}}$$

which is only another form of the upper estimation in our rule.

(Received 25 July 1956)

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРЕДЫДУЩЕЙ РАБОТЕ Е. В. С. КАССЕЛСА (ПРИМЕНЕНИЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ)

П. Туран (Будапешт)

(Резюме)

Применяя одну теорему предыдущей работы, автор предлагает следующее изменение метода Бернулли—Лобачевского—Грэфе.

Пусть требуется решить уравнение

$$f_0(z) = a_{00} + a_{10} z + \cdots + a_{n0} z^n = 0 \qquad (a_{n0} = 1),$$

корни которого $z_1, \ldots, z_n$, не ущемляя общности, удовлетворяют неравенству

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_n|.$$

Образуем преобразованные функции по формуле

$$f_{\nu+1}(z) = (-1)^n f_\nu(\sqrt{z}) f_\nu(-\sqrt{z}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots);$$

пусть

$$f_\nu(z) = a_{0\nu} + a_{1\nu} z + \cdots + a_{n\nu} z^n \qquad (a_{n\nu} = 1).$$

Обозначая через $s_{j\nu}$ сумму j-ых степеней корней $f_\nu(z)$ с помощью формул Ньютона—Жирарда числа

$$s_{1\nu}, s_{2\nu}, \ldots, s_{2n-1,\nu}$$

могут быть последовательно вычислены. Тогда

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-\nu}} \leq \frac{|z_1|}{\left(\max\limits_{j=1,2,\ldots,2n-1} |s_{j\nu}|^{\frac{1}{j}}\right)^{2^{-\nu}}} \leq 1.$$

RELATIONS D'UN PROBLÈME DE NEVANLINNA ET PICK AVEC LA THÉORIE DES OPÉRATEURS DE L'ESPACE HILBERTIEN

Par

B. SZ.-NAGY (Szeged), membre de l'Académie, et A. KORÁNYI (Szeged)

1. Soit $f(s)$ une fonction à valeurs complexes, définie sur un ensemble situé dans l'intérieur du cercle unité du plan complexe. Le problème est e savoir dans quelles conditions la fonction $f(s)$ peut être prolongée en une nction $g(z)$, holomorphe dans tout l'intérieur du cercle unité, et de partie elle non-négative, ou, en bref, en une fonction $g(z)$ "pseudopositive". La lution de ce problème, due essentiellement à R. NEVANLINNA et G. PICK,[1] st la suivante: *Il est nécessaire et suffisant que le noyau*

$$k(s,t)=(1-s\bar{t})^{-1}(f(s)+\overline{f(t)}) \tag{1}$$

it de type positif, c'est-à-dire qu'on ait

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k(s_i, s_j)\,\alpha_i\bar{\alpha}_j \geqq 0 \tag{2}$$

our tout système fini de points $s_1, \ldots, s_n$ *de* S *et pour tout système de ombres complexes* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

La nécessité de cette condition découle simplement de la formule de oisson:

$$g(z)=i\,\mathrm{Im}\,g(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\mathrm{Re}\,g(re^{it})]\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,dt \qquad (|z|<r<1).$$

uant à sa suffisance, elle a été démontrée par PICK et NEVANLINNA par des éthodes algébriques et de la théorie des fonctions. Plus tard, M. KREIN et . RECHTMANN[2] l'ont démontrée en réduisant le problème à la solution du

[1] G. PICK, Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegeene Funktionswerte bewirkt sind, *Math. Ann.*, **77** (1916), p. 7—23; Über beschränkte unktionen mit vorgeschriebenen Wertzuordnungen, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, B, **15** (1920); . NEVANLINNA, Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Verte annehmen, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, B, **13** (1919).

[2] M. KREIN et P. RECHTMANN, Sur une question de Nevanlinna—Pick, *Travaux de Univ. d'Odessa*, **2** (1938), p. 63—68.

problème des moments suivant:

$$f(s)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+s}{e^{it}-s}\,d\sigma(t),$$

dont l'inconnue est la fonction $\sigma(t)$, non-décroissante et indépendante de s. (Cette réduction est possible notamment si l'on fait l'hypothèse additionnelle que le point 0 appartient à l'ensemble S et que $f(0)$ est de valeur réelle: hypothèse qui ne restreint pas la généralité.)

Dans ce qui suit nous allons donner encore une démonstration, appartenant aussi à l'analyse fonctionnelle, mais qui, au lieu de se reporter aux théorèmes sur les problèmes des moments, fait usage seulement de quelques faits simples de la géométrie des espaces hilbertiens. Cette méthode nous permet même de généraliser le problème au cas où le rôle de la fonction numérique $f(s)$ est donné à une fonction $F(s)$ dont les valeurs sont des transformations linéaires bornées d'un espace hilbertien.[3]

2. Supposons d'abord que le point 0 appartient à S.

Construisons, de la manière usuelle, l'espace hilbertien associé au noyau de type positif $k(s,t)$. A cet effet, on fait correspondre à chaque point s de S un symbole e_s et on considère la variété linéaire $\mathfrak{L}_0$ des formes linéaires finies

$$\sum \alpha_i e_{s_i}$$

à coefficients complexes α_i, l'addition de ces formes et leur multiplication par des scalaires étant définies de manière évidente. Pour

$$\varphi=\sum \alpha_i e_{s_i},\qquad \psi=\sum \beta_j e_{t_j}$$

posons

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\sum_i\sum_j k(s_i,t_j)\,\alpha_i\bar{\beta}_j;$$

en vertu de (2) on a

$$\langle\varphi,\varphi\rangle\geqq 0.$$

Lorsqu'on identifie deux éléments φ_1,φ_2 de $\mathfrak{L}_0$ pour lesquels

$$\langle\varphi_1-\varphi_2,\varphi_1-\varphi_2\rangle=0,$$

$\mathfrak{L}_0$ devient un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$, en général non complet, muni de la

[3] Des raisonnements analogues s'appliquent aussi à la démonstration et généralisation d'un problème de LÖWNER; cf. A. KORÁNYI, On a theorem of Löwner and its connections with resolvents of selfadjoint transformations, *Acta Sci. Math.*, 17 (1956), p. 63—70, et B. SZ.-NAGY, Remarks to the preceding paper of A. Korányi, *Acta Sci. Math.* 17 (1956), p. 71—75.

notion de produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \psi \rangle.$$

C'est le complété $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{L}$ que nous associons au noyau $k(s, t)$.

D'après cette définition on a en particulier

$$(e_s, e_t) = k(s, t).$$

Cela étant, posons, pour $s \neq 0$,

$$e'_s = s^{-1}(e_s - e_0).$$

On aura, pour $s, t \neq 0$,

$$\begin{aligned}(e'_s, e'_t) &= \frac{1}{s\bar{t}}\{(e_s, e_t) - (e_s, e_0) - (e_0, e_t) + (e_0, e_0)\} = \\ &= \frac{1}{s\bar{t}}\{k(s, t) - k(s, 0) - k(0, t) + k(0, 0)\} = \\ &= \frac{1}{s\bar{t}}\left\{\frac{f(s) + \overline{f(t)}}{1 - s\bar{t}} - [f(s) + \overline{f(0)}] - [f(0) + \overline{f(t)}] + [f(0) + \overline{f(0)}]\right\} = \\ &= \frac{f(s) + \overline{f(t)}}{1 - s\bar{t}} = k(s, t) = (e_s, e_t).\end{aligned}$$

En désignant par $\mathfrak{M}$ le sous-espace de $\mathfrak{K}$ déterminé par les éléments e_s avec $s \neq 0$, il résulte du résultat que nous venons d'obtenir, que la transformation V, définie d'abord pour les éléments e_s $(s \neq 0)$ par $Ve_s = e'_s$, peut être prolongée par linéarité et continuité en une transformation isométrique de $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{N}$ l'image de $\mathfrak{M}$ par V.

On a évidemment, pour $s \neq 0$,

$$(I - sV)e_s = e_s - se'_s = e_s - s\frac{1}{s}(e_s - e_0) = e_0. \tag{3}$$

Or, la transformation isométrique V peut être prolongée en une transformation unitaire U, du moins si l'on admet aussi de sortir de l'espace $\mathfrak{K}$ en un espace convenable plus vaste $\tilde{\mathfrak{K}}$.

En effet, soit $\tilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{K}$, l'espace des couples $\{f, g\}$ d'éléments de $\mathfrak{K}$; on plonge $\mathfrak{K}$ dans $\tilde{\mathfrak{K}}$ en identifiant f avec le couple $\{f, 0\}$. Soient alors $f = f_{\mathfrak{M}} + f_{\mathfrak{M}^\perp}$, $g = g_{\mathfrak{N}} + g_{\mathfrak{N}^\perp}$ les décompositions des éléments quelconques f, g de $\mathfrak{K}$ suivant les sous-espaces orthogonaux complémentaires indiqués. Alors, la transformation

$$U\{f, g\} = \{Vf_{\mathfrak{M}} + g_{\mathfrak{N}^\perp},\ V^{-1}g_{\mathfrak{N}} + f_{\mathfrak{M}^\perp}\}$$

est, on le voit facilement, un prolongement unitaire de V dans $\tilde{\mathfrak{K}}$.

En désignant la transformation identique de $\tilde{\mathfrak{K}}$ par la même lettre I, on aura en vertu de (3)

$$(I - sU)e_s = e_0,$$

relation qui subsiste évidemment non seulement pour $s \neq 0$, mais aussi pour $s = 0$. Il en découle que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{I+sU}{I-sU}e_0, e_0\right) = \left(\frac{I}{I-sU}e_0, e_0\right) - \frac{1}{2}(e_0, e_0) = (e_s, e_0) - \frac{1}{2}(e_0, e_0) =$$

$$= k(s, 0) - \frac{1}{2}k(0, 0) = f(s) + \overline{f(0)} - \frac{1}{2}[f(0) + \overline{f(0)}] = f(s) - i \operatorname{Im} f(0),$$

donc on a

$$f(s) = ib + \frac{1}{2}\left(\frac{I+sU}{I-sU}e_0, e_0\right) \tag{4}$$

pour tout $s \in S$, b étant une constante réelle.

De cette représentation de $f(s)$ il résulte que $f(s)$ admet le prolongement

$$g(z) = ib + \frac{1}{2}\left(\frac{I+zU}{I-zU}e_0, e_0\right) = ib + \frac{1}{2}(e_0, e_0) + \sum_{k=1}^{\infty} z^k (U^k e_0, e_0), \tag{5}$$

fonction qui est évidemment holomorphe dans le cercle unité, et dont la partie réelle y est non-négative, en effet, en posant $(I-zU)^{-1}e_0 = l_z$, on voit que

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2}\left((I+zU)l_z, (I-zU)l_z\right) = \frac{1}{2}(1-|z|^2)(l_z, l_z) \geqq 0.$$

Cela achève la démonstration du théorème dans le cas où S comprend le point 0.

Le cas contraire peut être réduit à celui-ci par les substitutions

$$\sigma = \frac{s-s_0}{1-s\bar{s}_0}, \qquad \varphi(\sigma) = f(s),$$

s_0 désignant un point quelconque fixé de S. En effet, on aura alors

$$\sum_i \sum_j \frac{\varphi(\sigma_i) + \overline{\varphi(\sigma_j)}}{1-\sigma_i\bar{\sigma}_j}\alpha_i\bar{\alpha}_j = \sum_i \sum_j \frac{f(s_i) + \overline{f(s_j)}}{1-s_i\bar{s}_j}\beta_i\bar{\beta}_j \geqq 0$$

avec

$$\beta_j = \frac{1-s_j\bar{s}_0}{\sqrt{1-s_0\bar{s}_0}}\alpha_j;$$

par conséquent, $\varphi(\sigma)$ admet comme prolongement une fonction $\gamma(\zeta)$ pseudopositive, et

$$g(z) = \gamma\left(\frac{z-s_0}{1-z\bar{s}_0}\right)$$

sera alors le prolongement pseudopositif de $f(s)$.

Une fois démontré que $f(s)$ admet un prolongement pseudopositif, il 'ensuit que le noyau $k(s, t)$ est de type positif non seulement sur l'ensemble nitial S, mais dans tout l'intérieur du cercle unité, donc *la représentation* 4) *est toujours possible, que l'ensemble donné S comprenne le point* 0 *ou non.*

Remarquons encore les faits suivants. Lorsque l'ensemble S a un point imite intérieur au cercle unité, le prolongement holomorphe $g(z)$ est forcément unique. Supposons que l'ensemble S est *fini*, et supposons aussi que e point 0 appartient à S, ce qui ne restreint pas la généralité. L'espace $\mathfrak{K}$ st alors de dimension finie r (au plus égale au nombre des points de S) t par conséquent la transformation isométrique V peut être prolongée en une ransformation unitaire U du même espace $\mathfrak{K}$. Soient alors $x_1, \ldots, x_r$ un ystème orthonormal de vecteurs propres de U, et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ les valeurs ropres correspondantes; on obtient ainsi le prolongement pseudopositif suiant de $f(s)$:

$$g(z) = ib + \sum_{k=1}^{r} p_k \frac{1+z\varepsilon_k}{1-z\varepsilon_k} \tag{5'}$$

vec

$$p_k = \frac{1}{2} |(e_0, x_k)|^2 \geqq 0, \qquad |\varepsilon_k| = 1.$$

Dans le cas où S *n'est pas fini*, l'espace dans lequel U opère n'est pas en énéral de dimension finie, et alors on peut affirmer seulement qu'il existe ne fonction non décroissante $p(t)$ telle que

$$g(z) = ib + \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{it}}{1-ze^{it}}\, dp(t); \tag{5''}$$

n n'a qu'à poser $p(t) = \frac{1}{2}(E_t e_0, e_0)$, $\{E_t\}$ désignant la famille spectrale de U. On a abouti de cette façon à la représentation canonique des fonctions pseuopositives, due à F. Riesz.[4]

3. Envisageons maintenant la généralisation suivante de notre problème. u lieu de la fonction numérique $f(s)$, envisageons une fonction $F(s)$, définie ur l'ensemble S, et dont les valeurs sont des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Supposons que la transformation noyau

$$K(s, t) = (1 - s\bar{t})[F(s) + F^*(t)] \tag{6}$$

[4] F. Riesz, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, *Annales École Normale Sup.* (3), **28** (1911), p. 33—62.

soit de type positif dans le sens que

$$\sum_i \sum_j (K(s_i, s_j) u_i, u_j) \geqq 0 \tag{7}$$

pour tout système fini de points s_i de S et d'éléménts u_i de l'espace $\mathfrak{H}$. Supposons de plus que le point 0 appartient à S et que

$$F(0) = I. \tag{8}$$

Nous allons montrer que, *dans ces hypothèses on a*

$$F(s) = \mathrm{pr}\, \frac{1}{2} \frac{I + sU}{I - sU} \tag{9}$$

où U est une transformation unitaire d'un espace de Hilbert plus vaste.[5]

La démonstration est modélée sur celle que nous venons de donner pour le cas d'une fonction $f(s)$ numérique. Faisant correspondre à chaque point s de S un symbole e_s, envisageons les formes linéaires finies

$$\sum_i u_i e_{s_i}$$

à coefficients $u_i \in \mathfrak{H}$; en définissant l'addition de ces formes et leur multiplication par des scalaires de manière évidente, nous obtenons une variété linéaire $\mathfrak{L}_0$. Pour

$$\varphi = \sum u_i e_{s_i}, \qquad \psi = \sum u'_j e_{t_j}$$

posons

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_i \sum_j (K(s_i, t_j) u_i, u'_j);$$

en vertu de (7) on a

$$\langle \varphi, \varphi \rangle \geqq 0.$$

Lorsqu'on identifie deux éléments φ_1, φ_2 de $\mathfrak{L}_0$ pour lesquels

$$\langle \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0,$$

$\mathfrak{L}_0$ devient un espace de Hilbert $\mathfrak{L}$, en général non complet, muni de la notion de produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \psi \rangle.$$

L'espace $\mathfrak{H}$ peut être plongé dans $\mathfrak{L}$ en identifiant tout élément u de $\mathfrak{H}$ avec l'élément ue_0 de $\mathfrak{L}$, ce qui est légitime puisque la correspondance $u \to ue_0$

[5] T étant une transformation de l'espace hilbertien H et $\tilde{T}$ étant une transformation d'un espace hilbertien plus vaste $\tilde{H}$ ($H \subset \tilde{H}$), on dit que T est la projection de $\tilde{T}$ ($T = \mathrm{pr}\, \tilde{T}$) si, pour tout élement f de H, Tf est la projection orthogonale de $\tilde{T}f$ sur H. Cf. Béla Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendice au livre *"Leçons d'analyse fonctionnelle"* par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).

conserve la structure linéaire et métrique:

$$u+u' \to ue_0+u'e_0,\ cu\to c(ue_0),\ (u,u')=(K(0,0)\,u,u')=(ue_0,u'e_0);$$

ici nous avons fait usage de l'hypothèse (8).

Soit $\mathfrak{K}$ le complété de l'espace $\mathfrak{L}$.

On vérifie sans peine que, en désignant par P l'opérateur de la projection orthogonale dans $\mathfrak{K}$ sur le sous-espace $\mathfrak{H}$, on a

(10) $$P(ue_s)=K(s,0)\,u.$$

Cela étant, posons, pour $s\neq 0$,

$$V(ue_s)=\frac{1}{s}(ue_s-ue_0);$$

on vérifie sans peine que

$$\big(V(ue_s),V(u'e_t)\big)=(ue_s,u'e_t),$$

d'où il s'ensuit que la transformation V peut être prolongée par linéarité et continuité en une transformation isométrique dont le domaine est le sous-espace $\mathfrak{M}$ déterminé par les éléments ue_s $(s\neq 0)$, et dont le contre-domaine $\mathfrak{N}$ est alors aussi un sous-espace de $\mathfrak{K}$. On aura, tant pour $s\neq 0$ que pour $s=0$,

$$(I-sV)(ue_s)=ue_0=u.$$

Prolongeons V en une transformation unitaire U en sortant au besoin de l'espace $\mathfrak{K}$ en un espace plus vaste $\tilde{\mathfrak{K}}$, on aura encore

$$(I-sU)\,ue_s=u,\qquad ue_s=(I-sU)^{-1}u,$$

donc, par (10) et (8),

$$P\frac{1}{2}\,\frac{I+sU}{I-sU}\,u=P\left(\frac{I}{I-sU}-\frac{1}{2}\,I\right)u=P(ue_s)-\frac{1}{2}\,(ue_0)=$$

$$=K(s,0)\,u-\frac{1}{2}\,K(0,0)\,u=[F(s)+F^*(0)]\,u-\frac{1}{2}\,[F(0)+F^*(0)]\,u=F(s)\,u.$$

Cela achève la démonstration de l'assertion (9).

De cette manière, on a obtenu une certaine caractérisation des projections des *résolvantes* des transformations unitaires.

4. L'hypothèse (7) entraîne en particulier que

(7′) $$\sum_i\sum_j \alpha_i\bar{\alpha}_j K(s_i,s_j)\geqq O$$

pour tout système fini de points s_i de S et de nombres complexes α_i. Remplaçons l'hypothèse (7) par (7′), c'est-à-dire supposons que le noyau $K(s,t)$ soit *de type positif au sens faible.* En maintenant l'hypothèse (8) on voit que la fonction

$$f_u(s)=(F(s)\,u,u)$$

vérifie, pour tout $u \in \mathfrak{H}$ fixé, les conditions des paragraphes 1 et 2, et on a $f_u(0) = (u, u)$. Par conséquent, la représentation (4) est possible avec $b = 0$, donc on a

$$f_u(s) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + se^{it}}{1 - se^{it}}\, dp_u(t) \quad (s \in S)$$

avec une fonction non-décroissante $p_u(t)$ qu'on peut normer par les conditions qu'elle soit continue de droite et que $p_u(0) = 0$; on a $p_u(2\pi) = f_u(0) = (u, u)$. Si la fonction $p_u(t)$ est déterminée univoquement par la fonction $f_u(s)$, ce qui est le cas en particulier si l'ensemble S admet un point d'accumulation dans l'intérieur du cercle unité, on peut représenter $p_u(t)$ dans la forme

$$p_u(t) = (E_t u, u)$$

où E_t est une famille spectrale dans un espace hilbertien $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$, étalée sur le segment $[0, 2\pi]$.[6] Il en résulte la formule (9) avec la transformation unitaire

$$U = \int_0^{2\pi} e^{it}\, dE_t .$$

Donc, *si l'ensemble S admet un point d'accumulation intérieur au cercle unité, la représentation* (9) *est possible même si l'on remplace l'hypothèse* (7) *par* (7'), *c'est-à-dire en exigeant seulement que le noyau $K(s, t)$ soit de type positif au sens faible.*

5. Remarquons enfin qu'on peut aussi considérer le cas des fonctions définies dans un domaine circulaire fixé quelconque qui prennent leurs valeurs aussi dans un domaine circulaire fixé quelconque, au lieu du demi-plan $\operatorname{Re} z \geqq 0$. Nos résultats fournissent, moyennant des homographies convenables, la solution du problème correspondant. De telle façon on obtient en particulier une caractérisation des fonctions analytiques définies dans le demi-plan supérieur et ayant ici une partie imaginaire non-négative. Le sous-ensemble de ces fonctions qui satisfont aussi à la condition $\frac{f(z)}{z} \leqq M$ pour $z = ir$ $(r > 0)$, peut être caractérisé par une spécialisation non banale. Ce dernier problème, qui est intimement lié au problème des résolvantes des transformations autoadjointes, peut aussi être traité directement par notre méthode opérationnelle. On y reviendra à une autre occasion.

(Reçu le 23 août 1956.)

[6] Le même raisonnement que dans la Note suivante: BÉLA SZ.-NAGY, A moment problem for self-adjoint operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), p. 285—293.

СВЯЗИ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ НЕВАНЛИННА И ПИКА С ТЕОРИЕЙ ОПЕРАТОРОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Б. С.-Надь и А. Кораньи (Сегед)

(Резюме)

Речь идет о следующей теореме Неванлинна и Пика: Для того, чтобы для функции $f(s)$, определенной на каком-нибудь множестве S, лежащем внутри единичного круга комплексной плоскости, существовало такое распространение $g(z)$ на всю внутренность единичного круга, которое там голоморфно и имеет неотрицательную вещественную часть, необходимо и достаточно, чтобы определенная на множес ве $S \times S$ функция

$$k(s, t)=\frac{f(s)+\overline{f(t)}}{1-st}$$

была положительно определенной, т. е. имело место неравенство

$$\sum_i \sum_j k(s_i, s_j)\alpha_i \overline{\alpha}_j \geq 0 \tag{1}$$

для любой конечной системы точек $s_1, \ldots, s_n$ из множества S и любой системы комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Необходимость условия (1) легко получается на основании формулы Коши—Пуассона. Дополнительно предполагая еще, что точка 0 принадлежит множеству S, что не является ущемлением общности, работа доказывает достаточность условия новым и простым методом. Авторы исходят из того, что — как легко показать — положительно определенная функция $k(s, t)$ может быть представлена в виде внутреннего произведения

$$k(s, t)=(e_s, e_t),$$

где $\{e_s\}_{s\in S}$ некоторое подмножество элементов некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{K}$. Легко видеть, что преобразование $e_s \to \frac{1}{s}(e_s-e_0)$ $(s \in S, s \neq 0)$ изометрично, вследствие чего существует унитарное продолжение ее U, по крайней мере в том случае, если допустить и выход из пространства $\mathfrak{K}$ в более широкое пространство $\tilde{\mathfrak{K}}$. Легко получить соотношение

$$f(s)=i \operatorname{Im} f(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{I+sU}{I-sU} e_0, e_0\right),$$

откуда сразу следует существование для функции $f(s)$ распространения $g(z)$ указанного типа.

Теорема может быть обобщена для того случая, когда роль симметричной функции $f(s)$ принимает такая функция $F(s)$, значения которой суть ограниченные операторы некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}$.

ON THE MAXIMUM MODULUS OF ENTIRE FUNCTIONS

By

P. ERDŐS (Budapest), corresponding member of the Academy, and

T. KÖVÁRI (Budapest)

The function

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

is called the maximum modulus function of the entire function $f(z)$. In the present paper we discuss the approximation of maximum modulus functions, by means of power series with positive coefficients. We shall prove the following

THEOREM I. *For every $M(r)$ there exists a power series $N(r) = \sum c_n r^n$ with non-negative coefficients and with the property*

$$\frac{1}{6} < \frac{M(r)}{N(r)} < 3.$$

Though these constants are not the best possible, the theorem can not be sharpened essentially. We shall show this by constructing a maximum modulus function $M(r)$ with the property that there does not exist a power series $N(r)$ with non-negative coefficients which would satisfy the following asymptotic equality:

$$M(r) \sim N(r).$$

In fact, the following stronger result holds:

THEOREM II. *There exists an absolute constant $\varepsilon_0 > 0$ $\left(\varepsilon_0 = \frac{1}{200}\right)$ and a maximum modulus function $M(r)$ so that for every power series $N(r)$ with non-negative coefficients the inequality*

$$e^{-\varepsilon_0} < \frac{M(r)}{N(r)} < e^{\varepsilon_0}$$

fails for arbitrary large r.

It is to be hoped that by the aid of Theorem I it will be possible to extend certain properties of power series with non-negative coefficients to any maximum modulus function.

Now we turn to the proof of Theorem I. Let

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

be an arbitrary entire function, $M(r)$ its maximum modulus function and $F(t)=\log M(e^t)$. Latter is a monotonously increasing, convex, piecewise analytic function in $-\infty<t<+\infty$. In consequence of the convexity, every discontinuity of $F'(t)$ is of the first kind. The following construction of $N(r)$ is based on the approximation by polygons of the curve $F(t)$.

We may suppose without restricting the generality that $a_0\neq 0$ (if $z=0$ is a λ-fold root of $f(z)$, we can apply the theorem to $f(z)/z^\lambda$). Hence it follows that

$$\lim_{t=-\infty} F'(t)=0, \qquad \lim_{t=-\infty} F(t)=\log|a_0|. \tag{1}$$

Put $t_0=-\infty$, for $n>0$ we define the values t_n so that

$$F'(t_n-0)\leqq n\leqq F'(t_n+0). \tag{2}$$

This defines[1] unambigously the non-decreasing sequence t_n. Now let us define the number τ_n as follows:

Put $\tau_0=t_0=-\infty$ and $n_0=0$. We choose the positive integer k_0 so that

$$F(t_{k_0})-F(\tau_0)\leqq\log 3<F(t_{k_0+1})-F(\tau_0)$$

and put

$$n_1=\max\{k_0, 1\}, \qquad \tau_1=t_{n_1}.$$

Let us suppose that n_m and $\tau_m=t_{n_m}$ are already defined. Then we put $\tau_{m+1}=t_\nu$ where t_ν has the property that one of the distances $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ (on Fig. 1) is $\leqq\log 3$, but for $t_{\nu+1}$ both are $>\log 3$. However, we have to make an exception if for t_{n_m+1} already both of the distances are $>\log 3$. In this case we put $\tau_{m+1}=t_{n_m+1}$. To formulate the definition, we introduce the following notations:

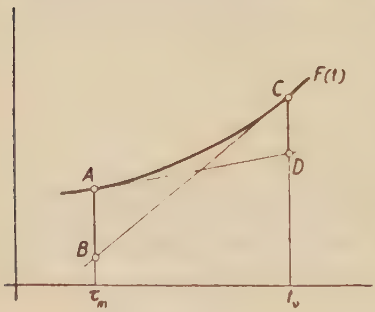


Fig. 1

$$h_\nu^m=\nu(t_\nu-\tau_m)-\{F(t_\nu)-F(\tau_m)\},$$
$$d_\nu^m=\{F(t_\nu)-F(\tau_m)\}-n_m(t_\nu-\tau_m).$$

the convexity of $F(t)$ these numbers increase with ν and

$$h_{n_m}^m=d_{n_m}^m=0.$$

[1] The numbers t_n are not necessarily different.

We define the integers l_m and k_m in the following way:

(3) $$\begin{cases} h^m_{l_m} \leqq \log 3 < h^m_{l_m+1}, \\ d^m_{k_m} \leqq \log 3 < d^m_{k_m+1}. \end{cases}$$

After these we define n_{m+1} and τ_{m+1} as follows:

(4) $$n_{m+1} = \max\{l_m, k_m, n_{m+1}\}, \qquad \tau_{m+1} = t_{n_{m+1}}.$$

The numbers n_m, τ_m and $r_m = e^{\tau_m}$ increase with m monotonously.[2]

We define the positive numbers c_m so that

(5) $$c_m r_m^{n_m} = M(r_m).$$

Then we shall prove that the power series

$$N(r) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m r^m$$

with non-negative coefficients possesses the desired properties.

Before verifying this statement we prove some lemmas in advance.

LEMMA I. *In the interval*

$$t_n \leqq t \leqq t_{n+1}$$

we define the function $G_n(t)$ as follows:

$$G_n(t) = \max\{F(t_n) + n(t - t_n);\ F(t_{n+1}) - (n+1)(t_{n+1} - t)\}.$$

Then we have

(6) $$0 \leqq F(t) - G_n(t) < \log 3.$$

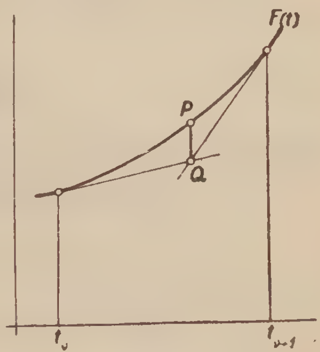


Fig. 2

(Geometrically this states simply that the distance $\overline{PQ}$ on Fig. 2 is $< \log 3$.) This lemma, though simple, is our most difficult one; this is the only place, where we use the fact that $F(t)$ is not the most general monotonic and convex curve, but the logarithm of a maximum modulus function.

PROOF OF LEMMA I. The inequality

$$F(t) - G_n(t) \geqq 0$$

follows immediately from the convexity of $F(t)$.

On the other hand, let us suppose that the second half of (6) is false, i. e. in the interval

$$t_n \leqq t \leqq t_{n+1}$$

there exists a point $\bar{t}$ for which

(6*) $$F(\bar{t}) - G_n(\bar{t}) \geqq \log 3.$$

[2] It is possible that — at most — two τ_m coincide.

From our hypothesis it follows that

$$\log 3 \leqq F(\bar{t}) - G_n(\bar{t}) \leqq \int_{t_n}^{\bar{t}} (F'(t_n) - n)\,dt \leqq \int_{t_n}^{\bar{t}} dt = \bar{t} - t_n, \tag{7}$$

$$\log 3 \leqq F(\bar{t}) - G_n(\bar{t}) \leqq \int_{\bar{t}}^{t_{n+1}} (n+1-F'(t))\,dt \leqq \int_{\bar{t}}^{t_{n+1}} dt = t_{n+1} - \bar{t}. \tag{8}$$

We introduce the following notations:

$$\varrho_n = e^{t_n}, \qquad \bar{\varrho} = e^{\bar{t}}.$$

Using Cauchy's inequality we have

$$|a_k|\varrho_n^k \leqq M(\varrho_n), \qquad |a_k|\varrho_{n+1}^k \leqq M(\varrho_{n+1})$$

or

$$\log|a_k| + kt_n \leqq F(t_n), \qquad \log|a_k| + kt_{n+1} \leqq F(t_{n+1}). \tag{9}$$

Hence, by (6*), (7), (9), we obtain

$$\begin{aligned}\log|a_k\bar{\varrho}^k| &= \log|a_k| + k\bar{t} = \log|a_k| + kt_n + k(\bar{t}-t_n) \leqq F(t_n) + k(\bar{t}-t_n) \leqq \\ &\leqq G_n(\bar{t}) - (n-k)(\bar{t}-t_n) \leqq F(\bar{t}) - \log 3 - \log 3\,(n-k) = \\ &= F(\bar{t}) - \log 3\,(n+1-k) = \log M(\bar{\varrho}) - \log 3\,(n+1-k) \quad \text{for} \quad k \leqq n,\end{aligned}$$

i. e.:

$$\frac{|a_k|\bar{\varrho}^k}{M(\bar{\varrho})} \leqq 3^{-(n+1-k)} \quad \text{for} \quad k \leqq n. \tag{10}$$

Similarly, using (8), we obtain

$$\begin{aligned}\log|a_k\bar{\varrho}^k| &= \log|a_k| + k\bar{t} = \log|a_k| + kt_{n+1} - k(t_{n+1}-\bar{t}) \leqq \\ &\leqq F(t_{n+1}) - k(t_{n+1}-\bar{t}) \leqq G_n(\bar{t}) - (k-n-1)(t_{n+1}-\bar{t}) \leqq \\ &\leqq F(\bar{t}) - \log 3 - \log 3\,(k-n-1) = \log M(\bar{\varrho}) - \log 3\,(k-n) \quad \text{for} \quad k \geqq n+1,\end{aligned}$$

i. e.:

$$\frac{|a_k|\bar{\varrho}^k}{M(\bar{\varrho})} \leqq 3^{-(k-n)} \quad \text{for} \quad k \geqq n+1. \tag{11}$$

By virtue of (10) and (11)

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\bar{\varrho}^k}{M(\bar{\varrho})} < 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = 1$$

which is impossible.

Lemma II. a) *Let us consider the lines*

(12) $$u = n_k t + \log c_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

and their upper supporting curve $G(t)$. *If we denote the maximal term of* $N(r)$ *with* $\mu(r)$, *then*

$$G(t) = \log \mu(t).$$

b) *Since in view of* (5)

(13) $$\log c_k + n_k \tau_k = \log M(r_k) = F(\tau_k),$$

therefore (12) *is the supporting line of the curve* $F(t)$ *at the point* $t = t_k$. *So* $G(t)$ *is a convex poligon which touches (or rather supports) the curve* $F(t)$ *at the points* $t = \tau_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Lemma III.

$$0 \leqq F(t) - G(t) \leqq \log 3.$$

Proof. Let be $\tau_m \leqq t \leqq \tau_{m+1}$. Suppose first that $n_{m+1} = l_m$. Then, by virtue of (13) and Lemma II, using the convexity of $F(t)$, we can write

$$\begin{aligned} 0 &\leqq F(t) - G(t) \leqq F(t) - \{n_{m+1} t + \log c_{m+1}\} = \\ &= F(t) - \{n_{m+1}\tau_{m+1} + \log c_{m+1}\} + n_{m+1}(\tau_{m+1} - t) = \\ &= F(t) - F(\tau_{m+1}) + n_{m+1}(\tau_{m+1} - t) \leqq n_{m+1}(\tau_{m+1} - \tau_m) - \\ &- \{F(\tau_{m+1}) - F(\tau_m)\} = h^m_{n_{m+1}} = h^m_{l_m} \leqq \log 3. \end{aligned}$$

In the same way we obtain

$$0 \leqq F(t) - G(t) \leqq d^m_{n_{m+1}} = d^m_{k_m} \leqq \log 3$$

also in the case $n_{m+1} = k_m$. Finally, in the case $n_{m+1} = n_m + 1$ the statement of the lemma follows immediately from Lemma I, because in that case

$$G(t) \equiv G_{n_m}(t)$$

for $\tau_m = t_{n_m} \leqq t \leqq t_{n_{m+1}} = \tau_{m+1}$.

Lemma IV. *We introduce for* $m < p$ *the following notations:*

$$\begin{aligned} D_{m,p} &= \{F(\tau_p) - F(\tau_m)\} - n_m(\tau_p - \tau_m), \\ H_{m,p} &= n_p(\tau_p - \tau_m) - \{F(\tau_p) - F(\tau_m)\}. \end{aligned}$$

(We mention that $D_{m,m+1} = d^m_{n_m+1}$, $H_{m,m+1} = h^m_{n_m+1}$.) *Then, in consequence of the convexity of* $F(t)$, *for* $m < p < s$ *we obtain*

$$\begin{aligned} D_{m,s} &= \{F(\tau_s) - F(\tau_m)\} - n_m(\tau_s - \tau_m) \geqq \\ &\geqq \{F(\tau_s) - F(\tau_p)\} + \{F(\tau_p) - F(\tau_m)\} - n_m(\tau_p - \tau_m) - n_p(\tau_s - \tau_p) = D_{m,p} + D_{p,s} \end{aligned}$$

and similarly

$$H_{m,s} \geqq H_{m,p} + H_{p,s}.$$

LEMMA V.

$$D_{m,m+2} \geqq \log 3, \qquad H_{m,m+2} \geqq \log 3.$$

Namely, in view of (3) and (4), in consequence of the convexity of $F(t)$,

$$D_{m,m+2} = \{F(\tau_{m+2}) - F(\tau_m)\} - n_m(\tau_{m+2} - \tau_m) \geqq$$
$$\geqq \{F(t_{n_{m+1}+1}) - F(\tau_m)\} - n_m(t_{n_{m+1}+1} - \tau_m) \geqq$$
$$\geqq \{F(t_{k_m+1}) - F(\tau_m)\} - n_m(t_{k_m+1} - \tau_m) = d^m_{k_m+1} > \log 3$$

and the assertion on $H_{m,m+2}$ follows in the same way.

LEMMA VI. *For $k > 0$, on the basis of Lemma IV and V we have*

$$D_{m-(2k+1),m} \geqq D_{m-2k,m} \geqq \sum_{i=0}^{k-1} D_{m-2(i+1),m-2i} \geqq k \log 3$$

and in the same way

$$H_{m,m+2k+1} \geqq H_{m,m+2k} \geqq \sum_{i=1}^{k} H_{m+(i-1)2,m+2i} \geqq k \log 3.$$

LEMMA VII. *For $k > 0$ we have*

$$\frac{c_{m-2k-1} r_m^{n_{m-2k-1}}}{c_m r_m^{n_m}} \leqq \frac{c_{m-2k} r_m^{n_{m-2k}}}{c_m r_m^{n_m}} \leqq 3^{-k},$$
$$\frac{c_{m+2k+1} r_m^{n_{m+2k+1}}}{c_m r_m^{n_m}} \leqq \frac{c_{m+2k} r_m^{n_{m+2k}}}{c_m r_m^{n_m}} \leqq 3^{-k}.$$

The lemma follows immediately from the previous one, by considering that in view of (13)

$$\log \frac{c_\nu r_m^{n_\nu}}{c_m r_m^{n_m}} = \log c_\nu - \log c_m + n_\nu \tau_m - n_m \tau_m =$$
$$= n_\nu(\tau_m - \tau_\nu) - \{F(\tau_m) - F(\tau_\nu)\} = \begin{cases} -D_{\nu,m} & \text{if} \quad \nu < m, \\ -H_{m,\nu} & \text{if} \quad \nu > m. \end{cases}$$

LEMMA VIII. *For $r_m \leqq r \leqq r_{m+1}$ we have*

$$0 < N(r) - \{c_{m-1} r^{n_{m-1}} + c_m r^{n_m} + c_{m+1} r^{n_{m+1}} + c_{m+2} r^{n_{m+2}}\} \leqq 2\mu(r).$$

Namely,[3] in view of the previous lemma

$$0 < N(r) - \{c_{m-1}r^{n_{m-1}} + c_m r^{n_m} + c_{m+1}r^{n_{m+1}} + c_{m+2}r^{n_{m+2}}\} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-2} c_\nu r^{n_\nu} + \sum_{\nu=m+3}^{\infty} c_\nu r^{n_\nu} = c_m r^{n_m} \sum_{\nu=1}^{m-2} \frac{c_\nu r^{n_\nu}}{c_m r^{n_m}} + c_{m+1} r^{n_{m+1}} \sum_{\nu=m+3}^{\infty} \frac{c_\nu r^{n_\nu}}{c_{m+1} r^{n_{m+1}}} \leqq$$

$$\leqq c_m r^{n_m} \sum_{\nu=1}^{m-2} \frac{c_\nu r_m^{n_\nu}}{c_m r_m^{n_m}} + c_{m+1} r^{n_{m+1}} \sum_{\nu=m+2}^{\infty} \frac{c_\nu r_{m+1}^{n_\nu}}{c_{m+1} r_{m+1}^{n_{m+1}}} \leqq$$

$$\leqq c_m r^{n_m} \sum_{k=1}^{[m/2]} 2\cdot 3^{-k} + c_{m+1} r^{n_{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} 2\cdot 3^{-k} \leqq$$

$$\leqq (c_m r^{n_m} + c_{m+1} r^{n_{m+1}})\, 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \leqq 2\mu(r).$$

LEMMA IX.

$$\mu(r) < N(r) < 6\mu(r).$$

Namely, by virtue of the previous lemma we have

$$N(r) = [N(r) - \{c_{m-1}r^{n_{m-1}} + c_m r^{n_m} + c_{m+1}r^{n_{m+1}} + c_{m+2}r^{n_{m+2}}\}] +$$
$$+ \{c_{m-1}r^{n_{m-1}} + c_m r^{n_m} + c_{m+1}r^{n_{m+1}} + c_{m+2}r^{n_{m+2}}\} \leqq 2\mu(r) + 4\mu(r) = 6\mu(r).$$

After these preliminary remarks Theorem I follows immediately. In fact, from Lemma IX we get

$$\frac{1}{6} < \frac{\mu(r)}{N(r)} < 1. \tag{14}$$

On the other hand, in view of Lemma II and III ($t = \log r$) we have

$$1 \leqq \frac{M(r)}{\mu(r)} \leqq 3. \tag{15}$$

By comparing (14) and (15) we obtain the desired inequality:

$$\frac{1}{6} < \frac{M(r)}{N(r)} < 3.$$

Q. e. d.

Now we turn to Theorem 2. We define the entire function $f(z)$ by the power series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2^{n_k^2}}\left(1 + \frac{z}{r_k} - \frac{z^2}{r_k^2}\right) \tag{16}$$

where $n_k = 2^k$, $r_k = 4^{n_k}$. Let $M(r)$ be the maximum modulus function of $f(z)$.

[3] The following calculation is, strictly speaking, restricted to the case $m \geqq 2$. However, if we put $c_{-1} = c_{-2} = 0$, then we can apply the argument to the case $m = 0, m = 1$, too.

We shall demonstrate that there does not exist a power series

$$N(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

with non-negative coefficients which satisfies the inequality

$$e^{-\varepsilon} < \frac{N(r)}{M(r)} < e^{\varepsilon} \tag{17}$$

with $\varepsilon \leqq \frac{1}{200}$ and for $r > r_{k_0-1}$. Let us suppose that our assertion is false and there exists an $N(r)$ satisfying (17). We introduce the following notations:

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho_k = r_k^{5/6} r_{k+1}^{1/6}, & \tau_k = r_k^{2/3} r_{k+1}^{1/3}, \\ \sigma_k = r_k^{1/3} r_{k+1}^{2/3}, & \zeta_k = r_k^{1/6} r_{k+1}^{5/6} \end{array}\right\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

In consequence of the definition we obtain

$$r_k < \varrho_k < \tau_k < \sigma_k < \zeta_k < r_{k+1}.$$

Let us put $\sigma_{k-1} \leqq r \leqq \tau_k$. Then, for $\nu > 0$,

$$\log \frac{\dfrac{r^{n_{k-\nu}+2}}{2^{n_{k-\nu}^2}}}{\dfrac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}}} = (n_k^2 - n_{k-\nu}^2)\log 2 - (n_k - n_{k-\nu} - 2)\log r \leqq$$

$$\leqq (n_k - n_{k-\nu}) \left\{ \log 2(n_k + n_{k-\nu}) - \log \sigma_{k-1}\left(1 - \frac{2}{n_k - n_{k-\nu}}\right) \right\} = \tag{18}$$

$$= (n_k - n_{k-\nu}) \left\{ \log 2(n_k + n_{k-\nu}) - \log 4\,\frac{n_{k-1}+n_k}{3} \right\} + 2\log 4\,\frac{n_{k-1}+2n_k}{3} \leqq$$

$$\leqq (n_k - n_{k-\nu}) \left\{ \log 2(n_k + n_{k-\nu}) - \frac{2}{3}\log 2(n_{k-\nu} + 2n_k) \right\} + 4\log 2\cdot n_k =$$

$$= -(n_k - n_{k-\nu})^2 \frac{\log 2}{3} + 4\log 2\cdot n_k \leqq -(n_k - n_{k-1})^2 \frac{\log 2}{3} + 4\log 2\cdot n_k =$$

$$= -4^{k-1}\frac{\log 2}{3} + \log 2\cdot 2^{k+2} < -4^{k-3}.$$

We obtain in the same way that in the same interval

$$\log \frac{\dfrac{r^{n_{k+\nu}}}{2^{n_{k+\nu}^2}}}{\dfrac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}}} < -(n_{k+\nu} - n_k)^2 \frac{\log 2}{3} < -4^{k+\nu-1}\frac{\log 2}{3} < -4^{k-3+\nu}. \tag{19}$$

From (18) and (19) it follows that in the interval $\sigma_{k-1} \leqq r \leqq \tau_k$ the k-th term of (16) (for sufficiently large k) predominates strongly over the rest. Therefore, denoting the maximum modulus function of the polynomial

$$1+\zeta-\zeta^2$$

by $M_1(r)$, we have

$$e^{-\varepsilon} < \frac{\dfrac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}} M_1\left(\dfrac{r}{r_k}\right)}{M(r)} < e^{\varepsilon} \tag{20}$$

in the interval $\sigma_{k-1} \leqq r \leqq \tau_k$ for $k > k_1(\varepsilon)$. Comparing (17) and (20) we obtain that in the same interval

$$e^{-2\varepsilon} < \frac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}} \frac{M_1\left(\dfrac{r}{r_k}\right)}{N(r)} < e^{2\varepsilon} \tag{21}$$

holds for $k > k_2(\varepsilon) = \max\{k_0(\varepsilon), k_1(\varepsilon)\}$. On the other hand, in the interval $\sigma_{k-1} \leqq r \leqq \zeta_{k-1}$

$$\begin{aligned} 1 < M_1\left(\frac{r}{r_k}\right) < M_1\left(\frac{\zeta_{k-1}}{r_k}\right) = M_1\left(\left\{\frac{r_{k-1}}{r_k}\right\}^{\frac{1}{6}}\right) = M_1\left(4^{-\frac{n_k-n_{k-1}}{6}}\right) = \\ = M_1\left(4^{-\frac{2^{k-2}}{3}}\right) < e^{\varepsilon} \quad \text{if} \quad k > k_3(\varepsilon). \end{aligned} \tag{22}$$

In the same way in the interval $\varrho_k \leqq r \leqq \tau_k$

$$1 < \frac{r_k^2}{r^2} M_1\left(\frac{r}{r_k}\right) < e^{\varepsilon} \quad \text{if} \quad k > k_3(\varepsilon). \tag{23}$$

Comparing (21) with (22) and (23), respectively, we obtain the following inequalities:

$$e^{-3\varepsilon} < \frac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}} \frac{1}{N(r)} < e^{2\varepsilon}, \tag{24}$$

$$e^{-3\varepsilon} < \frac{r^{n_k+2}}{2^{n_k^2} r_k^2} \frac{1}{N(r)} < e^{2\varepsilon} \tag{25}$$

which are valid in the interval

$$\sigma_{k-1} \leqq r \leqq \zeta_{k-1} \quad \text{and} \quad \varrho_k \leqq r \leqq \tau_k,$$

respectively. Applying (24) for $r=\xi_{k-1}=\sqrt{\sigma_{k-1}\zeta_{k-1}}$, we obtain for $n<n_k$

$$a_n\xi_{k-1}^n=(a_n\sigma_{k-1}^n)\left(\frac{\xi_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right)^n\le N(\sigma_{k-1})\left(\frac{\xi_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right)^n<$$

(26) $$<e^{3\varepsilon}\frac{\sigma_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}\left(\frac{\xi_{k-1}}{\sigma_{k-1}}\right)^n=e^{3\varepsilon}\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}\left(\frac{\sigma_{k-1}}{\xi_{k-1}}\right)^{n_k-n}\le$$

$$\le e^{3\varepsilon}\left(\frac{r_{k-1}}{r_k}\right)^{\frac{n_k-n}{12}}\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}<\frac{2}{2^{\frac{n_k-n_{k-1}}{6}}}\cdot\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}=2^{1-\frac{n_{k-1}}{6}}\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}$$

and similarly for $n>n_k$

$$a_n\xi_{k-1}^n=(a_n\zeta_{k-1}^n)\left(\frac{\xi_{k-1}}{\zeta_{k-1}}\right)^n\le N(\zeta_{k-1})\left(\frac{\xi_{k-1}}{\zeta_{k-1}}\right)^n<$$

(27) $$<e^{3\varepsilon}\frac{\zeta_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}\left(\frac{\xi_{k-1}}{\zeta_{k-1}}\right)^n=e^{3\varepsilon}\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}\left(\frac{\xi_{k-1}}{\zeta_{k-1}}\right)^{n-n_k}\le$$

$$\le e^{3\varepsilon}\left(\frac{r_{k-1}}{r_k}\right)^{\frac{n-n_k}{12}}\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}\le 2^{1-(n-n_k)\frac{n_{k-1}}{6}}\cdot\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}.$$

Here we utilized that the coefficients a_n are non-negative. From (26) and (27) we have

$$0<\sum_{n\ne n_k}a_n\xi_{k-1}^{n_k}=N(\xi_{k-1})-a_{n_k}\xi_{k-1}^{n_k}\le$$

(28) $$\le\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}}\left\{n_k2^{1-\frac{n_{k-1}}{6}}+\frac{2}{2^{\frac{n_{k-1}}{6}}-1}\right\}<\varepsilon\frac{\xi_{k-1}^{n_k}}{2^{n_k^2}},$$

$$0<\frac{N(\xi_{k-1})}{\xi_{k-1}^{n_k}}2^{n_k^2}-a_{n_k}2^{n_k^2}<\varepsilon\quad\text{if}\quad k>k_1(\varepsilon).$$

On the other hand, it follows from (24) that

(29) $$e^{-2\varepsilon}<\frac{N(\xi_{k-1})}{\xi_{k-1}^{n_k}}2^{n_k^2}<e^{3\varepsilon}.$$

Comparing (28) and (29) we obtain

(30) $$e^{-2\varepsilon}-\varepsilon<a_{n_k}2^{n_k^2}<e^{3\varepsilon}.$$

Using (25) we obtain in an entirely similar way that

(31) $$e^{-2\varepsilon}-\varepsilon<a_{n_k+2}2^{n_k^2}<e^{3\varepsilon}.$$

From (26) it follows immediately that

(32)
$$a_n r^n < 2^{1-\frac{n_{k-1}}{6}} \frac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}}$$

for $r \geqq \zeta_{k-1} > \xi_{k-1}$, $n < n_k$ and in an entirely similar way we also obtain

(33)
$$a_n r^n < 2^{1-(n-n_k)\frac{n_k}{6}} \frac{r^{n_k+2}}{2^{n_k^2} r_k^2}$$

for $r \leqq \varrho_k$, $n > n_k+2$. From (32) and (33) it follows that in the interval $\zeta_{k-1} \leqq r \leqq \varrho_k$:

(34)
$$0 < N(r) - \{a_{n_k} r^{n_k} + a_{n_k+1} r^{n_k+1} + a_{n_k+2} r^{n_k+2}\} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n_k-1} a_\nu r^\nu + \sum_{\nu=n_k+3}^{\infty} a_\nu r^\nu \leqq \left\{ n_k \cdot 2^{1-\frac{n_{k-1}}{6}} + \frac{2}{2^{\frac{n_{k-1}}{6}}-1} \frac{r^2}{r_k^2} \right\} \frac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}} \leqq$$
$$\leqq \varepsilon \left(1 + \frac{r^2}{r_k^2}\right) \frac{r^{n_k}}{2^{n_k^2}} \quad \text{if} \quad k > k_4(\varepsilon).$$

From (30) and (31) we obtain

$$\left(1+\frac{r^2}{r_k^2}\right)(e^{-2\varepsilon}-\varepsilon) < (a_{n_k} + a_{n_k+2} r^2) 2^{n_k^2} < \left(1+\frac{r^2}{r_k^2}\right) e^{3\varepsilon}.$$

Hence

(35)
$$r^{n_k}(e^{-2\varepsilon}-\varepsilon) \left\{ \frac{1}{2^{n_k^2}} \left(1+\frac{r^2}{r_k^2}\right) + a_{n_k+1} r \right\} < \left\{ a_{n_k} r^{n_k} + a_{n_k+1} r^{n_k+1} + a_{n_k+2} r^{n_k+2} \right\} <$$
$$< e^{3\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2^{n_k^2}} \left(1+\frac{r^2}{r_k^2}\right) + a_{n_k+1} r \right\} r^{n_k}.$$

In view of (34) and (35)

(36)
$$e^{-2\varepsilon} - \varepsilon < \frac{N(r)}{\left\{ \frac{1}{2^{n_k^2}} \left(1+\frac{r^2}{r_k^2}\right) + a_{n_k+1} r \right\} r^{n_k}} < e^{3\varepsilon} + \varepsilon.$$

Comparing this with (21) we obtain

(37)
$$e^{-2\varepsilon}(e^{-2\varepsilon}-\varepsilon) < \frac{M_1\left(\frac{r}{r_k}\right)}{1 + 2^{n_k^2} a_{n_k+1} r + \frac{r^2}{r_k^2}} < e^{2\varepsilon}(e^{3\varepsilon}+\varepsilon),$$
$$\left| \frac{1 + 2^{n_k^2} a_{n_k+1} r + \frac{r^2}{r_k^2}}{M_1\left(\frac{r}{r_k}\right)} - 1 \right| < 7\varepsilon \quad \text{if} \quad \varepsilon < \frac{1}{20}.$$

It is easy to verify that

$$M_1(r)=\begin{cases} 1+r-r^2 & \text{if } 0\leqq r\leqq \sqrt{5}-2, \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(1+r^2) & \text{if } \sqrt{5}-2\leqq r\leqq \sqrt{5}+2, \\ r^2+r-1 & \text{if } \sqrt{5}+2\leqq r<\infty. \end{cases}$$

Thus substituting in (37) $r=r_k$ and $r=\frac{r_k}{10}$, respectively, we obtain ($M_1(1)=\sqrt{5}$, $M_1(0,1)=1,09$)

$$\left|\frac{2+2^{n_k^2}a_{n_k+1}r_k}{\sqrt{5}}-1\right|<7\varepsilon, \tag{38}$$

$$\left|\frac{1,01+0,1\ 2^{n_k^2}a_{n_k+1}r_k}{1,09}-1\right|<7\varepsilon. \tag{39}$$

From (38) we have

$$2^{n_k^2}a_{n_k+1}r_k<(\sqrt{5}-2)+7\sqrt{5}\,\varepsilon,$$

on the other hand, from (39) we obtain

$$2^{n_k^2}a_{n_k+1}r_k>0,8-76,3\varepsilon.$$

If $\varepsilon\leqq\frac{1}{200}$, these inequalities are inconsistent.

Thus, we arrived at a contradiction and this proves Theorem II.

It is an open question whether to an arbitrary maximum modulus function $M(r)$ there exists a power series $V(r)=\Sigma a_n r^n$ with real coefficients, and with the maximum modulus function $M^*(r)$ with the property that either

$$M(r)\sim V(r)$$

or

$$M(r)\sim M^*(r)$$

holds.

Similarly, the authors do not know whether Theorem I holds for every piecewise smooth, non-decreasing, logarithmically convex function $\mathfrak{M}(r)$, or not.

(Received 27 August 1956)

О МАКСИМУМЕ МОДУЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

П. Эрдёш и Т. Кёвари (Будапешт)

(Резюме)

В настоящей статье доказываются следующие две теоремы:

Теорема I. Если $f(z)$ любая целая функция, $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$, то существует такой степенной ряд с неотрицательными коэффициентами $N(r)=\sum c_n r^n$, что

$$\frac{1}{6}<\frac{M(r)}{N(r)}<3 \qquad (0\leqq r<\infty).$$

Эти постоянные не наилучшие, но теорема в сущности все же не может быть усилена, ибо имеет место следующая теорема:

Теорема II. Предыдущая теорема не будет иметь место даже для достаточно больших r, если заменить в ней $\frac{1}{6}$ на $e^{-\frac{1}{200}}$ и 3 на $e^{\frac{1}{200}}$.

ON THE INDEPENDENCE IN THE LIMIT OF SUMS DEPENDING ON THE SAME SEQUENCE OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

By

A. PRÉKOPA (Budapest) and A. RÉNYI (Budapest), member of the Academy

Introduction

Let ξ_t be a stochastic process with independent increments. Suppose that ξ_t is integer-valued and its sample functions are continuous to the left and have a finite number of discontinuities with probability 1. It can be proved (see [3], Theorem 6) that if ν_k is the number of discontinuities of ξ_t of magnitude k in the time interval $I=[a, b]$, then the random variables ν_k $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ are independent.[1]

This assertion implies, for example, that a homogeneous composed Poisson process ξ_t may be considered as a superposition of independent ordinary Poisson processes, i. e. can be represented in the form

$$\xi_t=\sum_{k=1}^{\infty} k\, \xi_t^{(k)}$$

where $\xi_t^{(k)}$ is an ordinary homogeneous Poisson process, and the processes $\xi_t^{(k)}$ are independent (see [4]). For a more general form of this statement see [3].

In § 1 of the present paper we prove a general theorem on the asymptotic independence of certain sums of random variables.

§ 2 deals with the application of our independence theorem leading to a theorem somewhat stronger than that formulated above. Further applications will be given in a forthcoming paper[2] of the first named author.

§ 1. The independence theorem

We start from a double sequence of random variables

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{nk_n} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

[1] In [3] the above theorem is formulated more generally.

[2] On stochastic set functions. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8 (1957) (under press).

and suppose always that $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ are independent for every $n = 1, 2, \dots$. Let us consider r Borel measurable real functions $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ for which the sets defined by $f_k(x) \neq 0$ are disjoint, or expressed in another way, for which the following relations hold:

(1) $$f_j(x) f_k(x) = 0 \quad \text{for} \quad j \neq k \qquad (j, k = 1, 2, \dots, r).$$

Let us denote by $\varphi_{lk}^{(n)}(u)$ the characteristic function of the random variable $f_l(\xi_{nk})$, further let us put

$$\zeta_l^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} f_l(\xi_{nk}) \qquad (l = 1, 2, \dots, r;\ n = 1, 2, \dots).$$

In order to simplify the understanding of the phenomenon which is described by our theorem, we formulate it first for a special case.

THEOREM 1a. *Let us suppose that the following conditions hold:*

a) *The real, Borel measurable functions $f_l(x)$ $(l = 1, 2, \dots, r)$ are integer-valued and satisfy* (1).

b) *For every l $(1 \leq l \leq r)$ the random variables*

$$f_l(\xi_{n1}), f_l(\xi_{n2}), \dots, f_l(\xi_{nk_n})$$

are infinitesimal, i. e.

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} \mathbf{P}(f_l(\xi_{nk}) \neq 0) = 0.$$

c) *For every l $(1 \leq l \leq r)$ the limiting distribution of the random variables $\zeta_l^{(n)}$ exists:*

(2) $$F_i(x_i) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\zeta_i^{(n)} < x_i) \qquad (1 \leq i \leq r),$$

at every point of continuity of $F_i(x)$.

Under these conditions the random variables $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \dots, \zeta_r^{(n)}$ are asymptotically independent, i. e.

(3) $$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\zeta_1^{(n)} < x_1, \zeta_2^{(n)} < x_2, \dots, \zeta_r^{(n)} < x_r) = F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_r(x_r)$$

if x_i is a continuity point of $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$.

PROOF. Let us consider the characteristic function of the joint distribution of the random variables $\zeta_l^{(n)}$ $(l = 1, 2, \dots, r)$. Taking the relation (1) into account it can easily be seen by comparing the coefficients on both sides that the r-dimensional characteristic function of $\zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_r^{(n)}$ is the following

(4) $$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_r} \mathbf{P}(\zeta_1^{(n)} = j_1, \dots, \zeta_r^{(n)} = j_r) e^{i(u_1 j_1 + \dots + u_r j_r)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{k_n} \left\{ 1 + \sum_s \mathbf{P}(f_1(\xi_{nk}) = s)(e^{iu_1 s} - 1) + \dots + \sum_s \mathbf{P}(f_r(\xi_{nk}) = s)(e^{iu_r s} - 1) \right\}.$$

t follows from (4) that (denoting by $\mathbf{M}(\chi)$ the expectation of χ)

5) $$\mathbf{M}(e^{i(\zeta_1^{(n)}u_1+\cdots+\zeta_r^{(n)}u_r)}) = \prod_{k=1}^{k_n}\{1+(\varphi_{1k}^{(n)}(u_1)-1)+\cdots+(\varphi_{rk}^{(n)}(u_r)-1)\}.$$

Conditions a), b) and c) imply that the limits

6) $$\Phi_l(u_l) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(\varphi_{lk}^{(n)}(u_l)-1) \qquad (l=1,2,\ldots,r)$$

exist (see [1], § 24, Theorem 1) and $e^{\Phi_l(u_l)}$ is the characteristic function of the limiting distribution $F_l(x_l)$ $(l=1,2,\ldots,r)$. Moreover, by Condition b) we have

(7) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}|1-\varphi_{lk}^{(n)}(u_l)|^2 = 0 \qquad (l=1,2,\ldots,r).$$

According to (6) and (7) the sequence (5) converges to the r-dimensional characteristic function

$$e^{\Phi_1(u_1)}\ldots e^{\Phi_r(u_r)}$$

and thus relation (3) holds.

A heuristic argument in favour of Theorem 1a can be given as follows: Our suppositions a), b) and c) imply that in general only a small number of terms of the sum $\zeta_l^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} f_l(\xi_{nk})$ are different from 0 for each l. Supposition (1) ensures that the sums $\zeta_l^{(n)}$ $(l=1,2,\ldots,r)$ will always depend on disjoint subsets of the independent random variables $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$; of course, these sets are random, and therefore the sums $\zeta_l^{(n)}$ are not independent, only almost independent. Nevertheless in the limit their dependence disappears.

The suppositions of Theorem 1a may be replaced by a set of more special suppositions which, however, have the advantage that no supposition restricts at the same time the choice of the random variables ξ_{nk} and the choice of the functions $f_l(x)$, as there are two distinct groups of suppositions, further the convergence of the distribution of $\zeta_l^{(n)}$ is not postulated, but is a consequence of the suppositions. This weaker form of Theorem 1a is expressed by the following

COROLLARY. Let $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ denote a double sequence of independent non-negative integer-valued random variables which are infinitesimal, i. e.

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq k_n}\mathbf{P}(\xi_{nk}\neq 0) = 0.$$

Let $E_1, E_2, \ldots, E_r$ denote disjoint subsets of the set of positive integers and let us suppose that $f_l(k)$ $(l=1,2,\ldots,r;\ k=0,1,\ldots)$ are non-negative in-

teger-valued functions such that $f_l(0)=0$ and $f_l(k)=0$ if $k \notin E_l$. Let us put $p_{nks}=\mathbf{P}(\xi_{nk}=s)$, $C_{ns}=\sum_{k=0}^{k_n} p_{nks}$ and suppose that there exists a convergent series of non-negative numbers $\sum_{s=1}^{\infty} C_s$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |C_{ns}-C_s|=0.$$

It follows that putting

$$\zeta_l^{(n)}=\sum_{k=1}^{k_n} f_l(\xi_{nk}) \qquad (l=1,2,\ldots,r;\ n=1,2,\ldots)$$

we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\zeta_1^{(n)}<x_1, \zeta_2^{(n)}<x_2, \ldots, \zeta_r^{(n)}<x_r)=F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_r(x_r)$$

where the distribution function $F_k(x)$ has the generating function

$$\exp \sum_{s=1}^{\infty} C_s(z^{f_k(s)}-1).$$

To prove that this Corollary really follows from Theorem 1a, we have to apply Theorem 3 of the paper [2].

Now we turn to the general case in which the first part of Condition a) of Theorem 1a is dropped. Our statement is expressed by

THEOREM 1b. *Let us suppose that the following conditions hold:*

a) *The Borel measurable real functions $f_l(x)$ $(l=1,2,\ldots,r)$ satisfy* (1).

b) *For every l $(1\leq l\leq r)$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |\varphi_{lk}^{(n)}(u_l)-1|^2=0.^{3}$$

c) *For every l $(1\leq l\leq r)$ the random variables*

$$f_l(\xi_{n1}), f_l(\xi_{n2}), \ldots, f_l(\xi_{nk_n})$$

are infinitesimal, i. e. for every $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leq k\leq k_n} \mathbf{P}(|f_l(\xi_{nk})|>\varepsilon)=0.$$

[3] It can be seen that if Conditions c) and d) hold, then Condition b) holds also if for some $\tau>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |\alpha_{lk}^{(n)}|^2=0$$

where

$$\alpha_{lk}^{(n)}=\int_{|x|<\tau} x\,dF_{lk}^{(n)}(x), \qquad F_{lk}^{(n)}(x)=\mathbf{P}(f_l(\xi_{nk})<x).$$

d) *For every l $(1 \leqq l \leqq r)$ the limiting distribution of the random vari-bles $\zeta_l^{(n)}$ exists.*

Under these conditions the random variables $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_r^{(n)}$ are asymp-tically independent, i. e. relation (2) holds.

PROOF. First we observe that (5) holds without the restriction that the (x) are integer-valued. This can be shown as follows: By virtue of the in-ependence of the variables ξ_{nk} we obtain

$$\mathbf{M}\left(e^{i\sum_{l=1}^{r} u_l \zeta_l^{(n)}}\right) = \prod_{k=1}^{k_n} \mathbf{M}\left(e^{i\sum_{l=1}^{r} u_l f_l(\xi_{nk})}\right). \tag{8}$$

et $A_{lk}^{(n)}$ denote the event consisting in that $f_l(\xi_{nk}) \neq 0$. Then we have[4]

$$\mathbf{M}\left(e^{i\sum_{l=1}^{r} u_l f_l(\xi_{nk})}\right) = \sum_{\nu=1}^{r}\left(\mathbf{M}\left(e^{i\sum_{l=1}^{r} u_l f_l(\xi_{nk})} \,\middle|\, A_{\nu k}^{(n)}\right) - 1\right)\mathbf{P}(A_{\nu k}^{(n)}) + 1. \tag{9}$$

s the event $A_{\nu k}^{(n)}$ implies $f_l(\xi_{nk}) = 0$ for $l \neq \nu$, we have

$$\mathbf{M}\left(e^{i\sum_{l=1}^{r} u_l f_l(\xi_{nk})} \,\middle|\, A_{\nu k}^{(n)}\right) = \mathbf{M}(e^{iu_\nu f_\nu(\xi_{nk})} \mid A_{\nu k}^{(n)}). \tag{10}$$

n the other hand,

$$[\mathbf{M}(e^{iu_\nu f_\nu(\xi_{nk})} \mid A_{\nu k}^{(n)}) - 1]\mathbf{P}(A_{\nu k}) = \varphi_{\nu k}^{(n)}(u_\nu) - 1. \tag{11}$$

hus (5) follows from (8)—(11).

Condition d) implies the existence of

$$\Psi_l(u_l) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{k_n} \varphi_{lk}^{(n)}(u_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots, r). \tag{12}$$

s $\Psi_l(u_l)$ is the characteristic function of an infinitely divisible distribution see [1], § 24, Theorem 2), we have

$$\Psi_l(u_l) \neq 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r)$$

see [1], § 17, Theorem 1). It follows hence and from (12) that if $|\varphi_{lk}^{(n)}(u_l) - 1| \leqq \frac{1}{2}$, hen

$$\begin{aligned} &\left|\log \Psi_l(u_l) - \sum_{k=1}^{k_n}(\varphi_{lk}^{(n)}(u_l) - 1)\right| \leqq \\ &\leqq \left|\log \Psi_l(u_l) - \prod_{k=1}^{k_n} \varphi_{lk}^{(n)}(u_l)\right| + \sum_{k=1}^{k_n} |\varphi_{lk}^{(n)}(u_l) - 1|^2 \qquad (l = 1, 2, \ldots, r). \end{aligned} \tag{13}$$

4 $\mathbf{M}(\eta \mid A)$ denotes the conditional expectation of η under the condition A.

The member on the right-hand side of (13) tends to 0, hence

$$\Phi_l(u_l) = \log \Psi_l(u_l) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\varphi_{lk}^{(n)}(u_l) - 1) \qquad (l = 1, 2, \ldots, r \tag{14}$$

By (5), (14) and Condition b) it follows finally

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(e^{i(\zeta_1^{(n)}u_1+\cdots+\zeta_r^{(n)}u_r)}) = \prod_{l=1}^{r} e^{\Phi_l(u_l)}.$$

Thus Theorem 1b is proved.

§ 2. Application to stochastic processes

In this § we consider a stochastic process with independent incremen ξ_t. For the sake of simplicity we suppose that ξ_t is defined in the time ir terval $[0, 1]$. We suppose furthermore that the sample functions of ξ_t ai continuous to the left for $0 \leqq t \leqq 1$, with probability 1. Let $\nu(I)$ denote th random variable giving the number of discontinuities of ξ_t of magnitudes $h \in$ We prove the following

THEOREM 2. *If the process ξ_t is weakly continuous, i. e. for every $\varepsilon >$*

$$\lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{P}(|\xi_{t+\Delta t} - \xi_t| \geqq \varepsilon) = 0 \tag{15}$$

uniformly in t and $I_1, I_2, \ldots, I_r$ are pairwise disjoint intervals with positi distances from the point 0, then the random variables

$$\nu(I_1), \nu(I_2), \ldots, \nu(I_r)$$

are independent.

PROOF. Let $f_l(x)$ denote the characteristic function (in the sense of s theory) of the interval I_l. We define the random variables

$$\eta_{n,k+1} = \xi_{\frac{k+1}{n}} - \xi_{\frac{k}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{16}$$

Obviously,

$$\mathbf{P}\left(\nu(I_l) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_l(\eta_{n,k})\right) = 1, \tag{17}$$

hence Condition c) of Theorem 1a is satisfied. Since

$$\mathbf{P}(f_l(\eta_{n,k+1}) \neq 0) \leqq \mathbf{P}\left(|\xi_{\frac{k+1}{n}} - \xi_{\frac{k}{n}}| \geqq \delta\right)$$

where δ is the minimal distance of the intervals I_l from the point 0, t random variables

$$f_l(\eta_{n,1}), f_l(\eta_{n,2}), \ldots, f_l(\eta_{n,n})$$

re infinitesimal for every l. As Condition a) is obviously satisfied, the relaions (2) and (17) imply our assertion.

If instead of the intervals $I_1, I_2, \ldots, I_r$ we choose pairwise disjoint Borel neasurable sets with positive distances from the point 0, then Theorem 2 iolds obviously without any change. By choosing for $f_l(x)$ other functions, urther results can be obtained this way. For related results see [5].

IATHEMATICAL INSTITUTE
F THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 17 September 1956)

Bibliography

1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин (Москва—Ленинград, 1949).
2] A. Rényi, On composed Poisson distributions. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), pp. 83—98.
3] A. Prékopa, On abstract Poisson and composed Poisson stochastic set functions *Studia Math.* (under press).
4] L. Jánossy, J. Aczél and A. Rényi, On composed Poisson distributions. I, *Acta Math Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), pp. 209—224.
5] K. Ito, Stochastic processes. I, *Jap. J. Math.*, **18** (1942), pp. 261—301.

О СОВМЕСТНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Прекопа и А. Реньи (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ — последовательность серии независимых случайных величин, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ вещественные и измеримые по Борелю функции таковы, что $f_i(x) f_k(x) = 0$, если $i \neq k$.

Теорема 1a. Предположим, что выполняются следующие условия:

a) Функции $f_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$ принимают лишь целые значения;

b) для всех l $(l = 1, 2, \ldots, r)$ случайные величины

$$f_l(\xi_{n1}), f_l(\xi_{n2}), \ldots, f_l(\xi_{nk_n})$$

бесконечно малы (см. [1], § 20);

c) для всех l $(l = 1, 2, \ldots, r)$ существует предельное распределение последовательности случайных величин

$$\zeta_l^{(n)} = \sum_{k=1}^{k_n} f_l(\xi_{nk}).$$

Из этих условий следует предельная независимость случайных величин $\zeta_l^{(n)}$ ($l=1, 2, \ldots, r$) при $n \to \infty$, т. е. выполнение соотношения (3), где функция $F_l(x)$ дается формулой (2).

Если вместо условия а) требовать выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |\varphi_{lk}^{(n)}(u_l)-1|^2 = 0,$$

где $\varphi_{lk}^{(n)}$ характеристическая функция случайной величины $f_l(\xi_{nk})$, то наше утверждение остается в силе. Это утверждается в теореме 1b.

Теорема 2, доказываемая с помощью упомянутых теорем, утверждает, что если реализации процесса с независимыми приращениями ξ_t, удовлетворяющими условию (15), суть непрерывные слева ступенчатые функции, то числа скачков, попадающих в интервалы без общих точек, находящихся от точки 0 на положительном расстоянии, являются независимыми случайными величинами.

ON TRANSFORMATIONS WITH SEVERAL PARAMETERS AND OPERATIONS IN MULTIDIMENSIONAL SPACES

By

J. ACZÉL (Debrecen) and M. HOSSZÚ (Miskolc)

(Presented by O. VARGA)

L. E. J. BROUWER [1] has proved that an additive parameter can always be introduced in any continuous transformation group with one parameter, or what is the same, that if $x \circ y$ is a continuous group operation defined for real numbers, then there exists a continuous and strictly monotonic function $g(x)$ such that

$$x \circ y = g^{-1}[g(x) + g(y)].$$

This means that every one-dimensional continuous group is isomorphic to the addition group of real numbers (cf. [2]). This result was extended to continuous one-dimensional semi-groups with cancellation law in [3].

On the other hand, it is well known ([4]) that under certain hypotheses of differentiability every transformation group with one additive parameter can be reduced by a transformation of the variable to a translation, i. e. the solution of the functional equation

$$f[f(x, u), v] = f(x, u + v)$$

$[x, f \in (a, b); u, v \in (-\infty, \infty)]$ is

$$f(x, u) = g^{-1}[g(x) + u].$$

J. ACZÉL, L. KALMÁR and J. G. MIKUSINSKI [5] have obtained the same result by supposing instead of differentiability only continuity or strict monotony. The extension to transformation semi-groups, i. e. to the case where the functional equation is satisfied for u, v only on a subinterval of $(-\infty, \infty)$ but both continuity and strict monotony holds, was given in [6]. Similar theorems were proved for n-dimensional $\mathbf{x}$-vectors and one parameter under suitable solvability conditions in [7].

The same results can not be hoped for transformations with more parameters, as e. g. for associative operations in m-dimensional spaces no normal representations similar to that given above are known.

In the § 1 of the present paper we shall treat semi-groups of transformations with m parameters in n-dimensional spaces ($n \geqq m$) by solving the

functional equation

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U \circ V) \tag{1}$$

with a given $U \circ V$ composition law of the parameters under suitable solvability hypotheses for equations of the $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{y}$ type.

In the case of additive parameters that is

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U + V) \tag{2}$$

$[U + V = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} + \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_m + v_m\}]$ we give in § 2 without any restriction concerning the ratio of the dimensions of $\mathbf{x}$ and U the general solution

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{C} \cdot U]$$

where $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ is an arbitrary n-dimensional vector function of $\mathbf{x}$ which has an inverse function $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})$ and $\mathbf{C}$ is an arbitrary matrix of n rows and m columns.

Finally, in § 3 we give conditions necessary and sufficient for the possibility of introducing additive parameters also for transformations with m parameters, i. e. the conditions under which the solution of the functional equation

$$(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W) \tag{3}$$

can be written in the form

$$U \circ V = G^{-1}[G(U) + G(V)].$$

We shall denote throughout the paper scalars with Roman small letters, m-dimensional quantities with Roman capital letters, n-dimensional quantities with small bold-types, quantities of other dimensions with small Greek types and matrices with bold-type capital letters.

§ 1

The transformations $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ depending on the m parameters $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} = U$ which transform the vectors $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ into $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, form a semi-group if

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, W) \tag{1}$$

where $W = U \circ V$ is a function of the $2m$ parameters U, V.

In what follows we suppose that

I) *if* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, V)$ *holds for every* $\mathbf{x}$, *then* $U = V$.

This condition is e. g. always satisfied if unity and inverse elements exist for the operation $U \circ V$.

Under the supposition I) the operation $U \circ V$ is associative:

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}, (U \circ V) \circ W] = \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U \circ V), W] = \mathbf{f}(\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V], W) = \\ = \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V \circ W] = \mathbf{f}[\mathbf{x}, U \circ (V \circ W)]$$

and thus

$$(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W).$$

We prove the

THEOREM 1. *Let* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ *be a transformation with m parameters in the n-dimensional space and* $m \leqq n$. *If* I) *holds and if*

II) *there exists an* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *such that the equation*

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_A, U) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_U)$$

$$\left[\mathbf{x}_A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\} = \begin{pmatrix} A \\ \xi \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\mathbf{x}_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, x_{n+1}, \ldots, x_n\} = \begin{pmatrix} U \\ \xi \end{pmatrix}\right]$$

has a unique solution $\mathbf{x}_U = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, *then the general solution of* (1) *is*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) \odot U] \tag{1. 1}$$

where $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *is an arbitrary function which has an inverse* $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})$ *and*

$$\mathbf{y} \odot U = \begin{pmatrix} Y \\ \eta \end{pmatrix} \odot U = \begin{pmatrix} Y \circ U \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{y}_{Y \circ U}$$

$[Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}, \eta = \{y_{m+1}, \ldots, y_n\}]$.

PROOF. We substitute into (1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$:

$$\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_U), V] = \mathbf{h}(\mathbf{x}_W) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_U \odot V).$$

But by II) every $\mathbf{y}$-vector can be represented in the form $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_U)$ with $\mathbf{x}_U = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ and thus

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, V) = \mathbf{h}[\mathbf{g}(\mathbf{y}) \odot V]$$

where $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ is the inverse function of $\mathbf{g}(\mathbf{y})$. Thus we have proved that every solution of (1) must be of the form (1. 1). Conversely, one sees immediately that (1. 1) satisfies (1) with arbitrary $g(x)$ and this completes the proof of Theorem 1.

REMARKS.

1. If instead of I) the stronger condition

I') $\mathbf{f}(\mathbf{x}_A, U) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_A, V)$ implies $U = V$

or the associativity of $U \circ V$ is supposed, then (1. 1) follows already from II) and from the weaker supposition that (1) is satisfied only for $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$, and this involves already that (1) holds also for every $\mathbf{x}$.

2. In the case $m \geqq n$ a similar result holds[1] under the more restricting condition that there exists a $\gamma = \{c_{n+1}, \ldots, c_m\}$ such that

$$(1.2) \quad U_\gamma \circ V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, c_{n+1}, \ldots, c_m\} \circ \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = W_\gamma = \\ = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, c_{n+1}, \ldots, c_m\}$$

and the equation

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}, U_\gamma) = \mathbf{y}$$

can be solved for $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = \mathbf{u}$.

The general solution has also in this case the form (1.1) but here

$$\mathbf{u} \odot V = [U_\gamma \circ V]_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = \mathbf{w}$$

[cf. (1.2)].

§ 2

We say that the transformations $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ form a semi-group of transformations with additive parameter, if

$$(2) \qquad \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U + V)$$

(here $U \circ V = U + V = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} + \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots \ldots, u_m + v_m\}$). From Theorem 1 we have (cf. Remark 1) for $n \geqq m$ under the supposition II) the general solution

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{g}^{-1}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} U \\ O \end{pmatrix}\right] = \mathbf{g}^{-1}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \cdot U\right] = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{C} \cdot U]$$

where $\begin{pmatrix} U \\ O \end{pmatrix} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0\}$, $\mathbf{I}_m$ is the unity matrix with m rows and m columns, $\mathbf{C}$ is an $n \cdot m$ matrix and $\mathbf{C} \cdot U$ means matrix multiplication.

Also conversely, every

$$(2.1) \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{C} \cdot U]$$

[1] S. Łojasiewicz has proved a theorem (oral communication) which we can reformulate for our purposes in the following form:

If the vectors $U, U \circ V$ and $\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ are elements of the spaces Δ and $\mathbf{X}$, respectively, and the equation $\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U \circ V)$ holds; further if we denote by $\mathbf{x}_\mu$ vectors such that the sets $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \Delta) = \mathbf{X}_\mu$ fill the whole space $\mathbf{X}$: $\bigcup_\mu \mathbf{X}_\mu = \mathbf{X}$, then for every $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_\mu$ there exists a function $\Gamma = \Gamma_\mu(\mathbf{x}) = \Sigma_\mu \circ G(\mathbf{x})$ ($\Gamma, \Sigma_\mu \subset \Delta$, the elements of Σ_μ leave the vectors $\mathbf{x}_\mu$ invariant: $\mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \Sigma_\mu) = \mathbf{x}_\mu$) with which $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{g}_\mu[\Gamma_\mu(\mathbf{x}) \circ U]$ where $\mathbf{x} = \mathbf{g}_\mu(\Gamma)$ is the inverse function of $\Gamma = \Gamma_\mu(\mathbf{x})$ and conversely $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{g}_\mu[\Gamma_\mu(\mathbf{x}) \circ U]$ evidently satisfies $\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U \circ V)$ always.

(The proof is simple: $\mathbf{g}_\mu(\Gamma) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \Gamma)$ $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_\mu$, $\Gamma = \Gamma_\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \Gamma), V] = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \Gamma \circ V)$, $\mathbf{f}[\mathbf{g}_\mu(\Gamma), V] = \mathbf{g}_\mu(\Gamma \circ V)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, V) = \mathbf{g}_\mu[\Gamma_\mu(\mathbf{x}) \circ V]$.)

This is related to Theorem 1 in the special case, where Σ_μ consists only of the unity element 1 of the operation $\circ$ and $\mathbf{x}_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}_\mu(V) = \mathbf{g}\begin{pmatrix} V \\ \mu \end{pmatrix}$, but this result can be applied also for the case $m > n$.

with *arbitrary*[2] $\mathbf{C}$ satisfies the equation (2):

(2. 2)
$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, U), V] = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}\cdot U + \mathbf{C}\cdot V] = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}\cdot(U+V)] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, U+V).$$

Thus we have

THEOREM 2a. *If* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ *is an n-dimensional transformation with m parameters in the n-dimensional space* ($n \geqq m$) *which satisfies* (2) *for the* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ *vectors of an* $(n-m)$*-dimensional hypersurface and for any* U, V *parameter values and if the equation*

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_U) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_A, U) = \mathbf{y}$$

has a unique solution $\mathbf{x}_U = \mathbf{g}(\mathbf{y})$; *then and only then* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ *has the form* (2. 1) *with an arbitrary* $n\cdot m$ *matrix* $\mathbf{C}$ *which can be completed (or truncated) to a regular* $n\cdot n$ *(resp.* $m\cdot m$*) matrix and* (2) *is satisfied for every* $\mathbf{x}$.

A similar result which secures that the solution of (2) is of the form (2. 1) can be proved also in the case $n \leqq m$:

THEOREM 2b. *If* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ *is a transformation with m parameters in the n-dimensional space* ($n \leqq m$) *which satisfies* (2) *for one* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ *vector and any* $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mu \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \nu \end{pmatrix}$ $(\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\},\ \mu = \{u_{n+1}, \ldots, u_m\})$ *parameters if further*

(i) *the equation*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, U) = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}_0, \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mu \end{pmatrix}\right] = \mathbf{y}$$

has a unique solution $\mathbf{u} = \mathbf{k}\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mu \end{pmatrix}$;

(ii) $\mathbf{k}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mu \end{pmatrix}$ *is a measurable (or bounded or continuous etc.) function of* μ;

then and only then $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U)$ *has the form* (2. 1) *(with arbitrary* $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_\square\ \mathbf{A})$ *for which the* $n\cdot n$ *matrix* $\mathbf{C}_\square$ *is regular) and* (2) *is satisfied for every* $\mathbf{x}$.

[2] The following consideration shows that it is equvialent whether $\mathbf{C}$ is of the form $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ 0 \end{pmatrix}$ or it is any arbitrary $n\cdot m$ matrix which can be completed to a regular $\mathbf{C}_\square = (\mathbf{C}\,\mathbf{D})$ $n\cdot n$ matrix (or, what is the same, from which a regular $m\cdot m$ matrix can be separated):

$$\mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}\cdot U] = \mathbf{g}^{-1}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + (\mathbf{C}\,\mathbf{D})\cdot\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathbf{g}^{-1}\left(\mathbf{C}_\square\cdot\left[\mathbf{C}_\square^{-1}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right) =$$
$$= \overline{\mathbf{g}}^{-1}\left[\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}\right], \quad \left[\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_\square^{-1}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x})\right].$$

PROOF. (2) gives for $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{f}\left[\mathbf{x}_0,\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mu\end{pmatrix}\right],\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \nu\end{pmatrix}\right)=\mathbf{f}\left[\mathbf{x}_0,\begin{pmatrix}\mathbf{u}+\mathbf{v}\\ \mu+\nu\end{pmatrix}\right]. \tag{2. 3}$$

We choose $\mu=-\nu$:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{f}\left[\mathbf{x}_0,\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ -\nu\end{pmatrix}\right],\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \nu\end{pmatrix}\right)=\mathbf{f}\left[\mathbf{x}_0,\begin{pmatrix}\mathbf{u}+\mathbf{v}\\ 0\end{pmatrix}\right].$$

By designing

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}\left[\mathbf{x}_0,\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ -\nu\end{pmatrix}\right],\quad \mathbf{u}=\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ -\nu\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{w})=\mathbf{f}\left[\mathbf{x}_0,\begin{pmatrix}\mathbf{w}\\ 0\end{pmatrix}\right]$$

we have

$$\mathbf{f}\left[\mathbf{y},\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \nu\end{pmatrix}\right]=\mathbf{h}\left[\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ -\nu\end{pmatrix}+\mathbf{v}\right]. \tag{2. 4}$$

By substituting this formula and $\mu=0$ into (2. 3) we get

$$\mathbf{h}\left[\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{h}\left[\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix}+\mathbf{u}\right]\\ -\nu\end{pmatrix}+\mathbf{v}\right]=\mathbf{h}\left[\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ -\nu\end{pmatrix}+\mathbf{u}+\mathbf{v}\right].$$

We take (i) into account and introduce the notations

$$\mathbf{y}=\mathbf{h}\left[\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix}+\mathbf{u}\right],$$

$$\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix}+\mathbf{u}=\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})=\mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ -\nu\end{pmatrix}-\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix}=\mathbf{l}(\nu),$$

then we have

$$\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ -\nu\end{pmatrix}=\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ -\nu\end{pmatrix}+\mathbf{g}(\mathbf{y})-\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix}=\mathbf{g}(\mathbf{y})+\mathbf{l}(\nu)$$

and (2. 4) becomes

$$\mathbf{f}\left[\mathbf{y},\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \nu\end{pmatrix}\right]=\mathbf{h}[\mathbf{g}(\mathbf{y})+\mathbf{v}+\mathbf{l}(\nu)]. \tag{2. 5}$$

We substitute this again into (2. 3):

$$\mathbf{h}[\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{u}+\mathbf{l}(\mu)+\mathbf{v}+\mathbf{l}(\nu)]=\mathbf{h}[\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{l}(\mu+\nu)],$$

i. e.

(2. 6) $$\mathbf{l}(\mu)+\mathbf{l}(\nu)=\mathbf{l}(\mu+\nu).$$

This is a functional equation of Cauchy type for vectors the general solution[3] of which is under the supposition (ii)

$$\mathbf{l}(\nu)=\mathbf{A}\cdot\nu$$

where $\mathbf{A}$ is an arbitrary $n\cdot(m-n)$ matrix.[4]

Putting this into (2. 5) we have the solution

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, U)=\mathbf{f}\left[\mathbf{x}, \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mu\end{pmatrix}\right]=\mathbf{h}[\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{u}+\mathbf{A}\cdot\mu]=$$

$$=\mathbf{g}^{-1}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})+(\mathbf{I}_n\,\mathbf{A})\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mu\end{pmatrix}\right]=\mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{C}\cdot U]$$

which is of the form (2. 1).

On the other hand, (2. 2) shows that

(2. 1) $$\mathbf{f}(\mathbf{x}, U)=\mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{C}\cdot U]$$

with any arbitrary $n\cdot m$-matrix $\mathbf{C}$ satisfies (2) with arbitrary $\mathbf{x}$.

We have yet to examine whether the conditions (i) and (ii) are satisfied. We write $\mathbf{C}=(\mathbf{C}_\square\,\mathbf{A})$ where $\mathbf{C}_\square$ is an $n\cdot n$-matrix. Then (i) means that the equation

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{C}\cdot U=\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)+(\mathbf{C}_\square\,\mathbf{A})\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mu\end{pmatrix}=\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{C}_\square\cdot\mathbf{u}+\mathbf{A}\cdot\mu=\mathbf{g}(\mathbf{y})$$

[3] The equation (2.6) means $(r=m-n, \mu=\{u_1,\dots, u_r\},\ \nu=\{v_1,\dots, v_r\})$:

$$l_i(u_1+v_1, u_2+v_2,\dots, u_r+v_r=l_i(u_1, u_2,\dots, u_r)+l_i(v_1, v_2,\dots, v_r)$$
$$(i=1, 2, \dots, n).$$

For $u_2=\dots=u_r=v_2=\dots=v_r=0$ this gives

$$l_i(u_1, 0, \dots, 0)=a_{i1}u_1$$

and similarly

$$l_i(0, u_2, 0, \dots, 0)=a_{i2}u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_i(0, \dots, u_r)=a_{ir}u_r.$$

For $u_2=u_3=\dots=u_r=v_1=v_3=\dots=v_r=0$ we have

$$l_i(u_1, v_2, 0, \dots, 0)=a_{i1}u_1+a_{i2}v_2$$

etc., finally,

$$l_i(v_1, v_2, \dots, v_r)=a_{i1}v_1+a_{i2}v_2+\dots+a_{ir}v_r \quad (i=1, 2, \dots, n),$$
$$\mathbf{l}(\nu)=\mathbf{A}\cdot\nu.$$

[4] One sees that not only $\mathbf{l}(\nu)=\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ -v\end{pmatrix}-\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ 0\end{pmatrix}$ can be expressed by $\mathbf{k}$, but also $\mathbf{g}(\mathbf{y})=\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ 0\end{pmatrix}$.

has a unique solution $\mathbf{u}$, i. e. $\mathbf{C}_{\urcorner}$ is regular. In this case

$$\mathbf{u}=\mathbf{C}_{\sqsubset}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{y})-\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)-\mathbf{A}\cdot\mu]=\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{y}\\ \mu\end{pmatrix}$$

and

$$\mathbf{k}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mu\end{pmatrix}=\mathbf{C}_{\lrcorner}^{-1}[\mathbf{A}\cdot(-\mu)].$$

This function satisfies (ii) without any further restriction. Hence Theorem 2b is proved.

REMARK. All transformations of the form (2. 5) with discontinuous (non-measurable) $\mathbf{l}(\nu)$ satisfying (2. 6) are also solutions of (2) and this shows that the condition (ii) can not be suppressed.[5]

§ 3

The fact that the equation (2) has the simple solution (2. 1) raises the question under which conditions additive parameters can be introduced in transformation semi-groups (1), i. e. under which condition

$$U\circ V=G^{-1}[G(U)+G(V)] \tag{3. 1}$$

follows form the associativity of $U\circ V$ proved at the beginning of § 1.

As mentioned in the introduction, for one parameter these conditions are continuity and the cancellation law.

The example of movements in the plane shows already that no similarly simple result can be awaited in the general case. (Remark e. g. that (3. 1) is commutative.)

Our first condition will be

1. *$U\circ V$ is a continuous and abelian group operation for which the equation*

$$U\circ U=V$$

has a solution $U=V^{\frac{1}{2}}$.

[5] J. G. MIKUSINSKI has conjectured (oral communication) that theorems similar to 2a, and 2b hold if the n and m-dimensional spaces are replaced by an arbitrary linear space $\mathbf{A}$ and its linear subspace $\mathbf{B}$ (in the case 2a with $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$, $U\in\mathbf{B}$ and in the case 2b with $\mathbf{x}\in\mathbf{B}$, $U\in\mathbf{A}$, in both cases $\xi,\mu\in\mathbf{C}$ where the Cartesian product $\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}$). Our considerations above show that this conjecture is right, one has to put instead of the result (2. 1), of course, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, U)=\mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{l}(U)]$ where $\mathbf{l}(U)$ is a linear operation in the space $\mathbf{B}$ (resp. $\mathbf{A}$) whose values lie in $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$).

This condition yields the possibility of defining powers with arbitrary integer or dyadic exponents:

$$V^{\frac{1}{2^k}} = \left(V^{\frac{1}{2^{k-1}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad V^{\frac{r+1}{2^k}} = V^{\frac{r}{2^k}} \circ V^{\frac{1}{2^k}}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots; r=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

This definition can not lead to contradiction because

$$V^{\frac{2m}{2^k}} = \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{1} \circ \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{2} \circ \ldots \circ \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{2m-1} \circ \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{2m} = \underbrace{V^{\frac{1}{2^{k-1}}}}_{1} \circ \ldots \circ \underbrace{V^{\frac{1}{2^{k-1}}}}_{m} = V^{\frac{m}{2^{k-1}}}.$$

The second condition is that

2. *the limit* $\lim\limits_{a_n \to a} V^{a_n}$ *exists for every sequence of dyadic* a_n *tending to* a.

This defines the power V^a for every real exponent which is continuous in a and satisfies the equation

$$V^{a+b} = V^a \circ V^b. \tag{3. 2}$$

The continuity follows immediately from 2, (3. 2) is valid for dyadic exponents:

$$V^a \circ V^b = V^{\frac{r_1}{2^k}} \circ V^{\frac{r_2}{2^k}} = \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{1} \circ \ldots \circ \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{r_1} \circ \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{1} \circ \ldots \circ \underbrace{V^{\frac{1}{2^k}}}_{r_2} = V^{\frac{r_1+r_2}{2^k}} = V^{a+b}$$

and by the continuity also for every real exponent.

The third condition is

3. *there exists a system* $V_1, V_2, \ldots, V_m$, *"a basis with respect to the operation* $U \circ V$*" such that the power-products*

$$V_1^{a_1} \circ V_2^{a_2} \circ \ldots \circ V_m^{a_m} = \prod_{i=1}^{m}{}_{\circ} V_i^{a_i}$$

give a one-fold covering of the m-dimensional space.

These preparations are enough to state the[6]

THEOREM 3. *If the conditions* 1, 2, 3 *are fulfilled, then and only then*

$$U \circ V = G^{-1}[G(U) + G(V)] \tag{3. 1}$$

where $G(U)$ *is a topological mapping of the m-dimensional space on itself with* $G(E) = 0$ *(E is the unity element of the operation* $U \circ V$*).*

[6] Theorem 3 shows at the same time that the conditions 1, 2, 3 are necessary and sufficient for the existence of a topological mapping $U = H(X)$ satisfying the vector-functional equation $H(X + Y) = O[H(X), H(Y)]$, i. e. these hypotheses give the solvability conditions of this equation.

PROOF. The necessity of the conditions is evident: If (3. 1) holds, then $U \circ V$ is continuous, commutative, associative, unity and inverse elements and the solution of the equation

$$U \circ U = V, \quad 2G(U) = G(V)$$

exist. The sequences

$$V^{a_n} = G^{-1}[a_n G(V)]$$

$a_n \to a$ have a unique limit and if we choose $V_1, V_2, \ldots, V_m$ so that $G(V_1)$, $G(V_2), \ldots, G(V_m)$ form a basis in the ordinary sense, then the products

$$\prod_{i=1}^{m}{}^{\circ} V_i^{a_i} = G^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i G(V_i)\right]$$

really give a one-fold covering of the m-dimensional space.

We prove the sufficiency by constructing the inverse function $G^{-1}(T) = H(T)$ of $G(U)$:

$$H(T) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ} V_i^{t_i} \tag{3. 3}$$

where V_i is the fundamental system the existence of which was supposed in 3 and $t_1, t_2, \ldots, t_m$ are the components of T:

$$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}.$$

We have to verify the equation

$$H(S) \circ H(T) = H(S+T)$$

equivalent to (3. 1) if we introduce the notations $U = H(S)$, $V = H(T)$. But taking (3. 3), 1 and (3. 2) into account we get

$$H(S) \circ H(T) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ} V_i^{s_i} \circ \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ} V_i^{t_i} = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ} (V_i^{s_i} \circ V_i^{t_i}) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ} V_i^{s_i+t_i} = H(S+T).$$

The restriction $G(E) = 0$ is evident by (3. 1) and this completes the proof of Theorem 3.

REMARKS.

1. The condition 2 implies, of course, that $\lim V^{a_n}$ is the same for every dyadic sequence a_n tending to a.

2. If the product

$$H(T) = \prod_{i=1}^{m}{}^{\circ} V_i^{t_i}$$

in 3 covers only an m-dimensional domain D containing E for T-values of the domain D' containing O and convex with respect to this point ([8]) and also the conditions 1, 2 are postulated in these domains D, D', then Theorem 3 remains valid in D, which will be mapped by $G(U)$ on D'. (D' is supposed to be convex with respect to the point O in its interior in order that for any $G(U) \in D'$ also $\frac{1}{2}\ G(U) \in D'$.)

3. Theorems 2a, 2b and 3 imply that if the conditions stated in these theorems and I) are satisfied, then the general solution of (1) is

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{C} \cdot G(U)].$$

(Received 27 June 1954)

Bibliography

[1] L. E. J. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, *Math. Annalen*, **67** (1909), pp. 246—267.

[2] B. L. van der Waerden, *Über die Theorie der kontinuierlichen Gruppen* (Göttingen, 1924), esp. pp. 90—96.

[3] J. Aczél, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulettin de la Soc. Math. de France*, **76** (1949), pp. 59—64.

[4] G. Vrânceanu, *Leçons de géométrie différentielle. I* (Bucarest, 1947), p. 77.

[5] J. Aczél, L. Kalmár et J. G. Mikusinski, Sur l'équation de translation, *Studia Mathematica*, **12** (1951), pp. 112—116.

[6] J. Aczél, Über einparametrige Transformationen, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1950), pp. 243—247.

[7] J. Aczél, Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogen n-dimensionalen einparametrigen "Translation", der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und des stationären und nicht-stationären Bewegungsintegrals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 131—141.

[8] V. Sós, On curves and surfaces which are convex with respect to a point or direction, *Comptes Rendus du premier Congrès des Mathématiciens Hongrois* (Budapest, 1952), pp. 651—652.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПАРАМЕТРОВ, И ДЕЙСТВИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Я. Ацел (Дебрецен) и М. Хоссу (Мишкольц)

(Резюме)

В § 1, решая функциональное уравнение (1), дается, при условии II), нормальная форма всех n-мерных, зависящих от m параметров преодразований ($m \leq n$), образующих полугруппу. § 2, не ограничивая размерность, дает нормальную форму преобразований, зависящих от нескольких аддитивных параметров и образующих полугруппу, при аналогичных условиях разрешимости и условии измеримости (ii), решая уравнение (2). § 3 изучает вопрос вводимости аддитивных параметров, давая необходимое и достаточное условие топологической изоморфности векторного пространства, замкнутого относительно некоторого многомерного ассоциативного действия, т. е. относительно решения функционального уравнения (3), с группой сложения векторов.

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER GEOMETRISCHEN OBJEKTE. I—II

I. ELEMENTARER BEWEIS DER NICHT-EXISTENZ VON REIN DIFFERENTIELLEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN HÖHERER KLASSE ALS DER DRITTEN MIT EINER KOMPONENTE IM EINDIMENSIONALEN RAUM

II. ELEMENTARE BESTIMMUNG ALLER REIN DIFFERENTIELLEN GEOMETRISCHEN OBJEKTE ERSTER, ZWEITER UND DRITTER KLASSE MIT EINER KOMPONENTE IM EINDIMENSIONALEN RAUM

Von

J. ACZÉL (Debrecen)

(*Vorgelegt von* G. Hajós)

§ 0. 1. Einleitung

Betrefflich der Definition der geometrischen Objekte überhaupt verweisen wir den Leser auf die Literatur ([9], [10], [13], [14], [17], [20]).

Ein geometrisches Objekt n-ter Klasse mit einer Komponente x im eindimensionalen Raum ist eine im Punkte Ξ dieses Raumes definierte Zahl, die noch von der Wahl des Koordinatensystems (das hier aus einer einzigen Koordinate besteht) abhängt und bei einer Transformation der Koordinaten $\bar{\xi}=\varphi(\xi)$ $(\varphi'(\xi)\neq 0)$ zwischen zwei *beliebigen* Koordinatensystemen $\xi, \bar{\xi}$ nach der Formel

$$\bar{x}=f[x,\xi,\varphi(\xi),\varphi'(\xi),\ldots,\varphi^{(n)}(\xi)] \qquad \left[\varphi^{(j)}(\xi)=\frac{\partial^j\bar{\xi}}{\partial\xi^j},\ \varphi'(\xi)\neq 0\right]$$

transformiert wird. Figurieren ξ und $\varphi(\xi)$ in der Formel nicht:

$$\bar{x}=f[x,\varphi'(\xi),\varphi''(\xi),\ldots,\varphi^{(n)}(\xi)], \tag{1}$$

so ist das Objekt rein differentiell. Es wird natürlich vorausgesetzt, daß die Durchführung der Transformationen $\bar{\xi}=\varphi(\xi)$, $\bar{\bar{\xi}}=\psi(\bar{\xi})$ $\quad(\varphi',\psi'\neq 0)$ nacheinander dieselbe Wirkung hat, wie die einzige, vereinte Transformation $\bar{\bar{\xi}}=\psi[\varphi(\xi)]$ (die betrachteten Transformationen bilden eine Pseudogruppe, vgl. [4]). — Nicht rein differentielle Objekte können immer auf rein differentielle zurückgeführt werden ([15], [10]).

Die Bestimmung sämtlicher geometrischen Objekte einer gegebenen Komponenten-, Dimensions- und Klassenzahl wurde durch W. W. Wagner ([15], [16], [18]) auf die Theorie der Lieschen Gruppen zurückgeführt. Das von ihm angegebene Programm wurde für die im Titel der vorliegenden

Arbeit figurierenden Objekte durch Ju. E. PENSOW ([11], [12]) durchgeführt. — Die Anwendung der Lieschen Theorie bringt aber, wie das S. GOLAB ([5], [7], [8]) bemerkt hat, im wesentlichen die Voraussetzung der Analytizität von f in (1) mit sich. Daß in dieser Theorie diese Bedingung sich nicht beseitigen läßt, wird durch ein Ergebnis von T. WAZEWSKI gezeigt ([19]). Der Satz nämlich, daß es keine Objekte der erwähnten Kategorie von höherer als der dritten Klasse gibt, stützt sich auf den Satz der Lie-Theorie, daß es in einer Veränderlichen keine Lie-Gruppe mit mehr als drei wesentlichen Parametern gibt. Die Beweise dieses Satzes machen von der Analytizität starken Gebrauch, und T. WAZEWSKI hat auch tatsächlich eine Transformationsgruppe der Klasse C_∞ (unendlich oft derivierbar) konstruiert mit einer Variablen und vier wesentlichen Parametern.

S. GOLAB hat in einer Reihe von Arbeiten ([2], [3], [5], [6], [7]) im eindimensionalen Raum sämtliche differentielle Objekte mit einer Komponente von den Klassen 1, 2, 3 bestimmt und dann bewiesen, daß es keine solche Objekte von höherer als der dritten Klasse gibt, und zwar ohne von der Funktion $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in (1) Analytizität vorauszusetzen. Er fordert nur einmalige stetige Derivierbarkeit dieser Funktion.

In der vorliegenden Arbeit werde ich diese Resultate in einer verschärften Form ableiten, indem ich *überhaupt keine Derivierbarkeitsvoraussetzungen* brauchen werde. Wir fordern nur, daß f *stetig* sei, und auch das nicht in allen Veränderlichen, sondern nur in der *ersten* und *letzten*, ferner daß in dem Definitionsbereich bezüglich x keine Zahl x_0 existiere derart, daß $f(x_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von α_n unabhängig ist. Falls, wie man dies in dieser Theorie vorauszusetzen pflegt, zu einem beliebigen x Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so zu finden sind, daß $f(x_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = x$ ist, so (s. [5], [7]) bedeutet diese letzte Bedingung einfach, daß $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von α_n tatsächlich abhängt, d. h. das Objekt von *genau* n-ter Klasse ist. — Es ist merkwürdig, daß die Beweise unter diesen wesentlich schwächeren Bedingungen nicht länger, sondern kürzer sind, als die oben zitierten.

In den §§ 0.2 und 0.3 werden zwei Hilfssätze bezüglich der n-ten Derivierten einer zusammengesetzten Funktion bzw. bezüglich Transformationen mit einem additiven Parameter bewiesen, die auch selbständig von gewissem Interesse sein mögen. Diese Sätze sind übrigens bekannt ([1], [7]), werden aber hier der Vollständigkeit halber doch wiederholt bewiesen.

Nachdem im § 1.1 die Nicht-Existenz von eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekten einer Komponente von höherer als der dritten Klasse unmittelbar aus dem Hilfssatz 2 bewiesen wird, brauchen wir hier den dazu von S. GOLAB verwendeten Satz ([7], S. 12) nicht. Wir werden im § 1.2 diesen Satz, der die allgemeinste Gestalt von f für die Untergruppe

mit $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ angibt, unter unseren schwächeren Bedingungen doch beweisen, da uns dies im zweiten Teil nützlich sein wird.

In den §§ 2.1 bzw. 2.2 bzw. 2.3 bestimmen wir endlich unter diesen Stetigkeits- und Nicht-Konstanz-Bedingungen die allgemeinsten rein differentiellen geometrischen Objekte (1 Komponente, 1 Dimension) der Klassen 1 bzw. 2 bzw. 3.

Wenn auch in der vorliegenden Arbeit gewisse, manchmal sogar wesentliche Verkürzungen und Verminderungen der Bedingungen im Vergleich zu S. Gołąb's Arbeiten ([2], [3], [5], [6], [7]) erreicht wurden, stammen die Grundgedanken unseres Beweises doch eben von diesen Arbeiten und der Verf. ist Herrn S. Gołąb auch sehr dankbar, daß er seine Aufmerksamkeit auf diese Probleme gelenkt hat.

§ 0.2. Ein Hilfssatz über die n-te Derivierte einer zusammengesetzten Funktion

Wir geben hier ein Lemma von S. Gołąb ([7]) in einer etwas verschärften Form, das sich auf die n-te Derivierte der zusammengesetzten Funktion bezieht. Wir bezeichnen der Kürze halber

$$\chi(\xi) = \psi[\varphi(\xi)],$$

$$\varphi^{(n)}(\xi) = \alpha_n, \quad \psi^{(n)}(\varphi) = \beta_n, \quad \chi^{(n)}(\xi) = g_n = g_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n). \tag{2}$$

Unmittelbares Derivieren zeigt, daß

$$g_1 = \alpha_1\beta_1, \quad g_2 = \alpha_1^2\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \quad g_3 = \alpha_1^3\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + 3\alpha_1\alpha_2\beta_2, \tag{3}$$

$$g_4 = \alpha_1^4\beta_4 + \alpha_4\beta_1 + 6\alpha_1^2\alpha_2\beta_3 + 4\alpha_1\alpha_3\beta_2 + 3\alpha_2^2\beta_2. \tag{4}$$

Im allgemeinen beweisen wir den

Hilfssatz 1. *Es gilt mit den Bezeichnungen* (2) *für jedes* $n \geqq 4$

$$g_n = \alpha_1^n\beta_n + \alpha_n\beta_1 + \binom{n}{2}\alpha_1^{n-2}\alpha_2\beta_{n-1} + n\alpha_1\alpha_{n-1}\beta_2 + \bar{g}_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \tag{5}$$

mit

$$\bar{g}_n = \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 + \ldots + \alpha_{n-2} h_{n-2} = \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \ldots + \beta_{n-2} k_{n-2}, \tag{6}$$

wo h_j und k_j Polynome von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}$ bzw. von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ sind.

Beweis. Wie die Formel (4) zeigt, gilt die Behauptung für $n = 4$ ($\bar{g}_4 = 3\alpha_2^2\beta_2$). Wir vollbringen den Beweis durch Induktion. Vorausgesetzt,

daß für n die Gleichungen (5)—(6) gelten, derivieren wir die Gleichung (5):

$$g_{n+1}=g_n'=\alpha_1^{n+1}\beta_{n+1}+n\alpha_1^{n-1}\alpha_2\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_1+\alpha_1\alpha_n\beta_2+$$

$$+\binom{n}{2}\alpha_1^{n-1}\alpha_2\beta_n+\binom{n}{2}\alpha_1^{n-2}\alpha_3\beta_{n-1}+\binom{n}{2}(n-2)\alpha_1^{n-3}\alpha_2^2\beta_{n-1}+$$

$$+n\alpha_1^2\alpha_{n-1}\beta_3+n\alpha_1\alpha_n\beta_2+n\alpha_2\alpha_{n-1}\beta_2+\bar{g}_n'=$$

$$=\alpha_1^{n+1}\beta_{n+1}+\alpha_{n+1}\beta_1+\binom{n+1}{2}\alpha_1^{n-1}\alpha_2\beta_n+(n+1)\alpha_1\alpha_n\beta_2+\bar{g}_{n+1},$$

wo [(6)]

$$\bar{g}_{n+1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1})=\alpha_2\left[\binom{n}{2}(n-2)\alpha_1^{n-3}\alpha_2\beta_{n-1}+n\alpha_{n-1}\beta_2\right]+$$

$$+\alpha_3\binom{n}{2}\alpha_1^{n-2}\beta_{n-1}+\alpha_{n-1}n\alpha_1^2\beta_3+\alpha_2h_2'+\ldots+\alpha_{n-2}h_{n-2}'+\alpha_3h_2+\ldots+\alpha_{n-1}h_{n-2}=$$

$$=\beta_2n\alpha_2\alpha_{n-1}+\beta_3n\alpha_1^2\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\binom{n}{2}[(n-2)\alpha_1^{n-3}\alpha_2^2+\alpha_1^{n-2}\alpha_3]+$$

$$+\beta_2k_2'+\ldots+\beta_{n-2}k_{n-2}'+\beta_3\alpha_1k_2+\ldots+\beta_{n-1}\alpha_1k_{n-2}$$

und dies sind Formeln der Gestalt (5)—(6), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Aus dem Hilfssatz 1 folgen durch Spezialisierung sofort die folgenden

KOROLLARIEN. 1. *Falls (für ein* ξ_0*)* $\alpha_2=\alpha_3=\ldots\alpha_{n-2}=0$ *oder* $\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta_{n-2}=0$ *ist, so wird* $\bar{g}_n=0$:

$$\bar{g}_n(\alpha_1,0,\ldots,0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-2})=\bar{g}_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-2},\beta_1,0,\ldots,0)=0.$$

2. *Für* $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n-1}=0$ *gilt*

$$g_1=\alpha_1\beta_1,\quad g_2=\alpha_1^2\beta_2,\ldots,g_{n-1}=\alpha_1^{n-1}\beta_{n-1},\quad g_n=\alpha_1^n\beta_n+\alpha_n\beta_1.$$

3. *Für* $\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta_{n-1}=0$ *gilt*

$$g_1=\alpha_1\beta_1,\quad g_2=\alpha_2\beta_1,\ldots,g_{n-1}=\alpha_{n-1}\beta_1,\quad g_n=\alpha_1^n\beta_n+\alpha_n\beta_1.$$

4. *Ist endlich* $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n-1}=\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta_{n-1}=0$, *so wird*

$$g_1=\alpha_1\beta_1,\quad g_2=g_3=\ldots=g_{n-1}=0,\quad g_n=\alpha_1^n\beta_n+\alpha_n\beta_1$$

gelten.

Auch die Korollarien 2—4 stammen von S. GOLAB [7]. Man sieht aus (3), daß diese Korollarien für jedes $n\geqq 2$ (nicht nur für $n\geqq 4$, wie der Hilfssatz 1) gelten. (Für $n=3$ braucht in 1 und für $n=2$ auch in 2, 3, 4 nichts mehr substituiert werden.) Aus 1—4 folgen für $n\geqq 4$ auch:

5. *Für* $\alpha_1=\beta_1=1$, $\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-2}=0$ *gilt*

$$g_1=1, g_2=\beta_2,\ldots,g_{n-2}=\beta_{n-2}, g_{n-1}=\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}, g_n=\alpha_n+\beta_n+n\alpha_{n-1}\beta_2.$$

6. *Für* $\alpha_1=\beta_1=1, \beta_2=\ldots=\beta_{n-2}=0$ *gilt*

$$g_1=1, g_2=\alpha_2, \ldots, g_{n-2}=\alpha_{n-2}, g_{n-1}=\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}, g_n=\alpha_n+\beta_n+\binom{n}{2}\alpha_2\beta_{n-1}.$$

§ 0.3. Ein Hilfssatz über Transformationsscharen mit einem additiven Parameter [1]

Im folgenden setzen wir voraus, daß $x \in (a, b)$, $u \in (-\infty, \infty)$, $g(x,u) \in (a, b)$ (a, b sind endlich oder unendlich). Wir beweisen den

HILFSSATZ 2. *Ist für ein* $x=x_0 \in (a, b)$

$$g[g(x, u), v]=g(x, u+v) \tag{7}$$

erfüllt, und ist $g(x, u)$ *in* x *(für jedes* u*) und* $g(x_0, u)$ *in* u *stetig und* $g(x, u)$ *für kein* $x \in (a, b)$ *konstant in* u*, so gibt es eine stetige und streng monotone Funktion* $\omega(x)$*, die* (a, b) *in* $(-\infty, \infty)$ *transformiert, und deren Inverse mit* $\Omega(u)$ *bezeichnet werden soll, derart, daß*

$$g(x, u)=\Omega[\omega(x)+u] \tag{8}$$

ist und (7) *für jedes* x *gültig ist. Insbesondere gilt*

$$g(x, 0)=x.$$

BEWEIS. Wir definieren

$$\Omega(u)=g(x_0, u). \tag{9}$$

Aus (7) wird so mit $x=x_0$:

$$g[\Omega(u), v]=\Omega(u+v). \tag{10}$$

Die Funktion Ω ist laut unserer Voraussetzungen stetig und nicht konstant. Wir beweisen, daß sie streng monoton ist. Wäre nämlich

$$\Omega(u_1)=\Omega(u_2) \qquad \text{für} \qquad u_1<u_2,$$

dann folgt aus (10)

$$\Omega[u+(u_2-u_1)]=g[\Omega(u_2), u-u_1]=g[\Omega(u_1), u-u_1]=\Omega(u),$$

also ist $\Omega(u)$ periodisch mit der Periode u_2-u_1. Aus $\Omega(u_1)=\Omega(u_2)$ folgt aber wegen der Stetigkeit, daß es für jedes ε ein Zahlenpaar v_1, v_2 mit $u_1<v_1<v_2<u_2$, $\quad v_2-v_1<\varepsilon$ gibt, wofür $\Omega(v_1)=\Omega(v_2)$ gilt. Also hat die Funktion $\Omega(u)$ beliebig kleine Perioden und ist deshalb eine Konstante in Widerspruch zu unseren Bedingungen. $\Omega(u)$ muß also streng monoton sein.

Wir beweisen ferner, daß

$$\lim_{u \to -\infty} \Omega(u)=a, \qquad \lim_{u \to \infty} \Omega(u)=b$$

ist. Wäre nämlich z. B. $\lim_{u\to\infty}\Omega(u)=b'<b$, so würde aus (10) und der Stetigkeit von $g(x, v)$ in x

$$g(b', v)\equiv b'$$

folgen, im Gegensatz dazu, daß $g(x, v)$ bei keinem x konstant bleiben darf, während sich v ändert. Also ist $\lim_{u\to\infty}\Omega(u)=b$ (und b gehört nicht mehr zum Definitionsbereich (a, b) bezüglich x, welcher offen ist). Ähnlich gilt auch $\lim_{u\to-\infty}\Omega(u)=a$.

Zusammenfassend: $\Omega(u)$ ist stetig, streng monoton und bildet $(-\infty, \infty)$ in (a, b) ab.

Also gibt es für jedes $x\in(a, b)$ genau ein u derart, daß $x=\Omega(u)$.

Bezeichnen wir die inverse Funktion von $x=\Omega(u)$ mit $u=\omega(x)$, so wird aus (10)

$$g(x, v)=\Omega[\omega(x)+v],$$

d. h. (8). Umgekehrt folgt aus (8)

$$g[g(x, u), v]=\Omega\{\omega[g(x, u)]+v\}=\Omega[\omega(x)+u+v]=g(x, u+v)$$

für jedes x. — (8) ergibt auch

$$g(x, 0)=\Omega[\omega(x)]=x.$$

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

I

§ 1. 1. Nicht-Existenz von Objekten höherer Klasse als der dritten

Man beweist leicht (vgl. [5]), daß das Definitionsgebiet der Funktion (1) bezüglich x für $n\geqq 2$ sinngemäß nur ein Intervall sein kann. $\varphi'\neq 0, \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}$ nehmen beliebige reelle Werte an. Es gilt der

Satz 1. *Es sei* $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $[x\in(a, b), \alpha_i\in(-\infty, \infty), \alpha_1\neq 0, f\in(a, b)]$ *stetig in* x *und* α_n *und es gebe kein* $x\in(a, b)$ *für das bei jeder Wahl von* $\alpha_1(\neq 0), \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *die Funktion* $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *von* α_n *unabhängig wäre. Es sei ferner die (aus* (1)—(2) *folgende) Gleichung*

$$f[f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]=f(x, g_1, g_2, \ldots, g_n) \tag{11}$$

erfüllt (Zusammensetzung von zwei Transformationen). Unter diesen Bedingungen muß $n\leqq 3$ *sein.*

Es gibt also kein rein differentielles geometrisches Objekt mit einer Komponente von höherer Klasse als der dritten im eindimensionalen Raum.

BEWEIS. Wir setzen in (11) $\alpha_1=\beta_1=1, \alpha_2=\ldots=\alpha_{n-1}=\beta_2=\ldots=\beta_{n-1}=0$ ein. Aus dem Korollar 4 des § 0.2 folgt mit der Bezeichnung.

(12) $$g(x,u)=f(x,1,0,\ldots,0,u)$$

das Bestehen von

(7) $$g[g(x,u),v]=g(x,u+v).$$

Die Bedingungen des Hilfssatzes 2 sind hier erfüllt: $g(x,u)$ ist stetig in x und in u und wäre für ein $x=x_0$ $g(x_0,u)=y_0$ konstant, so würde bei $u=-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ für beliebige $\alpha_1\neq 0, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ aus den Gleichungen (11), (12) und dem Korollar 2 (§ 0.2) folgen, daß

$$f(y_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)=f[f(x_0,1,0,\ldots,0,u),\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n]=$$
$$=f(x_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n+u\alpha_1)=f(x_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},0)$$

von α_n unabhängig ist, entgegen unserer Voraussetzung.

Aus dem Hilfssatz 2 folgt also

$$f(x,1,0,\ldots,0,u)=g(x,u)=\Omega[\omega(x)+u]$$

und

(13) $$f(x,1,0,\ldots,0,0)=x.$$

Setzen wir in (11) $\alpha_1=1$ sowie $\beta_1=1$, $\beta_2=\ldots=\beta_{n-1}=0$ bzw. $\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-1}=0$ ein, so erhalten wir mit Bezugnahme auf die Korollarien 3 bzw. 2

(14) $$\Omega\{\omega[f(x,1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)]+\beta_n\}=f(x,1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n+\beta_n)$$

bzw.

$$f\{\Omega[\omega(x)+\alpha_n],\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}=f(x,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1},\alpha_n\beta_1+\beta_n).$$

Wir setzen in diese letzte Gleichung

$$\alpha_n=-\frac{\beta_n}{\beta_1},\quad y=\Omega[\omega(x)+\alpha_n],\quad x=\Omega[\omega(y)-\alpha_n]=\Omega\left[\omega(y)+\frac{\beta_n}{\beta_1}\right],$$

(15) $$f[\Omega(u),\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1},0]=F(u,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1})$$

und erhalten

$$f(y,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1},\beta_n)=F\left[\omega(y)+\frac{\beta_n}{\beta_1},\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1}\right],$$

d. h.

(16) $$f(x,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)=F\left[\omega(x)+\frac{\alpha_n}{\alpha_1},\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}\right].$$

Dadurch erhalten wir mit der Bezeichnung

(17) $$\omega[F(u,1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})]=G(u,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})$$

aus (14) ($\alpha_1 = 1$)

$$G[\omega(x)+\alpha_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}]+\beta_n = G[\omega(x)+\alpha_n+\beta_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$$

oder mit $\omega(x)+\alpha_n = 0, \beta_n = u$

$$G(u, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = u + G(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = u + P(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Setzen wir dieses Resultat durch (17) in (16) mit $\alpha_1 = 1$ ein, so haben wir

$$f(x, 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \Omega[\omega(x)+\alpha_n+P(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})].$$

Dies soll wieder in (11) eingesetzt werden mit $\alpha_1 = \beta_1 = 1, g_1 = 1$, $g_n = g_n(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Von hier an setzen wir

$$n \geqq 4$$

voraus und wenden den Hilfssatz 1 an:

$$\omega(x)+\alpha_n+P(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})+\beta_n+P(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) = \omega(x)+g_n+P(g_2, \ldots, g_{n-1}),$$

$$P(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})+P(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) = \binom{n}{2}\alpha_2\beta_{n-1}+n\alpha_{n-1}\beta_2+\bar{g}_n+P(g_2, \ldots, g_{n-1}).$$

Substituieren wir $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-2} = 0$ ($\alpha_{n-1} \neq 0, \beta_2 \neq 0$) bzw. $\beta_2 = \ldots = \beta_{n-2} = 0$ ($\alpha_2 \neq 0, \beta_{n-1} \neq 0$), so wird laut des Korollars 1 (§ 0.2) in beiden Fällen $\bar{g}_n = 0$ und im Einzelnen erhalten wir, falls noch die Korollarien 5 bzw. 6 verwendet werden:

$$P(0, \ldots, 0, \alpha_{n-1})+P(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) = n\alpha_{n-1}\beta_2+P(\beta_2, \ldots, \beta_{n-2}, \alpha_{n-1}+\beta_{n-1})$$

bzw.

$$P(0, \ldots, 0, \beta_{n-1})+P(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \binom{n}{2}\beta_{n-1}\alpha_2+P(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}+\beta_{n-1}).$$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen zeigt sofort, daß

$$\binom{n}{2} = n, \qquad n = 3$$

ist im Gegensatz zur Voraussetzung $n \geqq 4$, womit der Satz 1 bewiesen ist. (Vgl. [7].)

§ 1.2. Bestimmung der Objekte n-ter Klasse ($n \geqq 2$) für die Untergruppe $\bar{\xi} = \varphi(\xi)$, $\varphi'(\xi_0) \neq 0$, $\varphi''(\xi_0) = \varphi'''(\xi_0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(\xi_0) = 0$ von Koordinatentransformationen

Wir beweisen den

Satz 2. *Alle unter die Bedingungen des Satzes 1 (mit $i = 1, n$) fallenden spezialisierten ($\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0, \alpha_1 \neq 0$) Funktionen*

$$f(x, \alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_n) \qquad (n \geqq 2)$$

lassen sich in die Gestalt

(18) $$f(x, \alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_n) = \Psi\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\alpha_1^n}\right]$$

schreiben, wo $\psi(x)$ *stetig und streng monoton ist mit der Inversen* Ψ. — *Also sind das alle rein differentiellen geometrischen Objekte n-ter Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Raum für die im Titel dieses § figurierende Untergruppe von Koordinatentransformationen.*

Beweis. Wir setzen in die Formel (16) des vorigen §

$$\alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0, \quad F(u, \alpha_1, 0, \ldots, 0) = \Phi(u, \alpha_1),$$

wo wegen (13) und (15)

(19) $$\Phi(u, 1) = f[\Omega(u), 1, 0, \ldots, 0] = \Omega(u)$$

ist, und erhalten

(20) $$f(x, \alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_n) = \Phi\left[\omega(x) + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \alpha_1\right].$$

Substituieren wir dies jetzt in (11) mit $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-1} = 0$, so folgt aus dem Korollar 4 (§ 0.2)

$$\Phi\left\{\omega\left(\Phi\left[\omega(x) + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \alpha_1\right]\right) + \frac{\beta_n}{\beta_1}, \beta_1\right\} = \Phi\left[\omega(x) + \frac{\alpha_n\beta_1 + \alpha_1^n\beta_n}{\alpha_1\beta_1}, \alpha_1\beta_1\right],$$

oder mit den Bezeichnungen $\omega(x) + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} = t$, $\alpha_1 = v$, $\beta_1 = w$, $\frac{\beta_n}{\beta_1} = z$ und

(21) $$\omega[\Phi(u, v)] = H(u, v)$$

(wo wegen (19)

(22) $$H(u, 1) = u$$

ist)

(23) $$H[H(t, v) + z, w] = H(t + z v^{n-1}, vw).$$

Es sei hier zuerst $t = 0$, $w = 1$, $z v^{n-1} = u$, $z = u v^{1-n}$ gewählt:

$$H(0, v) + u v^{1-n} = H(u, v)$$

(wegen (22)), d. h.

(24) $$H(u, v) = u v^{1-n} + h(v).$$

Wir substituieren dies wieder in (23) mit $z = 1$:

$$[t v^{1-n} + h(v) + 1] w^{1-n} + h(w) = (t + v^{n-1}) v^{1-n} w^{1-n} + h(vw),$$
$$h(v) w^{1-n} + h(w) = h(vw).$$

Da die rechte Seite in v, w symmetrisch ist, muß auch die Linke es sein:

$$h(v)w^{1-n}+h(w)=h(w)v^{1-n}+h(v),$$

$$\frac{h(v)}{1-v^{1-n}}=\frac{h(w)}{1-w^{1-n}}=C \text{ (konstant)}.$$

Deshalb ist

$$h(v)=C(1-v^{1-n}),$$

d. h. wegen (24)

$$H(u,v)=uv^{1-n}+C(1-v^{1-n})$$

und aus (21), (20)

$$\Phi(u,v)=\Omega[(u-C)v^{1-n}+C],$$

$$f(x,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_n)=\Omega\{[\omega(x)-C]\alpha_1^{1-n}+\alpha_n\alpha_1^{-n}+C\},$$

was mit der Bezeichnung $\omega(x)-C=\psi(x)=u, \quad x=\Omega(u+C)=\Psi(u)$ eben das gewünschte Resultat (18) ergibt. (Vgl. [7].) — Wir bemerken, daß bei unserem Beweis nirgends $n\geqq 4$ vorausgesetzt wurde, der Satz 2 ist für jedes $n\geqq 2$ gültig.

Andererseits sieht man durch unmittelbares Einsetzen, daß (18) die Gleichung (11) mit $\alpha_2=\dots=\alpha_{n-1}=\beta_2=\dots\beta_{n-1}=0$ auch tatsächlich erfüllt.

II

§ 2. 1. Objekte erster Klasse

Aus (3) und (11) folgt für $n=1$ gleich

(25) $$f[f(x,\alpha_1),\beta_1]=f(x,\alpha_1\beta_1) \qquad (\alpha_1,\beta_1\neq 0).$$

Wäre diese Gleichung für $x\in(a,b)$, $\alpha_1,\beta_1\in(0,\infty)$ vorausgesetzt, so wäre sie mit

(7) $$g[g(x,u),v]=g(x,u+v)$$

äquivalent, wie das die Substitution $\alpha_1=e^u$, $\beta_1=e^v$

$$f(x,\alpha)=f(x,e^u)=g(x,u)$$

sofort zeigt. Ist nun $f(x,\alpha)$ stetig und für kein fixes x konstant, so folgt aus dem Hilfssatz 2 (§ 0.3)

$$g(x,u)=\Omega[\omega(x)+u],$$

(26) $$f(x,\alpha)=\Phi[\varphi(x)\alpha], \qquad f(x,1)=x$$

mit $\varphi(x) = e^{\omega(x)} > 0$ $[x \in (a, b)]$, die mit der Funktion $\bar{\xi} = \varphi(\xi)$ nicht zu verwechseln ist.

In (25) darf aber α_1, β_1 auch negativ sein (aber nicht 0). Da $f(x, u)$ schon bei positiven u das ganze Intervall (a, b) durchläuft, erlauben wir in dem Fall der Gleichung (25), daß der Definitionsbereich bezüglich x aus zwei (evtl. berührenden) Intervallen bestehe. Man sieht leicht ein (vgl. [3]), daß es nicht aus mehr als zwei Komponenten bestehen kann, falls $f(x, \alpha)$ für $\alpha \neq 0$ stetig und $f(x, 1) = x$ bleiben soll, und daß diese nicht ein Intervall und ein Punkt sein können. Den Fall, wo der Definitionsbereich aus einem bzw. zwei Punkten besteht, lassen wir beiseite (diese geben die Skalare bzw. Biskalare als Objekte an, vgl. [3]).

Auch für das zweite Intervall (a_1, b_1) gilt aus dem Hilfssatz 2

$$f(x, e^u) = g(x, u) = \Omega_1[\omega_1(x) + u]$$

und hier setzen wir $\varphi(x) = -e^{\omega_1(x)} < 0$. Deshalb gilt

$$f(x, \alpha) = \Phi[\varphi(x)\alpha] \quad (\alpha > 0), \quad f(x, 1) = x \tag{26}$$

für beide x Intervalle (mit $\varphi(x) \gtrless 0$, je nachdem $x \in (a, b)$ bzw. (a_1, b_1)). — $f(x, \alpha)$ gehört für $\alpha > 0$ wegen der Stetigkeit zu demselben Intervall wie x. — Wir setzen

$$f(x, -\alpha) = h(x, \alpha) \quad (\alpha > 0), \quad h(x, 1) = k(x). \tag{27}$$

Aus (25) (und (26)) folgt mit $\alpha = -1$ bzw. $\beta = -1$ bzw. $\alpha = \beta = -1$

$$h(x, \beta) = f[k(x), \beta] \quad \text{bzw.} \quad h(x, \alpha) = k[f(x, \alpha)] \tag{28}$$

bzw.

$$k[k(x)] = x. \tag{29}$$

Mit (26) ergibt sich

$$h(x, \alpha) = k\{\Phi[\varphi(x)\alpha]\} = \Phi\{\varphi[k(x)]\alpha\},$$

oder mit $x = x_0$, $\varphi(x_0)\alpha = u$, $\dfrac{\varphi[k(x_0)]}{\varphi(x_0)} = D$,

$$k[\Phi(u)] = \Phi[Du],$$

$$k(x) = \Phi[D\varphi(x)]. \tag{30}$$

Wir setzen dies in (29) ein, und bekommen

$$\Phi[D^2\varphi(x)] = x, \quad D^2\varphi(x) = \varphi(x), \quad D = \pm 1,$$

also wegen (30) und (28), (27) entweder

$$f(x, -\alpha) = h(x, \alpha) = \Phi[\varphi(x)\alpha],$$

$$f(x, \alpha) = \Phi[\varphi(x)|\alpha|],$$

d. h.

$$f(x, \alpha_1) = \Psi\left[\frac{\psi(x)}{|\alpha_1|}\right], \tag{31}$$

oder

$$f(x, -\alpha) = h(x, \alpha) = \Phi[-\varphi(x)\alpha],$$
$$f(x, \alpha) = \Phi[\varphi(x)\alpha],$$

d. h.

$$f(x, \alpha_1) = \Psi\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1}\right], \tag{32}$$

mit $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$. (Die zwei Intervalle (a, b), (a_1, b_1) werden im ersten Fall durch $k(x)$ in sich, im zweiten Fall in einander abgebildet.)

Wir haben also den

SATZ 3. *Ist $f(x, a_1)$ für $x \in \{(a_1, b_1), (a, b)\}$, $\alpha_1 \in \{(-\infty, 0), (0, \infty)\}$ stetig und in α_1 nicht konstant, und gilt die Gleichung* (25), *so ist f von einer der Gestalten* (31), (32). — *D. h. die rein differentiellen geometrischen Objekte erster Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Raum außer den Skalaren und Biskalaren sind die (umkehrbaren) Funktionen von Weylschen Dichten* [(31)] *und die von gewöhnlichen Dichten* [(32)]. (Vgl. [3], [2].) *Umgekehrt erfüllen* (31), (32) *immer die Gleichung* (25).

Dies läßt sich auch zu einem Satz über Objekte der Klasse Δ umformen (siehe [3]).

§ 2.2. Objekte zweiter Klasse

Wie schon am Anfang des § 1.1 bemerkt wurde, ist bei unseren Objekten von genau n-ter Klasse ($n \geqq 2$) sinngemäß der Definitionsbereich bezüglich x von $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ immer ein Intervall (a, b) (vgl. [5]). Dies wird also auch in diesem und dem folgenden § vorausgesetzt. Aus dem Satz 2 folgt für $n = 2$ sofort der

SATZ 4. *Unter den Bedingungen des Satzes 1 für $n = 2$ gibt es immer eine stetige streng monotone Funktion $\psi(x)$, mit der sich $f(x, \alpha_1, \alpha_2)$ in die Gestalt*

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2) = \Psi\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right] \qquad (\psi[\Psi(x)] = x)$$

schreiben läßt. — *Also werden die rein differentiellen geometrischen Objekte zweiter Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Raum im wesent-*

lichen wie eine Komponente eines affinen Zusammenhanges transformiert. (Vgl. [5], [11], [12].)

Diese Formel wird manchmal in die Form

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2) = \Phi\left[\frac{\varphi(x)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right] \qquad [\Phi(y) = \Psi(-y)]$$

geschrieben ([5], [11], [12]).

§ 2.3. Objekte dritter Klasse

Aus dem Satz 2 folgt hierfür, daß

$$f(x, \alpha_1, 0, \alpha_3) = \Psi\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right].$$

Andererseits nimmt (16) für $n = 3$ mit

$$\psi(x) = \omega(x) - C, \qquad F(y + C, \alpha_1, \alpha_2) = \Gamma(y, \alpha_1, \alpha_2)$$

die Gestalt

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Gamma\left[\psi(x) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2\right] \tag{33}$$

an.

Substituieren wir diese Formeln in (11) mit $\alpha_2 = 0$ bzw. $\beta_2 = 0$, und benutzen die abkürzende Bezeichnung

$$\psi[\Gamma(y, \alpha_1, \alpha_2)] = G(y, \alpha_1, \alpha_2), \tag{34}$$

so erhalten wir (vgl. die Korollarien 2, 3 in § 0.2)

$$G\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} + \frac{\beta_3}{\beta_1}, \beta_1, \beta_2\right] = G\left[\psi(x) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1^2 \beta_3}{\beta_1}, \alpha_1 \beta_1, \alpha_1^2 \beta_2\right] \tag{35}$$

bzw.

$$\frac{\beta_3}{\beta_1^3} + \frac{1}{\beta_1^2} G\left[\psi(x) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2\right] = G\left[\psi(x) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1^2 \beta_3}{\beta_1}, \alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_1\right]. \tag{36}$$

Setzen wir in beide Gleichungen

$$\psi(x) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0, \quad \frac{\alpha_1^2 \beta_3}{\beta_1} = u$$

und in (35) $\beta_1 = 1, \alpha_1^2 \beta_2 = w, \quad \beta_2 = w \alpha_1^{-2}$ bzw. in (36) $\alpha_2 = \alpha_1^2, \quad \alpha_1 \beta_1 = v_1$, $\alpha_2 \beta_1 = \alpha_1^2 \beta_1 = v_2, \quad \alpha_1 = \frac{v_2}{v_1}, \quad \alpha_2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2, \quad \beta_1 = \frac{v_1^2}{v_2}$, so erhalten wir

$$G(u, \alpha_1, w) = G\left(\frac{u}{\alpha_1^2}, 1, \frac{w}{\alpha_1^2}\right) \tag{37}$$

bzw.

$$G(u, v_1, v_2) = \frac{u}{v_1^2} + \frac{v_2^2}{v_1^4} G\left[0, \frac{v_2}{v_1}, \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\right] \tag{38}$$

und durch Einsetzen von (37) in (38) $\left[\text{mit } w = \alpha_1^2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\right]$

$$G(u, v_1, v_2) = \frac{u}{v_1^2} + \frac{v_2^2}{v_1^4} G(0, 1, 1) = \frac{u}{v_1^2} + c\,\frac{v_2^2}{v_1^4}.$$

(34), (33) gibt dann

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Psi\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1^2} + c\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right] \tag{39}$$

und falls wir dies in (11) z. B. mit $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ $(n = 3)$ einsetzen, so wird, wenn wir auch die Formeln (3) in Betracht ziehen:

$$\frac{1}{\beta_1^2}\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1^2} + c\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right] + c\,\frac{\beta_2^2}{\beta_1^4} = \frac{\psi(x)}{(\alpha_1\beta_1)^2} + c\,\frac{\alpha_1^4\beta_2^2 + 2\alpha_1^2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1^2}{(\alpha_1\beta_1)^4} + \frac{3\alpha_1\alpha_2\beta_2}{(\alpha_1\beta_1)^3},$$

d. h.

$$2c + 3 = 0, \qquad c = -\frac{3}{2},$$

und aus (39) folgt

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Psi\left[\frac{\psi(x)}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right]. \tag{40}$$

Andererseits kann man sich unmittelbar überzeugen, daß (40) die Gleichung (11) für $n = 3$ auch wirklich erfüllt. Wir gelangten also zum

SATZ 5. *Ist* $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $[x \in (a, b); \alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3 \in (-\infty, \infty); f \in (a, b)]$ *stetig in* x *und* α_3, *und gibt es kein* $x \in (a, b)$ *für das bei jeder Wahl von* $\alpha_1 (\neq 0), \alpha_2$ *die Funktion* $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *von* α_3 *unabhängig ist, ist ferner die Gleichung*

$$f[f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3] = f(x, \alpha_1\beta_1, \alpha_1^2\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \alpha_1^3\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + 3\alpha_1\alpha_2\beta_2)$$

erfüllt, so läßt sich $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *immer in die Gestalt* (40) *schreiben.*

Also werden die rein differentiellen geometrischen Objekte dritter Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Raum im wesentlichen wie eine Komponente eines projektiven Zusammenhanges transformiert. (Vgl. [11], [12].)

Für den unseren ähnliche Resultate unter Derivierbarkeits- bzw. Analytizitätsbedingungen vgl. die Aufsätze [3], [5], [7], [11], [12]. Auch bezüglich Folgerungen und Anwendungen verweisen wir den Leser auf diese Arbeiten.

(Eingegangen am 12. März 1955.)

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél, L. Kalmár et J. G. Mikusinski, Sur l'équation de translation, *Studia Math.*, **12** (1951), S. 112—116.

[2] S. Golab, Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte, *Wiadomosci Mat.*, **45** (1938), S. 97—137.

[3] S. Golab, Über die Klassifikation der geometrischen Objekte, *Math. Zeitschrift*, **44** (1938), S. 104—114.

[4] S. Golab, Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationen", *Math. Annalen*, **116** (1939), S. 768—780.

[5] S. Golab, Sur la théorie des objets géométriques. (Les objets différentiels purs de deuxième et de troisième classe), *Annales de la Soc. Pol. de Math.*, **19** (1946), S. 7—35.

[6] S. Golab, Alcuni teoremi della teoria degli ogetti geometrici, *Atti Accad. Naz. d. Lincei. Rendiconti Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **5** (1948), S. 120—122.

[7] S. Golab, Contribution à la théorie des objets géométriques. (Démonstration de la non-existence des objets géométriques spéciaux à une composante de la classe supérieure à la troisième dans un espace à une dimension), *Prace Mat. Fiz.*, **47** (1949), S. 1—15.

[8] S. Golab, Sur les objets géométriques à une composante, *Annales de la Soc. Pol. de Math.*, **23** (1950), S. 79—89.

[9] J. Haantjes and G. Laman, On the definition of geometric objects. I—II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A, **56**; *Indag. Math.*, **15** (1953), S. 208—215, 216—222.

[10] A. Nijenhuis, *Theory of the geometric object, Thesis* (Univ. Amsterdam, 1952).

[11] G. Pensov, Classification of differential geometric objects of the class v with one component, ДАН СССР, **54** (1946), S. 563—566.

[12] Ю. Е. Пензов, О дифференциально-геометрических объектах класса v в X_1, Мат. Сборник, **26** (1950), S. 161—182.

[13] J. A. Schouten and J. Haantjes, On the theory of the geometric object, *Proc. of the London Math. Soc.* (2), **42** (1937), S. 356—376.

[14] J. A. Schouten, *Tensor analysis for physicists* (Oxford, 1951).

[15] V. Wagner, The theory of geometric objects and the theory of finite and infinite continuous groups of transformations, ДАН СССР, **46** (1945), S. 383—386.

[16] В. В. Вагнер, Классификация простых геометрических дифференциальных объектов, ДАН СССР, **69** (1949), S. 293—296.

[17] В. В. Вагнер, Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии (Москва, 1949). Nachtrag zur russischen Übersetzung von O. Veblen and J. H. C. Whitehead, *The foundations of differential geometry* (1932).

[18] В. В. Вагнер, Классификация простых геометрических дифференциальных объектов, Усп. Мат. Наук, **5** (1950), вып. 1, S. 213—214.

[19] T. Wazewski, Exemples des groupes de transformations d'une droite en elle même qui dépendent de quatre paramètres essentiels, *Prace Mat. Fiz.*, **47** (1949), S. 105—116.

[20] A. Wundheiler, Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien. (Intern. Konf. f. tens. Differentialgeometrie u. ihre Anw., Moskau, 1934), *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Moskau*, 4 (1937), S. 366—375.

К ТЕОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ. I—II

I. Элементарное доказательство того, что не существует одномерный, однокомпонентный, чисто дифференциальный геометрический объект класса выше три

II. Элементарное определение всех таких объектов классов 1, 2 и 3

Я. Ацел (Дебрецен)

(Резюме)

При задании общего вида одномерных, однокомпонентных геометрических объектов Я. С. Дубнов и Ю. Е. Пензов предположили аналитичность, между тем как С. Голаб требовал однократную непрерывную дифференцируемость. В настоящей работе тот же результат получается без всяких требований дифференцируемости, только в предположениях слабой непрерывности. И доказательства значительно короче, в особенности доказательство того, что нет одномерных, однокомпонентных геометрических объектов классов выше три.

SUR L'INVERSION DES TRANSFORMATIONS ALÉATOIRES PRESQUE SÛREMENT LINÉAIRES

Par

ANTONÍN ŠPAČEK (Prague)

(*Présenté par* A. Rényi)

Un des résultats très utiles d'analyse fonctionnelle est le théorème suivant de Banach d'inversion des transformations linéaires [1], [3]:

Soit τ *une transformation linéaire d'un espace de Banach* X *en soi* (c'est à dire $\tau(X) \subset X$ mais pas nécessairement $\tau(X) = X$) *et supposons* *que* $\|\tau\| < 1$. *La transformation* σ, *qui fait à chaque* $x \in X$ *correspondre le point* $x - \tau(x) \in X$, *possède une transformation inverse* σ^{-1} *unique et* $\|\sigma^{-1}\| \leqq (1 - \|\tau\|)^{-1}$.

Il est naturel de penser à une extension de ce théorème aux transformations aléatoires. Le but de cette note est de présenter quelques résultats élémentaires dans cette direction. L'un de ces résultats est une simple caractérisation des transformations aléatoires presque sûrement linéaires et l'autre un théorème d'inversion qu'on peut appliquer pour résoudre certains types d'équations fonctionnelles aléatoires. Un exemple typique d'application du théorème d'inversion est l'équation aléatoire de Fredholm qu'on peut trouver dans [5].

Soit $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ une transformation aléatoire d'un espace séparable du type (G) ([1], p. 20) en soi d'après la définition donnée dans [4]. Remarquons que X est complet par définition et désignons par ϱ la métrique dans X et par $\mathfrak{G}$ une base dénombrable ouverte sur X.

Il est évident que *la classe* $\mathfrak{D}$ *de tous les sous-groupes dénombrables de* X *denses par rapport à* X *satisfait aux conditions* (2) *et* (3) *de* [4].

Soit A un sous-groupe de X. On dit que la transformation f de A en X est linéaire sur A, si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour toute paire $x, y \in A$ et s'il existe une constante $c \geqq 0$, appelée constante de Lipschitz, telle que $\varrho(f(x), f(y)) \leqq c\,\varrho(x, y)$ pour tout couple $x, y \in A$. Cette définition diffère un peu de celle de Banach ([1], p. 23).

Soit A un sous-groupe de X. En définissant

$$T(A) = \{f : f \in F, f \text{ est linéaire sur } A\}$$

avec une constante de Lipschitz commune pour tous les $f \in T(A)$, on voit tout de suite que *les conditions* (6), (7) et (8) *de* [4] *sont satisfaites* et la

propriété (5) de [4] résulte immédiatement d'un théorème de prolongement, que nous allons formuler sans démonstration, qui est d'ailleurs évidente.

Etant donné un sous-groupe A de X dense par rapport à X et une transformation linéaire f de A en X, il est possible de la prolonger par linéarité dans X. Ce prolongement est unique et conserve la constante de Lipschitz.

Pour s'assurer que la condition (5) de [4] est satisfaite, il n'est pas nécessaire d'exploiter l'unicité du prolongement.

On dit que la transformation aléatoire $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ est presque sûrement linéaire, si $\bar{\mu}(T(X)) = 1$, $\bar{\mu}$ désignant la mesure extérieure induite par μ.

On déduit facilement du théorème 1 de [4] une simple caractérisation des transformations aléatoires presque sûrement linéaires:

Théorème 1. *Pour qu'une transformation aléatoire $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ d'un espace X séparable du type* (G) *en soi soit presque sûrement linéaire, il faut et il suffit que*

$$\mu\{f : f(x+y) = f(x)+f(y)\} = 1 \text{ pour tout } x, y \in X$$

et qu'il existe une constante $c \geqq 0$ *telle que*

$$\mu\{f : \varrho(f(x), f(y)) \leqq c\,\varrho(x, y)\} = 1 \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Si X est de plus un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$, *il est possible de remplacer la deuxième de ces conditions par*

$$\mu\{f : \|f(x)\| \leqq c\|x\|\} = 1 \text{ pour tout } x \in X.$$

Remarquons que la séparabilité de l'espace X n'est pas une restriction sérieuse du point de vue des applications aux équations aléatoires.

Soit t la transformation de F en soi qui fait à chaque $f \in F$ correspondre l'élément $t(f) \in F$ de façon que $t(f(x)) = x - f(x) \in F$ pour tout $x \in X$.

On voit tout de suite que *la transformation t est biunivoque, mesurable et qu'elle conserve l'ensemble $T(X)$ des transformations linéaires*, c'est à dire

$$\{f : f \in F, f \text{ est linéaire sur } X\} = \{f : f \in F, t(f) \text{ est linéaire sur } X\}.$$

On dit qu'une transformation s de l'ensemble $H \subset F$ en F est presque sûrement mesurable, si $\mu(H) = 1$ et $s^{-1}(E) \in H \cap \mathfrak{F}$ pour tout $E \in \mathfrak{F}$, $H \cap \mathfrak{F}$ désignant la classe de tous les ensembles du type $H \cap E, E \in \mathfrak{F}$ qui est évidemment une σ-algèbre de sous-ensembles de H.

En utilisant ces définitions, nous allons démontrer un théorème particulièrement adapté aux questions de solution de certains types d'équations fonctionnelles aléatoires.

Théorème 2. *Soit $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ une transformation aléatoire d'un espace X de Banach en soi et supposons que les conditions suivantes soient satisfaites:*

a) $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ *est presque sûrement linéaire avec une constante de Lipschitz* $c < 1$;

b) *il existe un ensemble* $M \subset T(X)$ *tel que* $\mu(M) = 1$ *et une classe dénombrable d'entourages* $\mathfrak{U} \subset M \cap \mathfrak{F}$ *sur* M *qui satisfait aux conditions* A, B, C *de* [2] (p. 33);

c) *pour tout* $x_0 \in X$ *la transformation de* M *en* X, *qui fait à chaque* $f \in M$ *correspondre le point* $f(x_0) \in X$, *est continue par rapport à la topologie engendrée par* $\mathfrak{U}$.

Sous ces conditions la transformation S, *qui fait à chaque* $f \in M$ *correspondre la transformation inverse de* $t(f)$ *est presque sûrement mesurable*

Démonstration. Évidemment il suffit de démontrer que

$$s^{-1}(\{f; f \in F, f(x_0) \in G\}) \in M \cap \mathfrak{F},$$

ou d'après l'identité

$$s^{-1}(\{f : f \in F, f(x_0) \in G\}) = \{f : f \in F, s(f(x_0)) \in G\}$$

que

$$\{f : f \in F, s(f(x_0)) \in G\} \in M \cap \mathfrak{F}$$

pour tout $x_0 \in X$, $G \in \mathfrak{G}$. La σ-algèbre des sous-ensembles boreliens de M étant d'après b) contenue dans $M \cap \mathfrak{F}$, il suffit de prouver que la transformation, qui fait à chaque $f \in M$ correspondre le point $s(f(x_0)) \in X$, est continue par rapport à la topologie induite par $\mathfrak{U}$. Il est facile de voir que la condition a) entraîne l'inégalité

$$\|s(f(x_0)) - s(g(x_0))\| \leq \frac{1}{1-c} \|f(s(g(x_0))) - g(s(g(x_0)))$$

pour tout $f, g \in M$, $x_0 \in X$. Le point $x_0 \in X$ étant fixé, on peut faire correspondre, d'après la condition c), à chaque $\varepsilon > 0$ un entourage $V_\varepsilon(g) \in \mathfrak{U}$ de $g \in M$ tel que

$$\|f(s(g(x_0))) - g(s(g(x_0)))\| < \varepsilon(1-c)$$

pour tout $f \in V_\varepsilon(g)$, donc

$$\|s(f(x_0)) - s(g(x_0))\| < \varepsilon$$

pour tout $f \in V_\varepsilon(g)$, c. q. f. d.

L'exemple d'une équation aléatoire de Fredholm, qui est examiné plus en détail dans [5], montre que les conditions a), b), c) du théorème 2 sont des exigences assez naturelles et par conséquent légitimes du point de vue des applications aux équations aléatoires.

(Reçu le 9 août 1955.)

Ouvrages cités

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932).
[2] C. Kuratowski, *Topologie. I* (Warszawa, 1948).
[3] F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Budapest, 1953).
[4] A. Špaček, Regularity properties of random transforms, *Czechoslovak Math. Journal*, 5 (1955), p. 143—151.
[5] A. Špaček, Zufällige Gleichungen, *Czechoslovak Math. Journal*, 5 (1955), p. 462—466.

ИНВЕРСИЯ СЛУЧАЙНЫХ, ПОЧТИ НАВЕРНО ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Шпачек (Прага)

(Резюме)

Статья содержит вероятностное обобщение известной теоремы об инверсии линейного оператора в пространстве Банаха. Первая теорема содержит необнодимые и достаточные условия для того, чтобы случайное отображение пространства типа G или пространства Банаха на себя было почти наверно линейным. Вторая теорема содержит достаточные условия для того, чтобы для почти наверно линейного случайного отображения обыкновенно используемое соответствие инверсного преобразования было почти наверно измеримым.

SUR UNE CARACTÉRISATION DE LA RÉPARTITION NORMALE DE PROBABILITÉS

Par

Á. CSÁSZÁR (Budapest)

(*Présenté par* A. RÉNYI)

1. Il s'agira dans cette note d'une propriété bien connue de la répartition normale de probabilités, ou plutôt de la fonction de répartition correspondante

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du. \tag{1.1}$$

Pour pouvoir formuler cette propriété d'une façon très intuitive, considérons une variable aléatoire dont les valeurs indiquent les valeurs empiriques d'une certaine quantité physicale, fournies par une certaine méthode de mesurage. Supposons que l'erreur commise par cette méthode de mesurage possède une fonction de répartition de la forme (1.1), avec une valeur connue de la dispersion σ. En effectuant un certain nombre d'expériences indépendantes, on obtient des valeurs différentes pour la quantité à mesurer. Si l'on prend une valeur hypothétique comme valeur précise de cette quantité, on peut calculer à l'aide de la fonction de répartition (1.1) la probabilité de ce que les valeurs observées soient situées dans des intervalles de longueurs données autour des valeurs que l'on a observées effectivement. En faisant varier cette valeur hypothétique, la probabilité correspondante variera, elle aussi, et — c'est justement la propriété mentionnée de la répartition normale — elle sera la plus grande lorsque la valeur hypothétique coïncide avec la moyenne arithmétique des valeurs observées.

D'une façon plus précise, désignons par ξ_i ($i=1,\dots,n$) les valeurs observées, par $\bar{\xi}=\frac{1}{n}(\xi_1+\dots+\xi_n)$ leur moyenne arithmétique, par ξ la valeur hypothétique, prise comme valeur précise de la quantité en question, et posons $\xi_i-\bar{\xi}=x_i$, $\bar{\xi}-\xi=a$. On aura alors

$$\prod_{1}^{n}|\Phi(a+x_i+h_i)-\Phi(a+x_i)| \tag{1.2}$$

pour la probabilité de ce que les valeurs observées soient situées dans les intervalles ayant ξ_i et ξ_i+h_i pour extrémités, c'est-à-dire que les erreurs soient situées dans les intervalles ayant $\xi_i-\xi=a+x_i$ et $a+x_i+h_i$ pour

extrémités. Une formulation précise de la propriété dont nous voulons parler est alors la suivante: *les quantités* x_i $(i=1,\dots,n)$ *et* a *étant données de sorte que la condition* $\sum_1^n x_i=0$ *soit remplie, on peut trouver un nombre* $\delta>0$ *tel que, pour des nombres* $0<|h_i|<\delta$ *quelconques, l'expression* (1.2) *ne dépasse pas l'expression analogue*

$$\prod_1^n |\Phi(x_i+h_i)-\Phi(x_i)| \tag{1.3}$$

qui en résulte en substituant 0 *à* a. Pour s'en convaincre, il suffit de poser

$$\Phi(a+x_i+h_i)-\Phi(a+x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(a+x_i)^2}{2\sigma^2}\right)+\varepsilon_i\right)h_i$$

et

$$\Phi(x_i+h_i)-\Phi(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)+\eta_i\right)h_i,$$

où les nombres ε_i et η_i deviennent infiniment petits avec δ, et de constater que pour $a\neq 0$

$$\prod_1^n \exp\left(-\frac{(a+x_i)^2}{2\sigma^2}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n(a+x_i)^2\right)<\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n x_i^2\right)=$$
$$=\prod_1^n \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right),$$

puisque, en faisant usage de l'égalité $\sum_1^n x_i=0$,

$$\sum_1^n (a+x_i)^2=na^2+2a\sum_1^n x_i+\sum_1^n x_i^2=na^2+\sum_1^n x_i^2>\sum_1^n x_i^2.$$

C'est également bien connu depuis Gauss et Laplace qu'en posant des restrictions complémentaires, on peut *caractériser* la répartition normale parmi les répartitions de probabilités par la propriété que nous venons de formuler. Par exemple, il est très facile de démontrer la proposition suivante:

(1.4) *Soit* $\Phi(x)$ *une fonction qui possède une dérivée seconde continue dans l'intervalle* $(-\infty,+\infty)$, *soit* $\Phi'(x)>0$ *et supposons qu'elle jouit de la propriété* (*) *suivante:*

(*) *à des nombres réels* x_i $(i=1,\dots,n;\ n=2,3)$ *quelconques qui remplissent la condition* $\sum_1^n x_i=0$ *et au nombre réel* a *correspond un nombre* $\delta>0$ *tel que*

$$\prod_1^n |\Phi(a+x_i+h_i)-\Phi(a+x_i)|\leq\prod_1^n |\Phi(x_i+h_i)-\Phi(x_i)|$$

toutefois que $0<|h_i|<\delta$.

En ce cas, $\Phi(x)$ est de la forme

(1.5) $$\Phi(x)=A\int_0^x e^{-Bu^2}du+C, \qquad A>0,\ B\geqq 0.$$

En supposant que $\Phi(x)$ est une fonction de répartition, (1.5) *se réduit à la formule* (1.1).

Démonstration. En posant $\Phi'(x)=f(x)$, on déduit de la propriété (*) que

$$\prod_1^n f(a+x_i)\leqq\prod_1^n f(x_i)$$

pour $\sum_1^n x_i=0$, $i=2,3$. Posons $g(x)=\log f(x)$; il vient

$$\sum_1^n g(a+x_i)\leqq\sum_1^n g(x_i)$$

sous les mêmes conditions. Le premier membre ayant donc un maximum pour $a=0$, on a en posant $h(x)=g'(x)$

$$\sum_1^n h(x_i)=0 \quad \text{pour} \quad \sum_1^n x_i=0, \qquad n=2,3.$$

On en conclut pour $n=2$ que la fonction continue $h(x)$ est impaire et pour $n=3$ qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$h(x_1)+h(x_2)=-h(-(x_1+x_2))=h(x_1+x_2).$$

Par conséquent $h(x)=-2Bx$, $g(x)=-Bx^2+\log A$, $f(x)=Ae^{-Bx^2}$ et

$$\Phi(x)=A\int_0^x e^{-Bu^2}du+C,$$

où $A>0$ et $B\geqq 0$ (au cas contraire $\sum_1^n g(a+x_i)$ aurait un minimum pour $a=0$ au lieu d'un maximum). En posant $\Phi(-\infty)=0$ et $\Phi(+\infty)=1$, on aboutit à la formule (1.1).

C'est M. A. Rényi qui a attiré mon attention au problème de généraliser le théorème classique (1.4) en remplaçant les hypothèses qui y figurent par des conditions plus faibles. En examinant la littérature de ce sujet, j'ai trouvé un théorème plus général, datant du commencement du siècle et dû à F. Bernstein [1]:

(1.6) *Supposons que la fonction $\Phi(x)$ est dérivable dans l'intervalle $(-\infty,+\infty)$, que $\Phi'(x)$ reste dans tout intervalle fini au dessus d'une borne*

positive et que $\Phi(x)$ *jouit de la propriété* $(*)$. *En ce cas* $\Phi(x)$ *est de la forme* (1.5).[1]

Dans ce qui suit, nous donnerons une généralisation ultérieure du théorème classique (1.4), en supprimant notamment toute condition de dérivabilité de l'hypothèse et en considérant une fonction monotone non-décroissante quelconque qui jouit de la propriété $(*)$ dans un intervalle quelconque symétrique par rapport à l'origine. En dehors des fonctions du type (1.5), on aura alors comme nouvelles solutions les constantes (c'est-à-dire les fonctions du type (1.5) avec $A=0$) et les fonctions qui sont constantes dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ et dans celui $(0, +\infty)$, mais qui ont un saut au point 0. Entre les fonctions de ce dernier type se trouve la fonction de répartition d'une répartition dégénérée, répartition d'une variable aléatoire qui prend la valeur 0 avec la probabilité égale à l'unité.

Le but de cette note est donc la démonstration du théorème suivant:

(1.7) Théorème. *Soit* $\Phi(x)$ *une fonction monotone non-décroissante dans l'intervalle* $(-r, r)$ $(0 < r \leqq +\infty)$ *qui jouit de la propriété* $(*)$ *suivante:*

$(*)$ *à des nombres réels* x_i $(i = 1, \ldots, n; n = 2, 3)$ *quelconques qui remplissent la condition* $\sum_1^n x_i = 0$ *et au nombre réel* a *correspond un nombre* $\delta > 0$ *tel que*

$$\prod_1^n |\Phi(a + x_i + h_i) - \Phi(a + x_i)| \leqq \prod_1^n |\Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i)|$$

toutefois que $0 < |h_i| < \delta$ *et que les arguments de la fonction* Φ *sont situés dans l'intervalle* $(-r, r)$.

En ce cas $\Phi(x)$ *est ou bien de la forme*

$$\Phi(x) = \begin{cases} A & \text{pour} \quad -r < x < 0, \\ B & \text{pour} \quad 0 < x < r \end{cases} \qquad (A < B), \tag{1.8}$$

ou bien de la forme

$$\Phi(x) = A \int_0^x e^{-Bu^2} du + C \qquad (A \geqq 0, B \geqq 0). \tag{1.9}$$

Dans la démonstration on va faire usage des méthodes dues à F. Bernstein et d'un théorème auxiliaire qui généralise le théorème de W. Sierpiński sur les fonctions convexes mesurables [2] et qui sera démontré dans § 4.

[1] En réalité, F. Bernstein postule que $\Phi'(x)$ reste au dessus d'une borne positive *dans l'intervalle entier* $(-\infty, +\infty)$, condition qui n'est pas même remplie par la fonction (1.1); l'analyse de sa démonstration fournit le théorème (1.6).

Il faut encore remarquer qu'au lieu des intervalles ayant $a+x_i$ et $a+x_i+h_i$ pour extrémités, on pourrait considérer des intervalles $(a+x_i-h_i, a+x_i+h_i)$ symétriques par rapport aux arguments en question; les mêmes méthodes que nous allons employer fourniraient en ce cas un théorème analogue à (1. 7). Par contre, nous n'avons pas réussi à éliminer les intervalles à longueurs différentes; en remplaçant les nombres h_i par un même nombre h, nos méthodes ne fourniraient plus le résultat exigé.

Cependant il faut remarquer que l'hypothèse de l'égalité des nombres h_i peut être admise si l'on suppose en même temps que la fonction $\Phi(x)$ est absolument continue dans tout intervalle partiel intérieur à I. En effet, on a le théorème suivant:

(1. 10) Théorème. *Soit $\Phi(x)$ une fonction monotone non-décroissante dans l'intervalle $I=(-r, r)$ $(0<r\leqq+\infty)$ et absolument continue dans tout intervalle partiel intérieur à I. Supposons que cette fonction jouit de la propriété suivante:*

(**) *à des nombres réels x_i $(i=1,\ldots,n;\ n=2,3)$ quelconques qui remplissent la condition $\sum_1^n x_i=0$ et au nombre réel a correspond un nombre $\delta>0$ tel que*

$$\prod_1^n |\Phi(a+x_i+h)-\Phi(a+x_i)| \leqq \prod_1^n |\Phi(x_i+h)-\Phi(x_i)|$$

toutefois que $0<|h|<\delta$ et que les arguments de la fonction Φ sont situés dans l'intervalle I.

En ce cas $\Phi(x)$ est de la forme

$$\Phi(x)=A\int_0^x e^{-Bu^2}du+C \qquad (A\geqq 0, B\geqq 0).$$

Les §§ 2 à 5 contiendront la démonstration du théorème (1. 7), tandis que la démonstration de (1. 10) sera fournie par les §§ 3 à 5.

2. Pour démontrer le théorème (1. 7), considérons une fonction $\Phi(x)$ satisfaisant aux hypothèses de ce théorème, c'est-à-dire monotone non décroissante dans l'intervalle $I=(-r, r)$ $(0<r\leqq+\infty)$ et jouissant de la propriété (*). Nous commençons par la démonstration de la proposition suivante:

(2. 1) *Excepté peut-être le point $x=0$, la fonction $\Phi(x)$ est continue.*

Démonstration. Posons $d^+(x)=\Phi(x+)-\Phi(x)$. En employant la propriété (*) pour $n=2$ et pour $x_1=x, x_2=-x$, on déduit aisément

l'inégalité

$$d^+(a+x)d^+(a-x) \leqq d^+(x)d^+(-x) \qquad (a \pm x \in I). \tag{2.2}$$

En posant $e^+(x) = d^+(x)d^+(-x)$, on a donc

$$d^+(a+x)d^+(a-x) \leqq e^+(x) \qquad (a \pm x \in I); \tag{2.3}$$

en substituant $-a$ à a, il s'ensuit

$$d^+(-a+x)d^+(-a-x) \leqq e^+(x) \qquad (-a \pm x \in I) \tag{2.4}$$

et en multipliant (2.3) par (2.4) il vient

$$e^+(x+a)e^+(x-a) \leqq e^+(x)^2 \tag{2.5}$$

pour $\pm a \pm x \in I$, ce qui veut dire la même chose que $x \pm a \in I$ (I étant symétrique par rapport à l'origine). L'inégalité (2.5) montre que

$$e^+(\alpha) \geqq \varepsilon, \quad e^+(\beta) \geqq \varepsilon \quad \text{implique} \quad e^+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geqq \varepsilon \qquad (\alpha, \beta \in I),$$

par conséquent les mêmes hypothèses entraînent également

$$e^+(p\alpha + q\beta) \geqq \varepsilon \quad \text{pour} \quad p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ p+q=1,\ p=m/2^n$$
$$(n=0,1,2,\ldots;\ m=0,\ldots,2^n).$$

Puisque $d^+(x)$ et, avec elle, $e^+(x)$ ne peuvent dépasser une quantité positive donnée qu'en un nombre fini de points d'un intervalle partiel intérieur à I, la fonction $e^+(x)$ ne peut donc être différente de zéro qu'en un seul point x au plus. La fonction $e^+(x)$ étant paire, ce seul point doit coïncider avec $x=0$, de sorte que $e^+(x)$ s'annule pour $x \neq 0$. Ceci entraîne en vertu de (2.3) que la fonction $d^+(x)$ s'annule également à l'exception d'un seul point au plus. En posant $x=0$ dans l'inégalité (2.2), on voit que $d^+(0)=0$ implique $d^+(a)=0$ pour $a \in I$; le seul point où $d^+(x)$ ne doit pas s'annuler ne peut donc être que $x=0$.

En résumant nos conclusions, on voit que $d^+(x) = \Phi(x+) - \Phi(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Un raisonnement analogue montre que $d^-(x) = \Phi(x-) - \Phi(x) = 0$ pour $x \neq 0$, ce qui donne la proposition à démontrer.

Supposons maintenant que le nombre dérivé supérieur (bilatéral) $\overline{\Phi}'(x)$ de $\Phi(x)$ est infini pour un point $x = x_0$ au moins. En ce cas la proposition suivante peut être démontrée:

(2.6) *S'il y a un $x_0 \in I$ tel que $\overline{\Phi}'(x_0) = +\infty$, la fonction $\Phi(x)$ est de la forme*

$$\Phi(x) = \begin{cases} A & \text{pour} \quad -r < x < 0, \\ B & \text{pour} \quad 0 < x < r \end{cases} \qquad (A < B) \tag{2.7}$$

(*donc* $x_0 = 0$).

DÉMONSTRATION. Soit x un point tel que la dérivée $\Phi'(-x)$ existe et qu'elle est finie. Si l'on a encore $x_0+2x\in I$, il existe en vertu de la propriété (*) un nombre $\delta>0$ tel que

$$|\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)|\cdot|\Phi(x_0+2x+k)-\Phi(x_0+2x)|\leqq$$
$$\leqq|\Phi(-x+h)-\Phi(-x)|\cdot|\Phi(x+k)-\Phi(x)|$$

pour $0<|h|<\delta$, $0<|k|<\delta$. Cette inégalité entraîne pour les mêmes valeurs de h et de k

$$\left|\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}\right|\cdot|\Phi(x_0+2x+k)-\Phi(x_0+2x)|\leqq$$
$$<\left|\frac{\Phi(-x+h)-\Phi(-x)}{h}\right|\cdot|\Phi(x+k)-\Phi(x)|.$$

Fixons la valeur de k et faisons varier la quantité h de façon qu'elle tende vers zéro et que le premier facteur du premier membre croisse indéfiniment. Puisque le second membre tend vers une limite finie, le second facteur du premier membre doit s'annuler:

$$\Phi(x_0+2x+k)-\Phi(x_0+2x)=0 \qquad (0<|k|<\delta),$$

de sorte que $\Phi(x)$ est constante au voisinage du point x_0+2x. La dérivée $\Phi'(x)$ étant finie presque partout dans l'intervalle I, lès points x_0+2x dont nous venons de parler remplissent l'intervalle I à l'exception d'un ensemble de mesure nulle.

En désignant donc par $G\subset I$ l'ensemble (ouvert) des points au voisinage desquels $\Phi(x)$ est constante, on a $|I-G|=0$. Posons $I-G=P$; l'ensemble P est fermé et de mesure nulle et la fonction $\Phi(x)$ est évidemment constante dans tout intervalle faisant partie de I et n'ayant aucun point commun avec P. $\Phi(x)$ étant continue d'après (2. 1) à l'exception du point $x=0$, il s'ensuit que l'ensemble P ne peut avoir autre point isolé que (peut-être) le point 0.

Soit $x\in G$, $a\pm x\in I$; en vertu de la propriété (*) on peut trouver un $\delta>0$ tel que

$$|\Phi(a+x+h)-\Phi(a+x)|\cdot|\Phi(a-x+k)-\Phi(a-x)|\leqq$$
$$\leqq|\Phi(x+h)-\Phi(x)|\cdot|\Phi(-x+k)-\Phi(-x)|=0$$

pour $0<|h|<\delta$, $0<|k|<\delta$. Cela veut dire qu'on a soit $a+x\in G$, soit $a-x\in G$. En autres termes, les relations

$$(2.\ 8) \qquad a+x\in P, \quad a-x\in P \quad \text{entraînent } x\in P.$$

Si donc le point 0 appartenait à G, tous les points suffisamment voisins à 0 y appartiendraient également, de sorte que l'ensemble P ne pourrait avoir aucun point d'accumulation, cet ensemble serait par conséquent vide, d'après ce que nous avons établi plus haut.

Supposons maintenant que l'ensemble P possède un point $c \neq 0$; on a en ce cas $0 \in P$. Nous montrons en procédant par induction que les points $(p/2^n)c$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ p = 0, 1, \ldots, 2^{n-1})$ appartiennent à P. Cette assertion se trouve vérifiée pour $n = 0$. En supposant que c'est le cas pour $n = k$, les relations $0 \in P$ et $(p/2^k)c \in P$ $(p = 0, 1, \ldots, 2^{k-1})$ entraînent d'après (2.8)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^k}c - 0\right) = \frac{p}{2^{k+1}}c \in P,$$

et celles $(p/2^k)c \in P$ et $c \in P$ entraînent

$$\frac{1}{2}\left(c - \frac{p}{2^k}c\right) = \frac{2^k - p}{2^{k+1}}c \in P,$$

on a donc

$$\frac{r}{2^{k+1}}c \in P$$

tant pour $r = 0, 1, \ldots, 2^{k-1}$ que pour $r = 2^{k-1}, \ldots, 2^k$, de sorte que l'assertion s'ensuit pour $n = k+1$. Puisque P est fermé, on en tirerait que l'intervalle $[0, c/2]$ (ou $[c/2, 0]$, si $c < 0$) fait partie de P, contrairement à notre conclusion antérieure d'après laquelle P est de mesure nulle.

Tout cela montre que l'ensemble P est soit vide, soit il ne contient que le seul point $x = 0$. La première possibilité impliquerait que $\Phi(x)$ est constante, contrairement à l'hypothèse de l'existence d'un point x_0 tel que $\overline{\Phi}'(x_0) = +\infty$. Il ne reste donc que la seconde possibilité qui entraîne que $\Phi(x)$ est de la forme (2.7), c. q. f. d.

Si l'on a contrairement à l'hypothèse de (2.6), $\overline{\Phi}'(x) < +\infty$ partout dans l'intervalle I, eu égard à ce que $\underline{\Phi}'(x) \geqq 0 > -\infty$ en conséquence de la monotonité de $\Phi(x)$, on peut employer un théorème de DENJOY[2] et conclure que $\Phi(x)$ est (ACG_*) dans l'intervalle I, par conséquent qu'elle est l'intégrale $(\mathfrak{D}_*)$ indéfinie de sa dérivée. Cette dérivée étant non-négative, $\Phi(x)$ est même intégrale indéfinie de Lebesgue, donc absolument continue dans tout intervalle partiel intérieur à I. C'est ce que nous supposerons dans ce qui suit.

3. Considérons donc une fonction $\Phi(x)$, monotone non-décroissante et absolument continue dans tout intervalle partiel intérieur à $I = (-r, r)$ et qui jouit ou bien de la propriété (*) du théorème (1.7), ou bien de celle (**) du théorème (1.10). En désignant par $f(x)$ la dérivée $\Phi'(x)$, on obtient une fonction qui satisfait aux conditions suivantes:

[2] V. p. ex. [3], p. 235; $\Phi(x)$ est continue en ce cas même pour $x = 0$, puisque ses nombres dérivés de Dini sont finis.

(3. 1) *$f(x)$ est définie et mesurable sur un ensemble $R \subset I = (-r, r)$ $0 < r \leqq +\infty)$ tel que $|I - R| = 0$,*

(3. 2) *on a $0 \leqq f(x) < +\infty$ pour $x \in R$,*

(3. 3) *on a pour $n = 2, 3$*

$$\prod_1^n f(a + x_i) \leqq \prod_1^n f(x_i)$$

outefois que $x_i \in R$, $a + x_i \in R$ et $\sum_1^n x_i = 0$.

(3. 1) et (3. 2) résultent du fait que $f(x)$ est la dérivée d'une fonction nonotone non-décroissante; quant à (3. 3), elle est la conséquence immédiate le la propriété (*) ou (**).[3]

Nous allons démontrer la proposition suivante:

(3. 4) *$f(x)$ étant une fonction qui satisfait aux conditions* (3. 1) *à* (3. 3), *on a soit $f(x) = 0$ p. p. sur I, soit $f(x) > 0$ p. p. sur I.*

DÉMONSTRATION. Posons $R_0 = \underset{x}{E}[x \in R, -x \in R]$; on aura évidemment $|I - R_0| = 0$. Il vient d'après (3. 3)

(3. 5) $$f(a + x) f(a - x) \leqq f(x) f(-x) \quad \text{pour } a \pm x, \ \pm x \in R,$$

donc

(3. 6) $$f(c) f(c + 2x) \leqq f(x) f(-x) \quad \text{pour } c, c + 2x, \ \pm x \in R.$$

Supposons qu'il existe un $x_0 \in R_0$ tel que $x_0 > 0$ et que $f(x_0) f(-x_0) = 0$. En ce cas on aura d'après (3. 6)

$$f(c) f(c + 2x_0) = 0 \quad \text{pour} \quad c, \ c + 2x_0 \in R.$$

Par conséquent si l'intervalle $(\alpha, \alpha + 4x_0)$ fait partie de I, il vient

$$R \cdot (\alpha, \alpha + 2x_0) = \underset{x}{E}[x \in R, \alpha < x < \alpha + 2x_0, f(x) = 0] +$$
$$+ \underset{x}{E}[x \in R, x + 2x_0 \in R, \alpha < x < \alpha + 2x_0, f(x + 2x_0) = 0] +$$
$$+ \underset{x}{E}[x \in R, x + 2x_0 \notin R, \alpha < x < \alpha + 2x_0].$$

Le troisième terme du second membre étant de mesure nulle, la somme des deux premiers termes doit être égale au moins à $|R \cdot (\alpha, \alpha + 2x_0)| = 2x_0$. L'ensemble $E_0 = \underset{x}{E}[f(x) = 0]$ a donc une densité moyenne supérieure ou

[3] Je dois à M. J. CZIPSZER la remarque suivante: en se bornant à la démonstration de (1. 7), le fait que les nombres dérivés de Dini de $\Phi(x)$ sont finis *partout* dans I entraîne que chacun de ces nombres dérivés remplit les conditions (3. 1) à (3. 3) pour $R = I$, ce qui permet de simplifier considérablement la démonstration de (1. 7) (sans altérer celle de (1. 10)).

égale à $1/2$ dans l'intervalle $(a, a+4x_0)$, celui $E_+ = \underset{x}{E}[f(x) > 0]$ a par conséquent une densité moyenne $\leqq 1/2$ dans le même intervalle.

En supposant que le point 0 est un point d'accumulation des points x_0 appartenant à R_0 et tels que $f(x_0) = 0$, le résultat que nous venons d'établir montre que la densité de l'ensemble E_+ ne peut être égale à l'unité en aucun point de l'intervalle I, donc que $|E_+| = 0$. C'est justement la première possibilité de la proposition. On a donc la proposition suivante:

(3. 7) *Ou bien* $f(x) = 0$ *p. p. sur* I, *ou bien il existe un* $\gamma > 0$ *tel que*
$$f(x) > 0 \quad \textit{pour} \quad x \in R_0 \cdot (-\gamma, \gamma).$$

Admettons l'existence d'un γ du type envisagé et posons pour $x \in R_0$
$$F(x) = f(x) f(-x).$$
La fonction $F(x)$ est mesurable et paire sur l'ensemble R_0 et on a

$$F(x+a) F(x-a) \leqq F(x)^2 \quad \text{pour} \quad x \pm a, x \in R_0. \tag{3.8}$$

En effet, les hypothèses $x \pm a$, $x \in R_0$ impliquent $x \pm a$, $-x \pm a$, $\pm x \in R$, donc d'après (3. 5)
$$0 \leqq f(a+x) f(a-x) \leqq f(x) f(-x) = F(x)$$
et
$$0 \leqq f(-a+x) f(-a-x) \leqq f(x) f(-x) = F(x),$$
d'où (3. 8) s'ensuit par multiplication.

Soit $H_+ = \underset{x}{E}[x \in R_0, F(x) > 0]$; (3. 8) entraîne que l'ensemble H_+ contient le point $x \in R_0$ toutefois qu'il contient les points $x+a$ et $x-a$. L'hypothèse que la seconde possibilité de (3. 7) se réalise nous assure qu'il existe un $\gamma > 0$ tel que H_+ contient presque tous les points de l'intervalle $(0, \gamma)$. Désignons par γ_0 la borne supérieure des nombres γ de ce type; on a $0 < \gamma_0 \leqq r$ et l'ensemble H_+ contient évidemment presque tous les points de $(0, \gamma_0)$.

(3. 9) $F(x)$ *s'annule presque partout dans les intervalles* $(-r, -\gamma_0)$ *et* (γ_0, r).

En effet, si $F(x)$ était positive sur un sous-ensemble de mesure positive de l'intervalle $(\gamma_0, 2\gamma_0) \cdot I$, il existerait un point x_1 commun à $(\gamma_0, 2\gamma_0) \cdot I$ et à H_+. D'après (3. 8), on aurait $F(x) > 0$ toutefois que $x \in R_0$, $0 < 2x - x_1 < \gamma_0$, $2x - x_1 \in H_+$, c'est-à-dire presque partout dans l'intervalle $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_1+\gamma_0}{2}\right)$. Puisque nos hypothèses entraînent $\frac{x_1}{2} < \gamma_0$ et $\frac{x_1+\gamma_0}{2} > \gamma_0$, il s'ensuivrait que l'ensemble H_+ contient

presque tous les points de l'intervalle $\left(0, \frac{x_1+\gamma_0}{2}\right)$, ce qui contredit à la définition du nombre γ_0, de sorte que $F(x)$ s'annule presque partout dans l'intervalle $(\gamma_0, 2\gamma_0)\cdot I$.

En procédant par induction, supposons que $F(x)$ s'annule presque partout dans l'intervalle $(2^{k-1}\gamma_0, 2^k\gamma_0)$. En admettant qu'elle est positive sur un sous-ensemble de mesure positive de $(2^k\gamma_0, 2^{k+1}\gamma_0)\cdot I$, il y aurait un x_{k+1} tel que $2^k\gamma_0 < x_{k+1} < 2^{k+1}\gamma_0$, $x_{k+1}\in H_+$. Il s'ensuivrait d'après (3. 8) $F(x)>0$ pour $0<2x-x_{k+1}<\gamma_0$, $2x-x_{k+1}\in H_+$, $x\in R_0$, de sorte que $F(x)$ serait positive presque partout dans l'intervalle $\left(\frac{x_{k+1}}{2}, \frac{x_{k+1}+\gamma_0}{2}\right)$, ce qui est impossible en conséquence des inégalités $\frac{x_{k+1}}{2}<2^k\gamma_0$ et $\frac{x_{k+1}+\gamma_0}{2}>\frac{2^k+1}{2}\gamma_0>2^{k-1}\gamma_0$ qui montrent que $\left(\frac{x_{k+1}}{2}, \frac{x_{k+1}+\gamma_0}{2}\right)$ empiète sur l'intervalle $(2^{k-1}\gamma_0, 2^k\gamma_0)$ où $F(x)$ s'annule presque partout par hypothèse. La contradiction obtenue montre la validité de la proposition qui concerne l'intervalle (γ_0, r); l'autre partie de la proposition s'ensuit par suite de la parité de la fonction $F(x)$.

(3. 10) *On a* $f(x)=0$ *pour* $x\in R, |x|>\gamma_0$.

En effet, soit $x\in R, |x|>\gamma_0$; supposons pour fixer les idées qu'on a $x<-\gamma_0$. Considérons les points x_1 de l'intervalle

$$(\max\,(-\gamma_0, x+2\gamma_0), \gamma_0)$$

de mesure positive. Presque tous les points x_1 de cet intervalle appartiennent à H_+ et, $\frac{x_1-x}{2}$ étant supérieur à γ_0, il vient $\frac{x_1-x}{2}\in R_0$ et d'après (3. 9) $F\left(\frac{x_1-x}{2}\right)=0$ pour presque tous ces points x_1. Il s'ensuit qu'il existe un x_1 tel que

$$x_1\in H_+,\qquad \frac{x_1-x}{2}\in R_0 \qquad \text{et} \qquad F\left(\frac{x_1-x}{2}\right)=0,$$

d'où on conclut en vertu de (3. 5)

$$0\leqq f(x)\,f(x_1)\leqq f\left(\frac{x_1-x}{2}\right)f\left(\frac{x-x_1}{2}\right)=F\left(\frac{x_1-x}{2}\right)=0,$$

donc, en conséquence de $x_1\in H_+$ (qui entraîne $f(x_1)>0$) il vient $f(x)=0$.

(3. 11) *On a* $\gamma_0=r$, *c'est-à-dire* $F(x)$ *est positive presque partout sur* I.

On trouve en vertu de (3. 3) que

(3. 12) $f(a+x)^2f(a-2x)\leqq f(x)^2f(-2x)$ pour $a+x, a-2x, x, -2x\in R$.

En supposant que $\gamma_0 < r$, on aurait pour $\frac{\gamma_0}{2} < x < \min\left(\frac{r}{2}, \frac{5}{8}\gamma_0\right)$ les inégalités

$$(3.13)\qquad -r < -2x < -\gamma_0, \quad \left|\frac{\gamma_0}{4} + x\right| < \gamma_0, \quad \left|\frac{\gamma_0}{4} - 2x\right| < \gamma_0,$$

par conséquent presque tous les x qui satisfont à ces inégalités seraient tels que

$$(3.14)\qquad x \in R, \quad -2x \in R, \quad \frac{\gamma_0}{4} + x \in H_+, \quad \frac{\gamma_0}{4} - 2x \in H_+.$$

En appliquant (3. 12) pour $a = \gamma_0/4$, on aboutirait à une contradiction, le premier membre étant positif et le second s'annulant d'après (3. 10), (3. 13) et (3. 14).

Nous avons vu que la seconde possibilité de la proposition (3. 7) entraîne (3. 11), c'est-à-dire que $f(x)$ est positive presque partout sur I; ceci termine la démonstration de (3. 4).

4. Dans ce qui suit, la notation suivante nous sera utile: $f(x)$ étant une fonction réelle, à valeurs finies ou infinies, définie et mesurable dans l'intervalle ouvert I, posons pour $x \in I$

$$\bar{f}(x) = \lim_{h \to 0+} \operatorname*{vrai\,max}_{x-h<t<x+h} f(t)$$

et

$$\underline{f}(x) = \lim_{h \to 0+} \operatorname*{vrai\,min}_{x-h<t<x+h} f(t)$$

où, comme d'habitude, $\operatorname*{vrai\,max}_{a<t<b} f(t)$ désigne la borne inférieure des nombres y tels que

$$\left|\underset{t}{E}[f(t) > y, a < t < b]\right| = 0$$

et $\operatorname*{vrai\,min}_{a<t<b} f(t)$ est défini de façon analogue. Les limites en question, finies ou infinies, existent puisque $\operatorname*{vrai\,max}_{x-h<t<x+h} f(t)$ est évidemment une fonction non-décroissante et que $\operatorname*{vrai\,min}_{x-h<t<x+h} f(t)$ est une fonction non-croissante de $h > 0$. Comme $\bar{f}(x)$ et $\underline{f}(x)$ ne varient pas lorsqu'on modifie la définition de la fonction $f(x)$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut parler de $f(x)$ et de $\underline{f}(x)$ même si $f(x)$ n'est définie que presque partout dans l'intervalle I.

(4. 1) *La fonction réelle (à valeurs finies ou infinies) $\bar{f}(x)$ est semi-continue supérieurement, celle $\underline{f}(x)$ est semi-continue inférieurement dans l'intervalle I.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer la première assertion. Or, soit $x_0 \in I$ et posons $\bar{f}(x_0) < +\infty$ (si $\bar{f}(x_0) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer); en designant par y_0 un nombre quelconque supérieur à $\bar{f}(x_0)$, on aura pour un $h_0 > 0$ convenable

$$\operatorname*{vrai\ max}_{x_0 - h_0 < t < x_0 + h_0} f(t) < y_0,$$

il existe donc un $y_1 < y_0$ tel que

$$\left| \underset{t}{E}[f(t) > y_1, x_0 - h_0 < t < x_0 + h_0] \right| = 0.$$

Or, si $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$, on a pour tous les nombres $h > 0$ suffisamment petits

$$x_0 - h_0 < x - h < x + h < x_0 + h_0,$$

par suite

$$\left| \underset{t}{E}[f(t) > y_1, x - h < t < x + h] \right| = 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname*{vrai\ max}_{x-h<t<x+h} f(t) \leqq y_1$$

et par conséquent en passant à la limite $h \to 0+$

$$\bar{f}(x) \leqq y_1 < y_0 \qquad (x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0),$$

ce qui vérifie la proposition.

(4. 2) *On a pour* $x \in I$ $\underline{f}(x) \leqq \bar{f}(x)$.

DÉMONSTRATION. Supposons par impossible qu'on a pour un $x \in I$

$$\bar{f}(x) < \underline{f}(x).$$

Il existe en ce cas un $h > 0$ tel que

$$\operatorname*{vrai\ max}_{x-h<t<x+h} f(t) < \operatorname*{vrai\ min}_{x-h<t<x+h} f(t),$$

on a donc des nombres y_1 et y_2 tels que $y_1 < y_2$ et que

$$\left| \underset{t}{E}[f(t) > y_1, x - h < t < x + h] \right| = 0,$$

$$\left| \underset{t}{E}[f(t) < y_2, x - h < t < x + h] \right| = 0,$$

d'où il s'ensuivrait $|(x-h, x+h)| = 2h = 0$, ce qui est impossible.

Nous pouvons maintenant énoncer la généralisation mentionnée dans l'introduction du théorème de SIERPIŃSKI:

(4. 3) *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction réelle, à valeurs finies ou infinies, définie et mesurable dans l'intervalle ouvert* I. *Supposons que* I *admet une décomposition* $I = R + Z$, *où* $|Z| = 0$ *et* $\varphi(x)$ *est convexe sur l'ensemble* R, *c'est-à-dire*

$\varphi(x)$ est finie pour $x \in R$ et on a

(4. 4) $$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \qquad \text{pour } x, y, \frac{x+y}{2} \in R.$$

Il existe en ce cas une fonction $\varphi^*(x)$ finie, continue, convexe dans l'intervalle I qui coïncide avec $\varphi(x)$ sur l'ensemble R.

DÉMONSTRATION. Nous commençons par la démonstration du lemme suivant:

(4. 5) *Soient p un nombre réel et $\eta > 0$. Supposons*

(4. 6) *soit que chacun des voisinages d'un point $x_0 \in I$ contient un point $x_1 \in R$ tel que $\varphi(x_1) < p$ et un ensemble mesurable E_1 de mesure positive sur lequel $\varphi(x) > p+\eta$,*

(4. 7) *soit que chacun des voisinages du point $x_0 \in I$ contient un point $x_2 \in R$ tel que $\varphi(x_2) > p+\eta$ et un ensemble mesurable E_2 de mesure positive sur lequel $\varphi(x) < p$.*

En ce cas chacun des voisinages de x_0 contient un ensemble mesurable E de mesure positive sur lequel $\varphi(x) > p+2\eta$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre tel que $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset I$ et supposons d'abord que l'hypothèse (4. 6) se vérifie. Il existe alors un point $x_1 \in R \cdot \left(x_0-\frac{\varepsilon}{3}, x_0+\frac{\varepsilon}{3}\right)$ tel que $\varphi(x_1) < p$ et, en posant

$$E_1 = \underset{t}{E}\left[\varphi(t) > p+\eta, x_0-\frac{\varepsilon}{3} < t < x_0+\frac{\varepsilon}{3}\right],$$

l'ensemble E_1 est mesurable et on a $|E_1| > 0$. Soit R_1 l'ensemble qui résulte de l'esemble R par une homothétie ayant x_1 pour centre et $\lambda = \frac{1}{2}$ pour coefficient, c'est-à-dire posons

$$R_1 = \underset{t}{E}[2t - x_1 \in R]$$

et considérons l'ensemble

$$E_1' = E_1 R R_1 \cdot \left(x_0-\frac{\varepsilon}{3}, x_0+\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Puisque l'ensemble R contient presque tous les points de l'intervalle $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ celui R_1 contiendra presque tous les points de l'intervalle $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_0-\varepsilon), \frac{1}{2}(x_1+x_0+\varepsilon)\right) \supset \left(x_0-\frac{\varepsilon}{3}, x_0+\frac{\varepsilon}{3}\right)$, de sorte que $|E_1| > 0$ implique $|E_1'| > 0$. Or, on a pour $t \in E_1'$

$$x_0-\varepsilon < 2t-x_1 < x_0+\varepsilon, \qquad t \in R, \quad 2t-x_1 \in R$$

et en vertu de (4.4) (appliqué pour $x = x_1$, $y = 2t - x_1$)

$$\varphi(2t - x_1) \geqq 2\varphi(t) - \varphi(x_1) > 2p + 2\eta - p = p + 2\eta.$$

En appliquant donc à E_1' une homothétie ayant x_1 pour centre et $\lambda = -2$ pour coefficient et en désignant l'ensemble obtenu par E, il vient

$$E = \underset{x}{E}[x = 2t - x_1, t \in E_1'],$$

donc E est mesurable, on a $E \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $|E| = 2|E_1'| > 0$ et la fonction $\varphi(x)$ est supérieure à $p + 2\eta$ sur l'ensemble E.

Supposons maintenant que l'hypothèse (4.7) est vérifiée. En ce cas il existe un point $x_2 \in R \cdot \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ tel que $\varphi(x_2) > p + \eta$, et en posant

$$E_2 = \underset{t}{E}\left[\varphi(t) < p, x_0 - \frac{\varepsilon}{3} < t < x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right],$$

E_2 est mesurable et on a $|E_2| > 0$. Désignons par R_2 l'ensemble symétrique à R par rapport au point x_2, c'est-à-dire soit

$$R_2 = \underset{t}{E}[2x_2 - t \in R]$$

et posons

$$E_2' = E_2 R R_2 \cdot \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Puisque R contient presque tous les points de $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, R_2 contiendra presque tous les points de $(2x_2 - x_0 - \varepsilon, 2x_2 - x_0 + \varepsilon) \supset \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$, par conséquent $|E_2'| > 0$. On aura pour $t \in E_2'$

$$x_0 - \varepsilon < 2x_2 - t < x_0 + \varepsilon, \qquad t \in R, 2x_2 - t \in R,$$

en appliquant donc (4.4) pour $x = t, y = 2x_2 - t$, il vient

$$\varphi(2x_2 - t) \geqq 2\varphi(x_2) - \varphi(t) > 2p + 2\eta - p = p + 2\eta.$$

Cela veut dire que l'ensemble

$$E = \underset{x}{E}[x = 2x_2 - t, t \in E_2'],$$

symétrique à E_2' par rapport au point x_2, jouira de toutes les propriétés désirées:

$$|E| > 0, E \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \text{et} \quad \varphi(x) > p + 2\eta \qquad \text{pour } x \in E.$$

Par là, le lemme (4.5) est démontré.

Considérons maintenant les fonctions $\overline{\varphi}(x)$ et $\underline{\varphi}(x)$, définies au commencement du présent paragraphe. On démontre aisément la proposition suivante:

(4.8) *Les hypothèses du lemme* (4.5) *entraînent*

$$\overline{\varphi}(x_0) = +\infty.$$

En effet, d'après le lemme (4.5), les hypothèses en question impliquent que chacun des voisinages du point x_0 contient un ensemble mesurable de mesure positive sur lequel $\varphi(x) > p + 2\eta$ et un point $x_1 \in R$ tel que $\varphi(x_1) < p$ (l'existence d'un point x_1 de ce type figure explicitement dans l'hypothèse (4.6) et s'ensuit de celle (4.7), l'ensemble E_2 de mesure positive possédant au moins un point commun avec R). Les hypothèses (4.6) se vérifient ainsi pour 2η au lieu de η, par conséquent, en vertu du lemme (4.5), chacun des voisinages de x_0 contient un ensemble mesurable de mesure positive sur lequel $\varphi(x) > p + 4\eta$. En répétant ce raisonnement, on aboutit à la conclusion que chacun des voisinages du point x_0 contient un ensemble mesurable de mesure positive sur lequel $\varphi(x) > p + 2^n\eta$, n étant un nombre naturel quelconque. Cela veut dire que

$$\underset{x_0 - h < t < x_0 + h}{\text{vrai max}}\ \varphi(t) = +\infty$$

pour tout nombre $h > 0$, c'est-à-dire que $\overline{\varphi}(x_0) = +\infty$, comme nous l'avons affirmé.

Nous montrons maintenant que les hypothèses du lemme (4.5) ne peuvent se réaliser en aucun point de l'intervalle I. Cela s'ensuit de (4.8) et de la proposition suivante:

(4.9) *On a pour* $x_0 \in I$ $\overline{\varphi}(x_0) < +\infty$.

Soient $\varepsilon > 0$ un nombre tel que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$ et y un nombre réel quelconque. Si l'on avait $\overline{\varphi}(x_0) = +\infty$, la fonction $\varphi(x)$ serait supérieure à y sur un sous-ensemble de mesure positive de l'intervalle $\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$, il existerait donc au moins un point $x_3 \in R \cdot \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ tel que $\varphi(x) > y$. Soit R_3 l'ensemble symétrique à R par rapport au point x_3:

$$R_3 = \underset{t}{E}[2x_3 - t \in R]$$

et posons

$$H = RR_3 \cdot \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

On voit aisément que H contient presque tous les point de l'intervalle $\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{3}, x_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ et l'inégalité (4.4) entraîne que, x étant un point quelconque de H, on a soit $\varphi(x) > y$, soit $\varphi(2x_3 - x) > y$. En autres termes,

$$\underset{x}{E}[x \in H, \varphi(x) > y] + \underset{x}{E}[x \in H, \varphi(2x_3 - x) > y] = H,$$

la mesure d'au moins l'un des ensembles du premier membre est donc supérieure ou égale à $\frac{1}{2}|H|=\frac{\varepsilon}{3}$. Vu que $x\in H$ implique

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon \quad \text{et} \quad x_0-\varepsilon<2x_0-x<x_0+\varepsilon,$$

il vient

$$\left|\underset{x}{E}\,[\varphi(x)>y,\, x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon]\right|\geqq\frac{\varepsilon}{3}.$$

Mais cela est impossible, parce que le premier membre tend vers zéro lorsque $y\to+\infty$, la fonction $\varphi(x)$ étant finie sur R, donc presque partout dans l'intervalle $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. La contradiction obtenue montre que la proposition est valable.

(4. 10) *On a*

$$\underline{\varphi}(x_0)=\overline{\varphi}(x_0)<+\infty \qquad \textit{pour } x_0\in I$$

et

$$\underline{\varphi}(x_0)=\varphi(x_0)=\overline{\varphi}(x_0) \qquad \textit{pour } x_0\in R.$$

L'inégalité $\underline{\varphi}(x_0)>\overline{\varphi}(x_0)$ étant impossible d'après (4. 2) supposons qu'on a $\underline{\varphi}(x_0)<\overline{\varphi}(x_0)$ pour un $x_0\in I$. Choisissons les nombres p et η de façon qu'on ait

$$\underline{\varphi}(x_0)<p<p+\eta<\overline{\varphi}(x_0),$$

on aura alors pour tout $h>0$

$$\left|\underset{x}{E}[\varphi(x)>p+\eta,\, x_0-h<x<x_0+h]\right|>0$$

et

$$\left|\underset{x}{E}[\varphi(x)<p,\, x_0-h<x<x_0+h]\right|>0,$$

donc l'hypothèse (4. 6) (ou (4. 7)) se vérifie pour x_0, ce qui est impossible d'après nos conclusion antérieures. Par là, notre première assertion est démontrée.

Supposons d'autre part qu'on a $\varphi(x_0)<\overline{\varphi}(x_0)$ pour un point $x_0\in R$. Prenons en ce cas des nombres p et η tels que

$$\varphi(x_0)<p<p+\eta<\overline{\varphi}(x_0).$$

On a alors pour tout nombre $h>0$

$$x_0\in R\cdot(x_0-h, x_0+h), \qquad \varphi(x_0)<p$$

et

$$\left|\underset{x}{E}[\varphi(x)>p+\eta,\, x_0-h<x<x_0+h]\right|>0,$$

de sorte que l'hypothèse (4. 6) se réalise, ce qui est également impossible.

Un raisonnement analogue montre que l'hypothèse $\underline{\varphi}(x_0)<\varphi(x_0)$ pour $x_0\in R$ entraînerait la validité de (4. 7), nous amènerait donc à une contradiction.

On a ainsi pour $x_0 \in R$ les inégalités
$$\varphi(x_0) \leqq \underline{\varphi}(x_0) \leqq \overline{\varphi}(x_0) \leqq \varphi(x_0),$$
ce qui montre la validité de la seconde assertion.

Considérons maintenant pour $x \in I$ la fonction
$$\varphi^*(x) = \underline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(x).$$
D'après (4. 1), $\varphi^*(x)$ est semi-continue supérieurement et inférieurement en même temps, c'est-à-dire elle est continue; en vertu de (4. 9) $\varphi^*(x) < +\infty$ et, d'après (4. 10), $\varphi^*(x)$ coïncide avec $\varphi(x)$ sur l'ensemble R. A deux points x et y quelconques de I, on peut trouver évidemment deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que
$$x_n \to x, \quad y_n \to y, \quad x_n \in R, \quad y_n \in R, \quad \frac{x_n + y_n}{2} \in R,$$
l'ensemble R contenant presque tous les points de I. L'inégalité (4. 4) entraîne donc
$$\varphi^*\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) \leqq \frac{\varphi(x_n) + \varphi(y_n)}{2} = \frac{\varphi^*(x_n) + \varphi^*(y_n)}{2},$$
et par suite de la continuité de $\varphi^*(x)$
$$\varphi^*\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{\varphi^*(x) + \varphi^*(y)}{2}, \tag{4.11}$$
c'est-à-dire la fonction $\varphi^*(x)$ est convexe sur I. On voit de (4. 11) que si $\varphi^*(x)$ était égale à $-\infty$, elle aurait la même valeur dans un voisinage entier x_0, ce qui est impossible, puisque $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ est finie sur R. Par conséquent $\varphi^*(x)$ est finie partout sur I, ce qui termine la démonstration de (4. 3).

5. Retournons aux idées du § 3 et considérons une fonction $f(x)$ qui satisfait aux conditions (3. 1) à (3. 3). Eu égard à (3. 4), supposons encore que $f(x)$ est positive presque partout sur I (nous garderons les notations du § 3).

Posons (comme plus haut)
$$E_+ = \underset{x}{E}[x \in R, f(x) > 0] \quad \text{et} \quad R_+ = \underset{x}{E}[x \in E_+, -x \in E_+];$$
on a par hypothèse $R_+ \subset R_0, |I - R_+| = 0$ et $0 < f(x) < +\infty, 0 < F(x) < +\infty$ pour $x \in R_+$.

Définissons les fonctions $g(x)$ et $G(x)$ pour $x \in R_+$ par les égalités
$$g(x) = \log f(x), \quad G(x) = \log F(x).$$
Chacune de ces deux fonctions est finie et mesurable sur l'ensemble R_+, celle $G(x)$ est paire et satisfait d'après (3. 8) à l'inégalité
$$G(x+a) + G(x-a) \leqq 2G(x) \qquad \text{pour } x \pm a, x \in R_+.$$

Par conséquent on peut appliquer le théorème (4. 3) à $\varphi(x) = -G(x)$, de sorte qu'il existe une fonction $G^*(x)$ finie, continue et concave dans l'intervalle I qui coïncide avec $G(x)$ pour $x \in R_+$; tout comme $G(x)$, la fonction $G^*(x)$ est paire.

En vertu de (3. 5) on a[4]

$$g(a+x)+g(a-x) \leqq g(x)+g(-x) \qquad \text{pour} \quad a \pm x, \pm x \in R_+,$$

donc

(5. 1) $$g(x+a)-g(x-a) \leqq g(x)+g(-x)-g(a-x)-g(x-a) = \\ = G(x)-G(x-a) \qquad \text{pour} \quad a \pm x, \pm x, x-a \in R_+.$$

Substituons $-a$ à a dans cette inégalité:

(5. 2) $$g(x-a)-g(x+a) \leqq G(x)-G(x+a) \quad \text{pour} \quad -a \pm x, \pm x, x+a \in R_+.$$

En résumant (5. 1) et (5. 2), on peut écrire

$$G(x+a)-G(x) \leqq g(x+a)-g(x-a) \leqq G(x)-G(x-a)$$
$$\text{pour} \quad \pm a \pm x, \pm x \in R_+.$$

En remplaçant $x-a$ par α et $x+a$ par β, il vient

(5. 3) $$G(\beta)-G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqq g(\beta)-g(\alpha) \leqq G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)$$
$$\text{pour} \quad \alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2} \in R_+$$

(où on a fait usage de la symétrie de l'ensemble R_+ par rapport au point 0).

Considérons les fonctions $\underline{g}(x)$ et $\overline{g}(x)$.[5] x_0 étant un point quelconque de l'intervalle I et $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut déterminer par suite de la continuité de la fonction $G^*(x)$ un $\delta > 0$ tel que l'oscillation de $G^*(x)$ dans l'intervalle $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ soit inférieure à ε. En désignant par α un point quelconque de $R_+ \cdot (x_0-\delta, x_0+\delta)$ et en tenant compte de ce que l'ensemble R_+ contient presque tous les points de $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, on conclut de (5. 3), la fonction $G(x)$ coïncidant avec $G^*(x)$ sur R_+, que

$$\overline{g}(x_0) \leqq \operatorname*{vrai\ max}_{x_0-\delta<t<x_0+\delta} g(t) \leqq g(\alpha)+\varepsilon < +\infty$$

et que

$$\underline{g}(x_0) \geqq \operatorname*{vrai\ min}_{x_0-\delta<t<x_0+\delta} g(t) \geqq g(\alpha)-\varepsilon > -\infty$$

donc, eu égard à (4. 2), que

$$0 \leqq \overline{g}(x_0)-\underline{g}(x_0) \leqq 2\varepsilon.$$

[4] L'idée principale du raisonnement qui suit est empruntée à l'ouvrage [1] de F. Bernstein.

[5] Pour la notation, v. p. 370.

Il s'ensuit en conséquence du choix arbitraire de $\varepsilon > 0$ que $\bar{g}(x_0) = \underline{g}(x_0)$ pour $x_0 \in I$ et que cette valeur commune est finie.

Si le point x_0 appartient à R_+, on peut choisir dans le raisonnement précédent $\alpha = x_0$ de sorte qu'on en tire les inégalités

$$g(x_0) \leqq g(x_0) + \varepsilon \quad \text{et} \quad g(x_0) - \varepsilon \leqq \underline{g}(x_0),$$

donc en faisant tendre ε vers zéro, et vu aussi (4.2),

$$g(x_0) \leqq \underline{g}(x_0) \leqq \bar{g}(x_0) \leqq g(x_0),$$

c'est-à-dire

$$\bar{g}(x_0) = \underline{g}(x_0) = g(x_0) \qquad \text{pour } x_0 \in R_+.$$

Puisque, d'après (4.1), $\bar{g}(x)$ est semi-continue supérieurement et que $\underline{g}(x)$ est semi-continue inférieurement, la fonction

$$g^*(x) = \bar{g}(x) = \underline{g}(x)$$

est finie et continue sur I et elle coïncide avec $g(x)$ sur R_+. Par raison de continuité, l'inégalité (5.3) nous conduit à celle

$$G^*(\beta) - G^*\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqq g^*(\beta) - g^*(\alpha) \leqq G^*\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G^*(\alpha) \tag{5.4}$$
$$\text{pour } \alpha, \beta \in I.$$

Cette inégalité a pour conséquence que la fonction $g^*(x)$ est absolument continue dans tout intervalle partiel intérieur à I, la fonction $G^*(x)$ ayant la même propriété comme fonction continue et concave dans I.

Désignons par $H(x)$ la dérivée unilatérale du côté droit de la fonction $G^*(x)$; $H(x)$ existe partout dans I, elle est finie, monotone non-croissante et continue à l'exception des points d'un sous-ensemble dénombrable de I. Il s'ensuit de (5.4), en faisant usage du théorème de DINI sur les bornes des nombres dérivés des fonctions continues,[6] qu'on a en tous les points de continuité de $H(x)$

$$\frac{d}{dx} g^*(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} G^*(x) = \frac{1}{2} H(x);$$

cette égalité étant donc valable presque partout dans I et la fonction $g(t)$

[6] V. p. ex. [3], p. 204. On arrive au même résultat d'une façon plus élémentaire en faisant usage de l'inégalité

$$\frac{\beta-\alpha}{2} H(\beta) \leqq G^*(\beta) - G^*\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqq g^*(\beta) - g^*(\alpha) \leqq G^*\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G^*(\alpha) \leqq \frac{\beta-\alpha}{2} H(\alpha)$$

qui résulte pour $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in I$ de (5.4) et de la concavité de $G^*(x)$. (Remarque de M. J. CZIPSZER.)

étant, comme nous l'avons vu, absolument continue dans l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$, si $x<0$) pour $x \in I$, on a

$$g^*(x)=g^*(0)+\frac{1}{2}\int_0^x H(t)\,dt=g^*(0)+\frac{1}{2}[G^*(x)-G^*(0)].$$

Par conséquent la fonction $g^*(x)$ est, elle aussi, continue, paire et concave dans l'intervalle I.

Désignons par $h(x)$ la dérivée unilatérale du côté droit de $g^*(x)$; tout comme $H(x)$, $h(x)$ est finie, monotone non-croissante et continue à l'exception des points d'un ensemble dénombrable $D \subset I$, et on a (d'après le théorème cité de Dini)

$$h(x)=\frac{d}{dx}g^*(x) \qquad \text{pour } x \in I-D. \tag{5.5}$$

L'inégalité (3.3) a pour conséquence

$$g(a+x)+g(b+x)+g(-a-b+x) \leqq g(a)+g(b)+g(-a-b)$$

toutefois que $a+x$, $b+x$, $-a-b+x$, $a, b, -a-b \in R_+$. Par raison de continuité et puisque $g^*(x)$ est paire, on en tire

$$g^*(a+x)+g^*(b+x)+g^*(a+b-x) \leqq g^*(a)+g^*(b)+g^*(a+b) \tag{5.6}$$

pourvu que tous les arguments soient situés dans I. Le premier membre de (5.6) ayant un maximum pour $x=0$, on a

$$h(a)+h(b)-h(a+b=0 \tag{5.7}$$

toutefois que le premier membre de (5.6) est dérivable au point $x=0$, ce qui est le cas d'après (5.5) si a, b, $a+b \in I-D$.

Soit $x_0 \in I$. Choisissons des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que

$$x_n \to x_0+, \quad y_n \to x_0-, \quad x_n \notin D, \quad y_n \notin D, \quad x_n-y_n \notin D$$

ce qui est évidemment possible. On a alors $x_n-y_n \to 0+$, et en vertu de (5.7)

$$h(x_n-y_n)=h(x_n)-h(y_n).$$

En passant à la limite, on obtient

$$h(0+)=h(x_0+)-h(x_0-),$$

c'est-à-dire le saut de la fonction $h(x)$ est indépendant de l'argument x_0. Comme le saut s'annule en tous les points de continuité de $h(x)$, il s'annule partout dans I, donc $h(x)$ est continue partout. Par raison de continuité, l'équation fonctionnelle (5.7) se vérifie partout dans l'intervalle I (c'est-à-dire pour a,b, $a+b \in I$ quelconques).[7]

[7] Pour arriver à cette conclusion, nous aurions pu faire usage du théorème (4.3), mais nous avons préféré le raisonnement élémentaire du texte.

Le théorème de CAUCHY montre qu'on a

$$h(x) = -2Bx \qquad (B \geqq 0),$$

donc

$$g(x) = -Bx^2 + \log A \qquad (A > 0),$$

par conséquent

$$f(x) = Ae^{-Bx^2}.$$

En tenant compte de ce que $f(x) = \Phi'(x)$ p. p. et que $\Phi(x)$ est absolument continue dans tout intervalle partiel intérieur à I, on en tire

$$\Phi(x) = A\int_0^x e^{-Bu^2}du + C \qquad (A > 0, B \geqq 0), \tag{5.8}$$

tandis que la première possibilité de la proposition (3.7) conduit à $\Phi(x) =$ = constante, c'est-à-dire à la formule (5.8) avec $A = 0$.

Par là, les théorèmes (1.7) et (1.10) sont démontrés.

6. On voit aisément qu'au cas d'une fonction de la forme (1.8) le signe d'égalité est valable dans la formule de la propriété (*) pour des valeurs convenables des quantités x_i et $a \neq 0$, et pour des h_i aussi petits que l'on veut; tandis que, $\Phi(x)$ étant de la forme (1.9), la même remarque ne s'applique que si $A = 0$ ou si $B = 0$. En autres termes, on peut énoncer le théorème suivant:

(6.1) *Soit $\Phi(x)$ une fonction monotone non-décroissante dans l'intervalle $(-r, r)$ $(0 < r \leqq +\infty)$ qui jouit de la propriété* (**) *suivante:*

(**) *à des nombres réels x_i $(i = 1, \ldots, n;\ n = 2, 3)$ quelconques qui remplissent la condition $\sum_1^n x_i = 0$ et au nombre réel $a \neq 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel que*

$$\prod_1^n |\Phi(a + x_i + h_i) - \Phi(a + x_i)| < \prod_1^n |\Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i)|$$

toutefois que $0 < |h_i| < \delta$ et que les arguments de la fonction Φ sont situés dans l'intervalle $(-r, r)$.

En ce cas $\Phi(x)$ est de la forme

$$\Phi(x) = A\int_0^x e^{-Bu^2}du + C \qquad (A > 0, B > 0).$$

En ajoutant aux hypothèses les égalités $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$, *on est*

ramené à la formule

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du.$$

(Reçu le 8 mars 1956.)

Ouvrages cités

[1] F. Bernstein, Über das Gaußsche Fehlergesetz, *Math. Ann.*, **64** (1907), p. 417—448.
[2] W. Sierpiński, Sur les fonctions convexes mesurables, *Fund. Math.*, 1 (1920), p. 125—129.
[3] S. Saks, *Theory of the integral* (Warszawa—Lwów, 1937).

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. Часар (Будапешт)

(Резюме)

В работе доказывается следующая теорема:

Пусть $\Phi(x)$ — неубывающая функция в интервале $(-r, r)$ $(0 < r \leq +\infty)$, обладающая следующим свойством: каковы же были числа x_i $(i = 1, \dots, n; n = 2, 3)$, удовлетворяющие условию $\sum_1^n x_i = 0$, и вещественное число a, существует такое $\delta > 0$, что

$$\prod_1^n |\Phi(a + x_i + h_i) - \Phi(a + x_i)| \leq \prod_1^n |\Phi(x_i + h_i) - \Phi(x_i)|),$$

если только $0 < |h_i| < \delta$ и аргументы функции Φ попадают в интервал $(-r, r)$. Тогда функция $\Phi(x)$ может быть записана либо в виде

$$\Phi(x) = \begin{cases} A, & \text{если } -r < x < 0, \\ B, & \text{если } 0 < x < r \end{cases} \qquad (A < B),$$

либо в виде

$$\Phi(x) = A \int_0^x e^{-Bu^2} du + C \qquad (A \geq 0, \ B \geq 0).$$

Наиболее важное вспомогательное средство доказательства есть следующая теорема, обобщающая теорему В. Серпинского о непрерывности измеримых

выпуклых функций: Пусть $\varphi(x)$ есть определенная в открытом интервале I измеримая вещественная функция, принимающая конечные или бесконечные значения. Предположим, что I может быть представлен в виде $I = R + Z$, где мера Z равна нулю, а на множестве R функция $\varphi(x)$ выпукла, т. е. $\varphi(x)$ конечна в случае $x \in R$ и

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}, \qquad \text{если} \qquad x, y, \frac{x+y}{2} \in R.$$

Тогда существует конечная, непрерывная и выпуклая в интервале I функция $\varphi^*(x)$, совпадающая на множестве R с $\varphi(x)$.

ÜBER EINE LÖSUNGSMETHODE GEWISSER FUNKTIONALGLEICHUNGEN

Von

I. FENYŐ (Budapest)

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

Jüngst hat J. ACZÉL[1] eine allgemeine Methode zur Lösung gewisser Funktionalgleichungen mitgeteilt, welche die Lösung einer sehr weiten Klasse von Gleichungen liefert. Außer dieser verfügen wir auch über eine andere allgemeine Methode, die im wesentlichen darin besteht, daß durch Bildung geeigneter partieller Ableitungen die Funktionalgleichung in eine Differentialgleichung oder in ein Differentialgleichungssystem übergeführt wird. Diese Methode ist in den meisten Fällen sehr einfach, sie kann aber bloß dann benützt werden, wenn wir die Funktionalgleichung in der Klasse der genügend oft differenzierbaren Funktionen suchen, und die in der zu lösenden Gleichung auftretenden gegebenen Funktionen auch genügend oft differenzierbar sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, daß mittels der Theorie der Distributionen die Methode der Überführung von Funktionalgleichungen in Differentialgleichungen unter äußerst geringen Voraussetzungen leicht durchführbar ist. Wir werden im allgemeinen gar nicht die Funktionenlösungen, sondern die Distributionenlösungen der Funktionalgleichung bestimmen. Wollen wir doch von Funktionenlösungen sprechen, so erhalten wir die Existenz der Lösung in der Klasse der integrierbaren Funktionen.

Im folgenden werden wir die einfachsten Tatsachen der Distributionentheorie in der durch L. SCHWARTZ ausgearbeiteten Form benützen. Auch die Bezeichnungen und die Nomenklatur sind diejenigen, welche L. SCHWARTZ in seiner Monographie (*Théorie des Distributions*. I (Paris, 1950), II (Paris, 1951)) eingeführt hat.[2]

Wir schicken einige Begriffe und Definitionen voraus.

[1] J. ACZÉL, Grundriß einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1953), S. 119—132.

[2] Im folgenden wollen wir dieses Werk unter der Bezeichnung L. SCH. I bzw. L. SCH. II zitieren.

§ 1

DEFINITION 1. Es sei T eine beliebige, in einem Bereich von R^2 definierte Distribution und $u(x) \in D_x$ eine festgehaltene Funktion. Wir werden unter *linksseitigem multiplikativem Produkt von u und T eine* in R^1 definierte und mit $(u)T$ bezeichnete Distribution verstehen, welche folgendermaßen definiert ist:

$$(1.1) \qquad (u)T(\varphi) = T[u(x)\varphi(y)] \qquad (\varphi(y) \in D_y).$$

Daß $(u)T$ wahrlich eine Distribution ist, ist trivial.

Ganz analog definieren wir das *rechtsseitige multiplikative Produkt* von T mit einer beliebigen Funktion $v(y)$ aus der Funktionenklasse D_y.

Im besonderen Fall, wenn T das direkte Produkt von R und S ist (wo R und S Distributionen in R^1 sind), ist das linksseitige multiplikative Produkt von $v(x) \in D_x$ und $R \times S$ die folgende Distribution:

$$(1.2) \qquad (v)R \times S = R(v) \cdot S.$$

Sie ist also die Distribution S multipliziert mit der Zahl $R(v)$.

DEFINITION 2. Es sei T eine Distribution in einem Bereich von R^1, α und β sind reelle oder komplexe, von Null verschiedene Zahlen. Unter $T_{\alpha x+\beta y}$ wollen wir folgende, in R^2 definierte Distribution verstehen:

$$T_{\alpha x+\beta y}(\varphi) = \beta^{-1} T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z; \beta^{-1}t - \alpha\beta^{-1}z)\, dz\right] = \alpha^{-1} T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha^{-1}t - \beta\alpha^{-1}z; z)\, dz\right]$$

$$(1.3) \qquad (\varphi(x, y) \in D_{xy}).$$

Wenn $\varphi \in D_{xy}$, so ist $\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z; \beta^{-1}t - \alpha\beta^{-1}z)dz \in D_t$, und konvergiert die Folge $\varphi_j(x, y)$ nebst allen partiellen Ableitungen gleichmäßig gegen 0, so konvergiert auch die Folge $\psi_j(t)$ nebst allen Ableitungen gleichmäßig gegen 0. Daraus folgt, daß das unter (1.3) definierte lineare und homogene Funktional wahrlich eine Distribution ist. Ist der Träger von T der Bereich $\mathfrak{M}$, so ist der Träger von $T_{\alpha x+\beta y}$ die durch die Relation $\alpha x + \beta y \in \mathfrak{M}$ definierte Menge.[3]

Wir bilden die partiellen Ableitungen von $T_{\alpha x+\beta y}$:

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial T_{\alpha x+\beta y}}{\partial x}(\varphi) &= -T_{\alpha x+\beta y}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = -\alpha^{-1} T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\alpha^{-1}t - \beta\alpha^{-1}z;\, z)dz\right] = \\ &= -T\left[\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha^{-1}t - \beta\alpha^{-1}z; z)dz\right] = \alpha T'_{\alpha x+\beta y}(\varphi) \qquad (\varphi \in D_{xy}). \end{aligned}$$

[3] Im Spezialfall, wenn $T(f) = \int f(x)a(x)dx$ ist, so ist $T_{\alpha x+\beta y}(\varphi(x, y)) = \iint \varphi(x, y)a(\alpha x + \beta y)dx\,dy$.

Ebenso erhalten wir die folgende Relation:

$$\frac{\partial T_{\alpha x+\beta y}}{\partial y} = \beta T'_{\alpha x+\beta y}. \tag{1.5}$$

Ist $\alpha = \beta = 1$ bzw. $\alpha = 1$, $\beta = -1$, so wird aus (1.4) und (1.5)

$$\frac{\partial T_{x+y}}{\partial x} = \frac{\partial T_{x+y}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial T_{x-y}}{\partial x} = -\frac{\partial T_{x-y}}{\partial y}. \tag{1.6}$$

DEFINITION 3. Wir betrachten die Distributionen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ als linear unabhängig, falls es eine Funktion $\varphi \in D$ gibt, so daß die mit ihr gebildete „Wronskische Determinante" von Null verschieden ist, d. h

$$\begin{vmatrix} S_1(\varphi) & S_2(\varphi)\ldots & S_n(\varphi) \\ S_1'(\varphi) & S_2'(\varphi)\ldots & S_n'(\varphi) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ S_1^{(n-1)}(\varphi) & S_2^{(n-1)}(\varphi)\ldots & S_n^{(n-1)}(\varphi) \end{vmatrix} \neq 0.^4 \tag{1.7}$$

DEFINITION 4. Es seien S und T zwei, in einem Bereich von R^1 definierte Distributionen. Ihre *direkte Summe* ist eine in R^2 definierte und mit $S \dotplus T$ bezeichnete Distribution folgendermaßen definiert:

$$(S \dotplus T)(\varphi) = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dy\right] + T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dx\right] \qquad (\varphi \in D_{xy}). \tag{1.8}$$

Es bedarf keines Beweises, daß das unter (1.8), im Funktionenraum D_{xy} definierte lineare und homogene Funktional eine Distribution ist. Sie besitzt folgende Eigenschaft:

$$\frac{\partial^2 (S \dotplus T)}{\partial x \partial y} = 0. \tag{1.9}$$

BEWEIS.

$$\frac{\partial (S \dotplus T)}{\partial x}(\varphi) = -(S \dotplus T)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dy\right] - T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy\right] =$$

$$= -S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dy\right] \qquad (\varphi(x, y) \in D_{xy}),$$

denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy = [\varphi(x, y)]_{y=-\infty}^{y=+\infty} \equiv 0.$$

[4] Existieren n Zahlen so, daß $c_1 S_1 + c_2 S_2 + \ldots + c_n S_n \equiv 0$ (mindestens ein $c_i \neq 0$) ist, so ist die Determinante (1.7) gewiß gleich 0 und umgekehrt. Ob die Gültigkeit der Relation (1.7) notwendig für die lineare Unabhängigkeit der Distributionen (im Sinn $c_1 S_1 + \ldots + c_n S_n = S \not\equiv 0$) ist, ist eine offene Frage.

Die rechte Seite ist aber unabhängig von y,[5] und deshalb ist die Behauptung (1.9) richtig.

Definiton 5. Betrachten wir diejenigen, zur Funktionenklasse D_{xy} gehörenden Funktionen, deren Träger keinen gemeinsamen Punkt mit der X und Y Achse haben. Die Klasse dieser Funktionen sei mit G_{xy} bezeichnet. Es ist $G_{xy} \subset D_{xy}$. Betrachten wir die in einem Bereich von R^1 definierte Distribution T. Wir bilden aus ihr folgende, durch T_{xy} bezeichnete und in R^2 bestimmte Distribution folgendermaßen:

$$T_{xy}(\varphi) = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u, tu^{-1})u^{-1}du\right] = -T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)u^{-1}du\right] \tag{1.10}$$
$$(\varphi(x,y) \in G_{xy}).$$

Die Funktion $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(n, tu^{-1})u^{-1}du$ $\left(\text{und auch } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)u^{-1}du\right)$ gehört gewiß der Funktionenklasse D_t, daher ist (1.10) eine Distribution. Wir werden folgende Eigenschaften dieser Distribution benützen:

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = yT'_{xy} \quad \text{und} \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = xT'_{xy}. \tag{1.11}$$

Um dies einzusehen, haben wir einerseits:

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}(\varphi) = -T_{xy}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = T\left[\int_{\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{t}{u}, u\right)u^{-1}dt\right] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\varphi(tu^{-1}, u)du\right].$$
$$(\varphi(x,y) \in G_{xy}).$$

Anderseits ist

$$yT'_{xy}(\varphi) = T'_{xy}[\varphi(x,y)y] = -T'\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)u\,u^{-1}du\right] =$$
$$= T\left[\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)du\right],$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen. Die zweite Identität von (1.11) kann man in analoger Weise verifizieren.

Definition 6. Es sei T wieder eine Distribution in R^1 und α eine beliebige, von 0 verschiedene reelle oder komplexe Zahl. Unter der *Kontraktion*

[5] L. Sch. I, S. 55.

von der Größe α der Distribution T verstehen wir eine mit $\varkappa_\alpha T$ bezeichnete Distribution R^1, deren Definition die folgende ist:

(1. 12) $$\varkappa_\alpha T(\varphi) = \alpha^{-1} T[\varphi(t\alpha^{-1})] \qquad (\varphi(t) \in D_t).$$

Die Ableitung von $\varkappa_\alpha T$ läßt sich folgendermaßen bilden:

(1. 13) $$(\varkappa_\alpha T)' = \alpha \varkappa_\alpha T'.$$

Das ist fast selbstverständig, denn gilt $\varphi \in D$, so haben wir

$$(\varkappa_\alpha T)'(\varphi) = -(\varkappa_\alpha T)(\varphi') = -\alpha^{-1} T[\varphi'(\alpha^{-1}t)] = T'[\varphi(\alpha^{-1}t)] = \alpha(\varkappa_\alpha T')(\varphi).$$

§ 2

Als erstes Beispiel sei folgende, durch T. Levi-Civita[6] und P. Stäckel[7] gelöste Funktionalgleichung diskutiert:

(2. 1) $$f(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x) Y_\nu(y),$$

wo f, X_ν, Y_ν unbekannte Funktionen sind. Diese Gleichung wurde von Levi-Civita und Stäckel unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit dieser gelöst. Wir wollen jetzt f, X_ν, Y_ν als *unbekannte Distributionen* auffassen, und statt (2. 1) folgende Distributionengleichung betrachten:

(2. 2) $$f_{x+y} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu.$$

Setzen wir voraus, daß die Y_ν linear unabhängig sind. Derivieren wir beide Seiten von (2. 2), so erhalten wir gemäß einem Satz von L. Schwartz[8]

$$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y_\nu \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f_{x+y}}{\partial y} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y'_\nu.$$

Daraus folgt aber wegen (1. 6):

$$\sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y'_\nu.$$

Differenzieren wir diese Gleichung $(n-1)$-mal, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

(2. 3) $$\sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y_\nu^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu^{(p+1)} \qquad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

[6] T. Levi-Civita, Sulla funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y) = \sum_{1}^{n} X_\nu(x) Y_\nu(y)$, *Atti della Reale Acc. dei Lincei,* **22** (1913), S. 181—183.

[7] P. Stäckel, Sulla equazione funzionale, *Atti della Reale Acc. dei Lincei,* **22** (1913), S. 392—393.

[8] L. Sch. I, S. 111, Théorème VII.

Es sei nun die Funktion $\psi_0(y) \in D_y$ so gewählt, daß die „Wronskische Determinante" von Null verschieden ist (siehe Definition 3 und (1. 7)). Bilden wir das rechtsseitige multiplikative Produkt beider Seiten von (2. 3) mit $\psi_0(y)$, so gelangen wir gemäß (1. 2) zum folgenden Differentialgleichungssystem:

$$\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{(p)}(\psi_0) X_\nu' = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{(p-1)}(\psi_0) X_\nu \qquad (p=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wegen der Voraussetzung über die Y_ν und ψ_0 ist dieses System mit dem folgenden äquivalent:

$$X_i' = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} X_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2. 4}$$

Die Koeffizienten A_{ik} sind reelle oder komplexe Zahlen. Dieses Gleichungssystem hat bekanntlich[9] keine andere Lösung als unendlich oft differenzierbare Funktionen. Ebenso kann man beweisen, daß auch die Y_ν nur Funktionen sein können. Dann muß aber wegen (2. 2) auch f_{x+y}, folglich auch f eine unendlich oft differenzierbare Funktion sein. Nach Feststellung dieser Tatsache kann man dem Verfahren von LEVI-CIVITA oder von STÄCKEL folgen, und die Lösungsfunktionen — unter anderen — durch Lösung von (2. 4) bestimmen.

Die klassische Funktionalgleichung

$$f_{x+y} = f \times f \tag{2. 5}$$

ist Spezialfall von (2. 2). Sie hat nach unserem Satz keine anderen Lösungen als Funktionen.

Ein weiterer Spezialfall von (2. 2) ist das folgende Funktionalgleichungssystem, welches von OSGOOD[10] untersucht wurde:

$$S(x+y) = S(x)\,C(y) + C(x)\,S(y), \quad C(x+y) = C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y).$$

OSGOOD behauptete, daß die allgemeinen Lösungen im Bereich der stetigen Funktionen die folgenden Funktionen sind: $S(x) = e^{ax} \sin \mu x$, $C(x) = e^{ax} \cos \mu x$. Auch im Bereich der Distributionen liefern obige Funktionen die allgemeine Lösung des Systems.

B. KERÉKJÁRTÓ stellte die Frage:[11] welche stetigen Lösungen besitzt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
f_{11}(x+y) &= f_{11}(x) f_{11}(y) + f_{12}(x) f_{21}(y),\\
f_{12}(x+y) &= f_{11}(x) f_{12}(y) + f_{12}(x) f_{22}(y),\\
f_{21}(x+y) &= f_{21}(x) f_{11}(y) + f_{22}(x) f_{21}(y),\\
f_{22}(x+y) &= f_{21}(x) f_{12}(y) + f_{22}(x) f_{22}(y).
\end{aligned}$$

[9] L. SCH. I, S. 139.

[10] W. T. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie. I* (1912), S. 582.

[11] B. KERÉKJÁRTÓ, Aufgabe 4, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), S. 369.

F. KÁRTESZI und F. ZIGÁNY[12] bewiesen, daß die Lösung des Kerékjártóschen Systems auf die Lösung des Osgoodschen Systems und auf die Lösung der Funktionalgleichungen (2. 5), (1. 3) ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) zurückgeführt werden kann. Da aber diese als allgemeinste Distributionenlösung unendlich oft differenzierbare Funktionen besitzen, so kann das Kerékjártósche System auch keine anderen Lösungen haben.

§ 3

Als zweites Beispiel betrachten wir die folgende Funktionalgleichung:

$$f(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = X(x) + Y(y). \tag{3. 1}$$

Diese enthält als Spezialfall die von J. ACZÉL[13] gelöste Funktionalgleichung, falls $X = \beta_1 f(x) + p_1(x)$ und $Y = \beta_2 f(y) + p_2(y) + p_0$ ist.

Wir bilden statt (3. 1) die Distributionen-Funktionalgleichung

$$f_{\alpha_1 x + \alpha_2 y} = X + Y. \tag{3. 2}$$

Wir erhalten nach (1. 4) und (1. 8):

$$\alpha_1 f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y} = X'.$$

Diese ist aber von y unabhängig. In ganz ähnlicher Weise ist die Distribution $f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y}$ wegen

$$\alpha_2 f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y} = Y'$$

auch von y unabhängig, d. h. $f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y}$ ist mit einer Konstante identisch. Daraus folgt, daß auch f' eine Konstante ist. Denn hat die Funktion $\psi(t) \in D$ die Form $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha_1^{-1} t - \alpha_1^{-1} \alpha_2 z; z) dz$, so liefert f wegen (1. 3) immer denselben Wert. Ist $\psi\,(\in D)$ nicht von der geschilderten Form, dann kann man immer eine Folge von Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \ldots (\psi_n \in D)$ finden,[14] deren Glieder vom Faltungstypus, also in angegebener Form schreibbar sind und deren gleichmäßiger Limes ψ ist. Für jedes Glied dieser Folge gibt f denselben Wert; da f ein stetiges Funktional ist, liefert es auch für ψ diesen gemeinen Wert.

Nun ist f' eine Konstante, und daher f eine Funktion von der Form $ax + b$. Es sind nun X' und Y' auch Konstanten, also X und Y lineare Funktionen.

12 F. KÁRTESZI und F. ZIGÁNY, Lösung der Aufgabe 4, *Mat. Fiz. Lapok*, 49 (1942), S. 292—296.

13 J. ACZÉL, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comm. Math. Helv.*, 21 (1948), S. 247—252.

14 L. SCH. I, S. 22, Théorème I.

In analoger Weise kann man die Funktionalgleichung

(3. 3) $$f(\alpha x+\beta y+\gamma)=\alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma$$

lösen, welche in der Lösungsmethode der allgemeineren Gleichung

$$f(\alpha x+\beta y+\gamma)=\Phi[f(x), f(y)]$$

eine wichtige Rolle spielt, denn sie kann auf (3. 3) zurückgeführt werden (Φ ist eine stetige, in beiden Argumenten streng monotone Funktion).[15]

Noch allgemeiner ist die folgende Gleichung:

$$f(\alpha x+\beta y+\gamma)=X(x)+Y(y),$$

wo f, X und Y unbekannte Funktionen sind. Die entsprechende Distributionengleichung lautet folgendermaßen:[16]

$$\tau_\gamma f_{\alpha x+\beta y} = X \dotplus Y.$$

Die Lösungsmethode dieser ist die wörtliche Wiederholung des vorigen Lösungsprozesses.

Etwas schneller gelangen wir zum Ziel, falls wir nicht die Distributionenlösungen, sondern die integrierbaren Funktionenlösungen von (3. 1) suchen. Die zu den Funktionen $f(t)$ und $X(x)$ gehörigen Distributionen seien f und X, y sei ein beliebiger festgehaltener Wert. Dann kann man statt (3. 1) folgendes schreiben:

$$\tau_{\alpha_2 y}(\varkappa_{\alpha_1} f)=X+Y(y).$$

Bilden wir an beiden Seiten die Distributionenableitung:

$$\tau_{\alpha_2 y}(\varkappa_{\alpha_1} f)'=X'.$$

Die rechte Seite hängt von y nicht ab, d. h. ist $(\varkappa_{\alpha_1} f)'$ gegen jede Translation invariant, also ist sie eine Konstante.[17] Das ist gemäß Definition 6 damit gleichbedeutend, daß f' auch eine Konstante ist. Damit ist alles erledigt.

§ 4

Die von G. VAN DER LYN[18] gelöste Funktionalgleichung lautet folgendermaßen:

(4. 1) $$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

[15] J. ACZÉL, Sur une équation fonctionnelle, *Publ. de l'Inst. Math. de l'Ac. Serbe des Sciences*, **2** (1948), S. 257—262.

[16] τ ist der Translationsoperator. Siehe L. SCH. I, S. 55.

[17] L. SCH. I, S. 56.

[18] G. VAN DER LYN, Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$, *Mathematica (Cluj)*, **16** (1939), S. 91—96. — *Bemerkung bei der Korrektur.* Herr ACZÉL machte mich aufmerksam, daß diese Funktionalgleichung nicht von G. VAN DER LYN, sondern von W. H. WILSON (*Bull. Amer. Math. Soc.*, **26** (1920), S. 300—312) zuerst behandelt wurde.

Die entsprechende Distributionengleichung ist

(4. 2) $$f_{x+y}+f_{x-y}=2f\times g$$

(siehe Definition 2). Aus ihr folgt wegen (1. 4) und (1. 5)

(4. 3) $$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}+\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}=2f'\times g,$$

(4. 4) $$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial y}+\frac{\partial f_{x-y}}{\partial y}=2f\times g'.$$

Durch Addition und Substraktion von (4. 3) und (4. 4) erhalten wir wegen (1. 6) folgendes Gleichungssystem:

(4. 5) $$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}=f'\times g+f\times g',$$

(4. 6) $$\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}=f'\times g-f\times g'.$$

Nun sei $\varphi(x)\in D_x$ eine Funktion, für welche $f(\varphi)\neq 0$. Wir halten sie fest und bilden das linksseitige multiplikative Produkt von (4. 5) und (4. 6) mit

(4. 7) $$(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}=f'(\varphi)g+f(\varphi)g',$$

(4. 8) $$(\varphi)\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}=f'(\varphi)g-f(\varphi)g'.$$

Nun bilden wir die „zum Nullpunkt symmetrischen Distributionen" der in (4. 8) betrachteten Distributionen:[19]

(4. 9) $$(\varphi)\overline{\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}}^{\vee}=f'(\varphi)\check{g}-f(\varphi)\check{g}'.$$

Es is leicht einzusehen, daß

$$(\varphi)\overline{\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}}^{\vee}=(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}.$$

Denn ist $\psi(y)\in D_y$, so ist wegen der Definition der Operation folgendes gültig:

$$(\varphi)\overline{\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}}^{\vee}(\psi)=(\varphi)\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}(\check{\psi})=f\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(u)\psi[-(u-t)]\,du\right]=$$

$$=f\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(u)\psi(t-u)\,du\right]=(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}(\psi).$$

[19] L. Sch. II, S. 23.

Schreiben wir also statt (4.9)

$$(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x} = f'(\varphi)\check{g} - f(\varphi)\check{g'}.$$

Das gibt aber mit (4.7) folgendes:

$$f(\varphi)(g+\check{g'}) + f'(\varphi)(g-\check{g}) = 0.$$

Bemerken wir nun: falls $\psi(y) \in D$, so ist

$$\check{g'}(\psi) = g'(\check{\psi}) = -g((\check{\psi})') = -g(\check{\psi'}) = -(\check{g})'(\psi),$$

also $\check{g'} = -(\check{g})'$; dadurch gelangen wir zur Differentialgleichung

$$f(\varphi)(g-\check{g})' + f'(\varphi)(g-\check{g}) = 0.$$

Das ist in $h = g - \check{g}$ eine homogene Gleichung, welche keine anderen Lösungen als Funktionen hat. Nun ist g eine beliebig oft differenzierbare Funktion und wegen (4.7) auch f eine solche Funktion. Das bedeutet, daß die betrachtete Gleichung keine anderen Lösungen als die von VAN DER LYN angegebene besitzt.

§ 5

Zum Schluß betrachten wir die Gleichung

$$f(xy) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\, Y_\nu(y). \tag{5.1}$$

Ihr entspricht die folgende Distributionen-Funktionalgleichung:

$$f_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu,$$

wo f, X_ν, Y_ν unbekannte Distributionen sind. Wir setzen voraus, daß die Distributionen Y_ν unabhängig sind. Wegen (1.11) haben wir

$$y f'_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y_\nu \qquad \text{und} \qquad x f'_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y'_\nu.$$

Bilden wir das multiplikative Produkt der ersten Gleichung mit x, der zweiten mit y, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} x X'_\nu \times Y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times y\, Y'_\nu.$$

Wir derivieren beide Seiten nach y $(n-1)$-mal:

$$x \sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times (p\, Y_\nu^{(p)} + y\, Y_\nu^{(p+1)}) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wählen wir $\psi(y) \in D_y$ so, daß die „Wronskische Determinante“ der Y_ν nicht verschwinde. So erhalten wir folgendes Differentialgleichungssystem:

$$x \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{(p)}(\psi) X_\nu' = \sum_{\nu=1}^{n} [p\, Y_\nu^{(p)}(\psi) + Y_\nu^{(p+1)}(y\,\psi)]\, X_\nu.$$

Wegen der Voraussetzung über die Y_ν ist dieses mit dem folgenden äquivalent:

$$x X_i' = \sum_{\nu=1}^{n} A_{i\nu} X_\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5. 2}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt, wie bekannt, wegen der singulären Stelle $x = 0$ nicht nur Funktionen, sondern auch Distributionen als Lösungen.[20] Diese Distributionenlösungen können wir aber meiden. Denn beschränken wir den Definitionsbereich der unbekannten Distributionen auf einen solchen, für welchen $x \neq 0$, so ist (5. 2) ein homogenes Differentialgleichungssystem ohne singuläre Stelle, die Koeffizienten der X_ν sind unendlich oft differenzierbare Funktionen. Will man sie aber fortsetzen in solche Bereiche, welche Punkte der Koordinatenachsen enthalten, so treten solche Distributionen auf, welche die Derivierten der Dirac δ oder die „partie fini“ von Hadamard gewisser Funktionen enthalten. Diese verschwinden in genügend „schmalen“, mit den Achsen gemeinsame Punkte besitzenden Bereichen; denn f_{xy} ist nur für die Funktionen G_{xy} bestimmt, sie verschwinden aber in diesen Bereichen.

Ebenso gewinnt man, daß die Y_ν auch nur unendlich oft differenzierbare Funktionen sein können, und daher ist f auch eine solche Funktion. Damit ist alles erledigt.

Ist $n = 1$ und suchen wir die integrierbaren Funktionenlösungen der Gleichung

$$f(xy) = X(x) Y(y), \tag{5. 3}$$

so können wir wieder etwas kürzer zum Ziel gelangen. y sei ein beliebiger Parameter ($y \neq 0$), f und X seien die zu den Funktionen $f(t)$ und $X(x)$ gehörigen Distributionen. So läßt sich (5. 3) auch folgenderweise schreiben:

$$\varkappa_y f = Y(y) X.$$

Daraus folgt (siehe (1. 13))

$$y \cdot \varkappa_y f'(\varphi) = Y(y) \cdot X(\varphi) \qquad (\varphi \in D_x)$$

oder

$$\frac{y}{Y(y)} \varkappa_y f'(\varphi) = X(\varphi),$$

[20] L. Sch. I, S. 130.

vorausgesetzt, daß $Y(y) \neq 0$ ist. Nun ist die rechte Seite dieser Gleichung von y unabhängig, d. h. f' gegen die Transformation $\frac{y}{Y(y)} \varkappa_y$ invariant. Daraus folgt

$$\frac{y}{Y(y)} \varkappa_y f' = \frac{1}{Y(1)} f' \qquad \text{oder} \qquad y \cdot \varkappa_y f' = \frac{Y(y)}{Y(1)} f'.$$

Nach Definition 6 und einem Satz von L. SCHWARTZ[21] ist aber $y \cdot \varkappa_y f'(\varphi)$ unendlich oft differenzierbar nach y in jedem Intervall, wo y nicht verschwindet. Das ist nur so möglich, falls $Y(y)$ auch eine solche Funktion ist. Damit ist das Problem gelöst.

Hier wurde vorausgesetzt, daß $Y(1) \neq 0$ ist. Falls $Y(1) = 0$ ist, so ergibt sich aus (5. 3) $f(x) \equiv 0$. In diesem Fall gewinnen wir also bloß die triviale Lösung.

Unsere zusammenfassende Behauptung ist also, daß die von uns betrachteten Funktionalgleichungen bloß durch mit unendlich oft differenzierbaren Funktionen identische Distributionen befriedigt werden können.[22]

(Eingegangen am 8. März 1956.)

[21] L. SCH. I, S. 104 Théorème V.

[22] *Nachträgliche Bemerkung.* Manche hier behandelte Funktionalgleichungen könn[en] durch geeignete Veränderlichentransformationen in einfachere und schon früher behande[lte] Gleichungen überführt werden. Unser Ziel war aber, die Anwendungsart der Methode [zu] illustrieren.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Феньё (Будапешт)

(Резюме)

Цель работы—применение обобщенных функций Л. Шварца к решению функциональных уравнений. Основные определения и обозначения совпадают с теми, которые применял Л. Шварц в своей известной монографии. Исходя из них, работа дает следующие определения:

Определение 1. Пусть T определенная в некоторой области R^2 обобщенная функция и $u(x) \in D_x$. Тогда под левым мультипликативным произведением T с u понимается обозначаемая через $u(T)$ и определенная в R^2 такая обобщенная функция, что

$$(u)\, T(\varphi) = T[u(x), \varphi(y)] \qquad (\varphi(y) \in D_y).$$

Аналогично определяется правое мультипликативное произведение.

Определение 2. Пусть T определенная в некоторой области R^2 обобщенная функция, $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ любые числа. Тогда $T_{\alpha x + \beta y}$ есть определенная в R^2 следующим образом обобщенная функция:

$$T_{\alpha x+\beta y}(\varphi) = \frac{1}{\beta}\, T\left[\int_{\alpha}^{+\alpha} \varphi\left(z, \frac{1}{\beta} t - \frac{\alpha}{\beta} z\right) dz\right] \qquad (\varphi(x, y) \in D_{xy}).$$

Она обладает тем свойством, что

$$\frac{\partial T_{\alpha x+\beta y}}{\partial x} = \alpha T'_{\alpha x+\beta y}.$$

Определение 3. Определенные в R^1 обобщенные функции $S_1, \ldots, S_n$ называются независимыми, если существует такая $\varphi \in D$, что

$$\det\left(S_i^k(\varphi)\right)_{i=1,\ldots,n}^{k=0,\ldots,n-1} \neq 0.$$

Определение 4. Пусть S и T определенные в R^1 обобщенные функции. Их прямая сумма есть определенная в R^2 и обозначенная через $S \dot{+} T$ такая определенная функция, что

$$(S \dot{+} T)(\varphi) = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dy\right] + T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dx\right] \qquad (\varphi(x, y) \in D_{xy}).$$

Имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 (S \dot{+} T)}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Определение 5. Пусть $G_{xy} \subset D_{xy}$ есть множество функций, опоры которых принадлежат множеству, дополнительному к осям координат. Если T некоторая обобщенная функция на R^1, из нее производится обобщенная функция T_{xy} на R^2 так, что

$$T_{xy}(\varphi) = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(u, \frac{t}{u}\right) \frac{1}{u}\, du\right] \qquad (\varphi(x, y) \in G_{xy}).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = y T'_{xy} \quad \text{и} \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = x T'_{xy}.$$

Используя предыдущие определения, работа в качестве примера исследует следующие уравнения:

$$1^\circ \quad f_{x+y} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu,$$

где f, X_ν и Y_ν неизвестные обобщенные функции. Методом приведения к системе дифференциальных уравнений работа доказывает, что каждая обобщенная функция, решающая это уравнение, может быть отождествлена с бесконечно дифференцируемой обычной функцией.

$$2^\circ \quad \tau_\gamma f_{\alpha x+\beta y} = X \dot{+} Y.$$

Каждое решение и этого уравнения может быть отождествлено с бесконечно дифференцируемой обычной функцией.

$$3^\circ \quad f_{x+y} + f_{x\ y} = 2f \times g$$

также имеет только решение, соответствующее бесконечно дифференцируемой функции.

Решения уравнения

$$4^\circ \quad f_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu,$$

если их искать среди обобщенных функций, опора которых принадлежит множеству, дополнительному к осям координат, также могут быть отождествлены с обычными бесконечно дифференцируемыми функциями.

ON THE SUM OF DISTANCES DETERMINED BY A POINTSET

By

L. FEJES TÓTH (Budapest)

(*Presented by* G. HAJÓS)

We shall prove the following

THEOREM 1. *The sum S_n of the $\binom{n}{2}$ distances determined by $n \geqq 2$ coplanar points satisfies the inequality*

$$S_n \leqq rn \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$$

where r denotes the circumradius of the points. Equality holds only if the points are the vertices of a regular n-gon.

This inequality yields immediately the estimation

$$S_n < \frac{dn^2}{\pi}$$

where d denotes the diameter of the circumcircle of the points. The constant π cannot be replaced by a greater one.

In order to prove our theorem we denote the points by $P_1, \ldots, P_n$. Fixing the points $P_2, \ldots, P_n$, we consider S_n as a function of the point P_1. Since the distances $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_1P_n}$ are convex functions of P_1, the same can be stated of S_n. It follows that S_n takes its maximum for a point P_1 lying on the boundary C of the circumcircle of the points. Therefore all points may be supposed to lie on C. Furthermore we suppose that C is a unit circle and that the cyclical order of the points is $P_1, \ldots, P_n$.

Introducing the notations $P_{n+1} = P_1, \ldots, P_{2n-1} = P_{n-1}$ we consider the sum

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_iP_{i+k}} = 2 \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{1}{2} \widehat{P_iP_{i+k}}$$

where k is an integer such that $1 \leqq k \leqq n-1$. In view of the inequalities $0 \leqq \frac{1}{2} \widehat{P_iP_{i+k}} \leqq \pi$ and the concavity of $\sin x$ for $0 \leqq x \leqq \pi$ we can apply Jensen's inequality, obtaining

$$s_k \leqq 2n \sin \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \widehat{P_iP_{i+k}} \right).$$

But since the arcs $\widehat{P_1 P_{1+k}}, \ldots, \widehat{P_n P_{n+k}}$ cover the circle C exactly k-times we have

$$s_k \leqq 2n \sin \frac{k\pi}{n}.$$

On the other hand, on account of the obvious relation $s_k = s_{n-k}$ and of the fact that for an even n the sum $s_{\frac{n}{2}}$ involves each distance $P_i P_{i+\frac{n}{2}}$ twice, we have for any $n \geqq 2$

$$2 S_n = \sum_{k=1}^{n-1} s_k.$$

Consequently

$$S_n \leqq n \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}.$$

This is just the inequality to be proved. The case of equality is obvious.

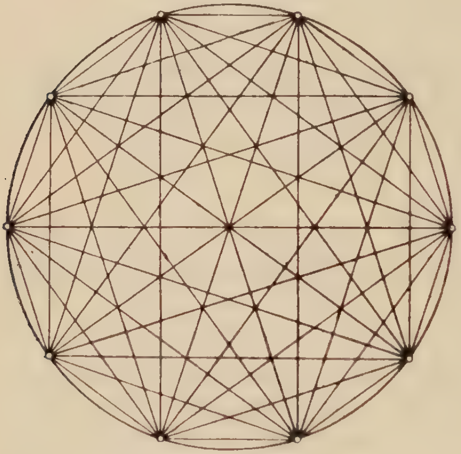


Fig. 1

Our figure displais the extremal configuration for $n = 10$. It is interesting to observe how the segments $P_1 P_{1+k}, \ldots, P_n P_{n+k}$ form one or more (convex or star) polygons, according as n and k are or are not co-primes. The above proof is based essentially on the remark that S_n can be represented as the sum of the perimeters of such polygons which all take their maximum in the regular case.

The above method yields also the proof of the following fact: If $P_1, \ldots, P_n$ are n points on the perimeter of the unit circle, then the sum $T_n = \sum 1/\overline{P_i P_j}$ extended over the mutual distances of the points fulfils the inequality

$$T_n \geqq \frac{n}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cosec} \frac{\pi k}{n}$$

with equality only for the vertices of a regular n-gon.

Indeed, we have in view of the convexity of $\operatorname{cosec} x$ for $0 < x < \pi$.

$$2 T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} 1/\overline{P_i P_{i+k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \widehat{P_i P_{i+k}} \geqq \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cosec} \frac{\pi k}{n}.$$

Let us suppose a repelling force between the points, inversely proportional to the square of the distance. Then the position of equilibrium is cha-

racterised by the minimal value of T_n. Consequently the points must assume a regular position. The statical distribution of an electric charge on a circular conductor is, of course, the homogeneous one. It is interesting to find such a simple proof as the above one for the analogous property for discrete charges.

Concerning S_n we propose now the following general problem: to find the maximum of S_n/r for n points of an m-dimensional ($m \leqq n-1$) Euclidean space. The case $m=2$ has been settled above. The following inequality gives the solution for $m=n-1$ and yields a rather good bound for $m<n-1$.

THEOREM 2. *If S_n denotes the sum of the mutual distances of n points of the $n-1$-dimensional Euclidean space, then*

$$S_n \leqq n\sqrt{\binom{n}{2}}\, r$$

where r is the circumradius of the points. Equality holds only for the vertices of a regular simplex.

Especially, among all tetrahedra inscribed in a sphere the regular one has the greatest sum of the lengths of the edges.

For the vertices of a regular octahedron inscribed in a unit sphere we have $S_6 = 6+12\sqrt{2} = 22{,}97\ldots$, whilst the above inequality yields $S_6 < 6\sqrt{15} = 23{,}23\ldots$.

The proof is based on the consideration of the sum Q_n of the squares of the mutual distances. We suppose the circumsphere of the points $P_1, \ldots, P_n$ to be the unit sphere centred at O. Introducing the notations $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OP_i}$ and $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$, we have

$$2Q_n = \sum_{1\leqq i,j\leqq n} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^2 = \sum_{1\leqq i,j\leqq n} (\mathbf{e}_i^2 + \mathbf{e}_j^2 - 2\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = 2n\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i^2 - 2\mathbf{e}^2,$$

whence[1]

$$Q_n \leqq n^2,$$

with equality only if $|\mathbf{e}|=0$ and if the points lie all on the boundary of the unit sphere. But since the arithmetic mean doesn't exceed the quadratic one, we obtain the desired inequality

$$S_n \Big/ \binom{n}{2} \leqq \sqrt{Q_n \Big/ \binom{n}{2}} \leqq n \Big/ \sqrt{\binom{n}{2}}.$$

Equality holds only if the $\binom{n}{2}$ distances are equal, i. e. in the case indicated above.

[1] To this nice inequality my attention was called by E. MAKAI.

The estimation of S_n in 3-space deserves special attention. It is easy to show that in case of an increasing number of points distributed uniformly on the surface of a unit sphere we have $S_n/n^2 \to 2/3$. Collating this fact with the 2-dimensional case, it may be conjectured that

$$S_n < \frac{d\,n^2}{3}$$

where d denotes the diameter of the circumsphere of the points. Theorem 2 confirms this conjecture for $n \leqq 9$. For the vertices of a regular icosahedron of circumradius 1 we have

$$S_{12} = 12 + 30\left(\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}} + \sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}\right) = 94{,}5\ldots$$

whilst the conjectured inequality gives $S_{12} < 96$.

Let us now return to the two-dimensional case and consider points of power of the continuum distributed on the perimeter of the unit circle. Let $w(\varphi)$ be an L integrable weight function of the length of the arc φ. Then $w(\varphi)d\varphi$ can be interpreted as the number of points on the arc element $d\varphi$ and the integral

$$N = \int_0^{2\pi} w(\varphi)\, d\varphi$$

as the total number of points. The sum of the distances between the points of the arc elements $d\varphi_1$ and $d\varphi_2$ may be represented by

$$2 \sin \frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{2}\, w(\varphi_1) w(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 .$$

Therefore the integral

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin \frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{2}\, w(\varphi_1) w(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$

(involving each pair of arc elements twice) may be interpreted as the total sum of distances of the points.

On account of the above inequality $S_n < 2n^2/\pi$ one may conjecture that

$$S \leqq \frac{2}{\pi} N^2.$$

We shall give here a direct proof of this inequality.

Let the Fourier series of $w(\varphi)$ be

$$w(\varphi) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi).$$

Then the Fourier series of the function

$$F(\omega)=\int_0^{2\pi} w(\varphi)w(\varphi+\omega)d\varphi$$

becomes

$$F(\omega)\sim\pi\frac{a_0^2}{2}+\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)\cos\nu\omega.$$

Therefore, in virtue of Lebesgue's theorem concerning the integration of a Fourier series,

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\omega}{2}\,w(\varphi)w(\varphi+\omega)d\varphi d\omega=\int_0^{2\pi}\sin\frac{\omega}{2}\,F(\omega)d\omega$$

$$=2\pi a_0^2-4\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu^2+b_\nu^2}{4\nu^2-1}\leqq 2\pi a_0^2=\frac{2}{\pi}N^2.$$

Equality holds only if $a_\nu=b_\nu=0$ for $\nu\geqq 1$, i. e. if $w(\varphi)$ is almost everywhere a constant.

(Received 30 March 1956)

О СУММЕ РАССТОЯНИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМОЙ ТОЧЕК

Л. Фееш Тот (Будапешт)

(Резюме)

Основной результат работы — следующая теорема:

Пусть S_n обозначает сумму $\binom{n}{2}$ расстояний, определенных n ($n\geqq 2$) точками, расположенными в одной плоскости. S_n удовлетворяет следующему неравенству:

$$S_n\leqq rn\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n},$$

где r радиус наименьшего круга, покрывающего систему точек. Равенство имеет место лишь в том случае, если точки являются вершинами правильного n-угольника.

ON THE DETERMINATION OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS OF MORE DIMENSIONS BY THEIR PROJECTIONS

By

A. HEPPES (Budapest)

(*Presented by* A. RÉNYI)

In § 1 of this paper we consider only discrete distributions and in this part — for the sake of simplicity — we shall use the terminology of mass distributions. (The points of the distribution are those in which positive masses are concentrated.) We shall investigate the problem, by how many projections is a discrete mass distribution consisting of a finite number of mass points in two or more dimensions uniquely determined and how can the "parent" distribution be reconstructed if sufficiently many of its projections are known.

In § 2 we shall consider more general distributions and we shall show for distributions, belonging to a certain class, that in order to ensure unique determination it is necessary to know an infinite set of their projections.

The present paper uses the geometrical terminology of the n-dimensional Euclidean space. (For example, we shall call a subspace of one dimension a "straight line".)

Also here I express my sincerest thanks to Prof. G. HAJÓS and Prof. A. RÉNYI for reading my paper and to Ö. ÉLTETŐ for his valuable remarks.

§ 1

In a paper of A. RÉNYI [1] we can find the following theorem:

"A discrete mass distribution consisting of k distinct mass points with masses $m_1, m_2, \ldots, m_k$ situated in the points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$, respectively, is completely determined if its projections on $n+1$ different straight lines through the origin are given."

The proof of this theorem given in [1] is due to G. HAJÓS.

A method is also given in [1] for the determination of the points of the plane distribution. The paper [1] proves also a corresponding theorem about distributions consisting of points with equal masses in the space of three dimensions and about their projections on planes which are not parallel. On the other hand, it is proved with examples that the above mentioned theorems can not be improved in the direction that a distribution in the

plane or in the space consisting of k points could be uniquely determined by its projections on k or less (not parallel) straight lines or planes, respectively.

As a generalisation of these theorems of the mentioned paper we shall prove the following

THEOREM 1. *A distribution consisting of k arbitrary points in the n-dimensional space is uniquely determined if its projections on* $k+1$ *not parallel* $(n-1)$*-dimensional subspaces are given.*

DEFINITION. Let us call "projecting lines" those straight lines of the n-dimensional space, which connect the mass points with one of its projections, and let us call "knot points" those points in which $k+1$ different projecting lines meet.

PROOF. Let us consider a distribution consisting of k points in the n-dimensional space and its projections on $k+1$ not parallel $(n-1)$-dimensional subspaces. If we know the projections, then also the projecting lines and knot points are known. Every point of the parent distribution is a knot point because $k+1$ distinct projecting lines pass through it. We shall prove that no other knot points exist, i. e. every knot point is a mass point of the parent distribution. Let us choose an arbitrary knot point of the distribution. As the distribution consists of k mass points and, on the other hand, each of the $k+1$ projecting lines passing through the chosen knot point contains at least one mass point, thus necessarily the only common point of these projecting lines, the knot point has to be a mass point; furthermore there are at least two among the projecting lines which contain no other mass point.

The above proof shows also how the parent mass point system can be reconstructed very simply if $k+1$ of its projections are known; the only thing we have to do is to determine the knot points and to mark them as mass points with masses equal to the least of the masses of its own projections.

As shown in the paper of A. RÉNYI [1], there exists a set of k $(n-1)$-dimensional subspaces and two distributions, each of them consisting of a distinct set of k points and having the property that the projections of the two distributions on these subspaces are the same.

Let us consider, namely, a regular polygon with $2k$ sides in an arbitrary two-dimensional plane of the n-dimensional space. Passing along the periphery of this polygon and situating a unit mass in each of its vertices, let the mass points situated in every second vertex belong to the mass point systems A and B, respectively. Since the projection on an $(n-1)$-dimensional

subspace means a projection parallel to the normal vector of this subspace, the distributions A and B have the same projection on every $(n-1)$-dimensional subspace with a normal vector parallel to one of the sides of the regular polygon. So we get — corresponding to the sides of the regular $2k$-gon — k not parallel $(n-1)$-dimensional subspaces on which the projections of the distributions A and B, each of them consisting of k mass points, are identical.

It can be seen from this example that generally the distribution of k points is not uniquely determined by less than $k+1$ of its projections.

The same line of thought as used in the above proof of Theorem 1 leads to the following more general

THEOREM 1′. *A discrete mass distribution of k points in the n-dimensional space is uniquely determined by its projections on the respectively* $m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}$*-dimensional hyperplanes* $H_1, H_2, \ldots, H_{k+1}$, *if no two of these hyperplanes are contained in an* $(n-1)$*-dimensional subspace, i. e. if an arbitrary straight line of the n-dimensional space is perpendicular to not more than one of the hyperplanes* H_i $(i=1, 2, \ldots, k+1)$.

There is but a very little difference between the proof of this theorem and that of Theorem 1: we have to consider "projecting subspaces" instead of the projecting lines. The term "projecting subspace" is used for those $(n-m_i)$-dimensional subspaces which connect an arbitrary point of the mass distribution with its projection on the hyperplane H_i, furthermore every straight line of which is perpendicular to each straight line of the hyperplane H_i.

REMARKS.

1. Theorems 1 and 1′ state that the $k+1$ subspaces on which we consider the projections determining the parent distribution can be chosen independently of the arrangement of the k mass points and only with respect to the conditions of "independence", postulated by the theorem, and the system of subspaces can be practically fixed. — It is quite another question[1] how can a known distribution be characterised by a possibly few number of its projections. It is easy to see that every finite set of mass points of the n-dimensional space ($n \geqq 3$) can be uniquely characterised by two of its properly chosen $(n-1)$-dimensional projections. Let us choose, namely, such a system of rectangular coordinates $x_1, x_2, \ldots, x_n$ that the first coordinates (x_1) of every mass point should be distinct. Now let us construct

[1] My attention to this problem was called by J. MOLNÁR and also the solution, presented here, was given by him.

the projections of the distribution on the subspaces $x_{n-1}=0$ and $x_n=0$, respectively. Owing to the choice of the coordinate system only two of the projecting lines projecting the same point will be in the same plane and so the sought-for mass points are uniquely determined by their intersections. In case of a plane distribution a mass distribution consisting of a finite set of points can be characterised by three of its projections. Two distinct projections of them may be taken arbitrary. If the third projecting direction will be chosen so that no projecting line should pass through those points of intersection of the two former ones in which there is no mass point situated, then the distribution can be uniquely reconstructed. It is a further question[2] whether the mass point system can be determined if we know the projections themselves as "photographs" only, i. e. ignoring their situation in the space and the directions of projection, respectively. (In this case the determination is, of course, required only up to congruence.)

2. The statement of Theorems 1 and 1' is stronger than it seems at first glance. According to these theorems a mass distribution consisting of k points is uniquely determined by $k+1$ of its projections, fulfilling the conditions of the theorem, not only as a distribution of k points but also as an arbitrary distribution. That is to say, if the projections of a distribution of k points on $k+1$ corresponding subspaces are given, then the parent distribution can be determined without knowing the number of its points, i. e. there exists only one discrete mass distribution having the given projections. (It is clearly seen that the solution can not be a "non-discrete" distribution because every distribution having discrete projections on two subspaces with no common normal is a discrete one.)

3. Theorem 1 is valid also in the l^2 space[3] if projections on subspaces are considered which together with their normal vectors stretch out the whole space. Theorem 1' is also valid and can be proved with the same method if by a "projecting subspace" we mean a subspace passing through an arbitrary mass point and having the properties that every straight line of it is perpendicular to the subspace H_i in question and has a parallel straight line to every normal vector of H_i.

In what follows we shall show a procedure which enables us to construct two distinct finite discrete mass distributions of the n-dimensional or of the l^2 space, having coincident projections in given directions characterised by their normal vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$.

[2] This problem was raised by Prof. G. Hajós.

[3] I. e. in the Hilbert space of infinite sequences.

Let us consider those points of the space in question which can be represented in the form

$$\mathbf{p} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + c_k \mathbf{e}_k \cdot$$

where the coefficients c_i can — independently of each other — assume the two values 0 or 2^{i-1}. With such a choice of the coefficients no two points are coincident. We divide the set of points defined in this way into two subsets: the points belong to the sets C or D according to the number of coefficients different from 0 being even or odd, resp. Let us consider these points as mass points with unit masses; thus we get two distinct mass distributions C and D. It is easy to see that the projections of C and D from an arbitrary direction $\mathbf{e}_i$ are the same, namely to every point of C there corresponds one and only one point of D, and two such corresponding points of C and D differ only by the coefficient c_i. With respect to the coincidence of projections of the point $\mathbf{p}$ and $\mathbf{p} + c_i \mathbf{e}_i$ from the direction $\mathbf{e}_i$ and to the equality of their masses, the projections of the two distributions are the same.

In what follows the two distributions, constructed for k given directions (given in a prescribed order) by the procedure described above, will be called "distributions C and D belonging to the given directions". Naturally we have distinct pairs of distributions C, D corresponding to different rearrangements of the given directions.

Applying a similar construction we can find pairs of distributions, consisting of an enumerably infinite sequence of mass points, for a given enumerably infinite set of projecting directions of the n-dimensional or of l^2 space, which two distributions have the same projection in the given directions. Let us consider those points of the space again which can be represented in the form

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{e}_i$$

where the coefficients c_i can have only the two values 0 or 2^{i-1} — independently of each other — but with the restriction that in the representation of each point only a finite number of the coefficients c_i may be different from 0. The distributions C and D will be generated from this set, by the method used above. It is easy to see that these distributions have equal projections in every direction $\mathbf{e}_i$.

It follows from the latter fact that generally a distribution consisting of an enumerably infinite set of points can not be uniquely determined by giving an arbitrarily given enumerably infinite set of its projections.

It should be remarked, however, that here we passed beyond the limits of the ordinary probability theory, as in a probability space of KOLMOGOROV

there can not exist an enumerably infinite set of mutually disjoint events each of which has the same positive probability. Such a probability distribution can, however, be exist in a conditional probability space in the sense given by A. RÉNYI in [2]. Thus there exist discrete conditional probability distributions which can not be determined by a denumerable set of its projections.

§ 2

According to a theorem of H. CRAMÉR and H. WOLD [3] every probability distribution on the plane is uniquely determined by the totality of its linear projections. In this direction a further result is contained in A. RÉNYI's mentioned paper [1] which states that every probability distribution on the plane is uniquely determined by its projections on an arbitrary infinite set of straight lines passing through the origin if the characteristic function — transformed to polar coordinates r, φ — of the parent distribution is an analytic function of φ for every fixed value of r. It has been proved further by W. M. GILBERT [4] that if the moments of a distribution $F(x, y)$ are those of a determined moment problem, then $F(x, y)$ is determined by its projections on an infinite set of distinct lines through the origin. GILBERT gave an example of such a distribution on the plane which is not determined by an infinite set of its projections.

We raise the question, whether a "sufficiently regular" distribution could be determined by a finite set of its projections.

An answer in this direction is given by the following

THEOREM 2. *If the density function $f(x, y)$ of the probability distribution $F(x, y)$ on the plane exists and surpasses a positive lower bound $d > 0$ in some circle with radius $r > 0$, then for the unique determination of the distribution it is necessary to know the projections of $F(x, y)$ on an infinite set of distinct straight lines through the origin.*

PROOF. In order to prove our statement it will be shown that if only the projections of the distribution with the above mentioned properties on a finite set of straight lines are given, then there can be constructed such a function $m(x, y) \not\equiv 0$ that the distributions with the density functions $f(x, y)$ and $g(x, y) = f(x, y) + m(x, y)$, respectively, have both the same projections on the finite set of lines in question.

Let $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ denote the unit vectors perpendicular to the given straight lines and let us construct the distributions C and D belonging to them with the procedure shown in § 1. Both these distributions — as we

know — have the same projections on the mentioned set of straight lines and are consisting of 2^{k-1} points of unit mass, with distance greater than or equal to unity between each two of them; furthermore all these points are inside a circle with centre O and radius 2^k-1. Let (c_i, c_i') and (d_j, d_j') denote the coordinates of the points of the distributions C and D, respectively $(i=1, 2, \ldots, 2^{k-1}; j=1, 2, \ldots, 2^{k-1})$. Without the restriction of generality it can be supposed that $f(x, y)$ is greater than d inside the circle with centre O and radius r. Let the continuous function $t(x, y) \not\equiv 0$ have the properties $0 \leqq t(x, y) < d$ if $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}$ and $t(x, y) = 0$ if $\sqrt{x^2+y^2} \geqq \frac{1}{2}$.

It is easy to see that the integral of the function

$$t(x-c_i, y-c_i')-t(x-d_j, y-d_j')$$

vanishes along every straight line parallel to a direction $\mathbf{e}$, i. e. the projection of this function on a straight line perpendicular to the direction $\mathbf{e}$ is identically equal to 0 if the points (c_i, c_i') and (d_j, d_j') have the same projections on the straight line in question.

Let us now consider the function

$$m_1(x, y) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} t(x-c_i, y-c_i') \quad \text{and} \quad m_2(x, y) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} t(x-d_i, y-d_i').$$

By the above remark the projections of the function

$$\bar{m}(x, y) = m_1(x, y) - m_2(x, y)$$

vanish along every one of the given k straight lines. Also the function

$$m(x, y) = \bar{m}\left(\frac{2^k}{r}x, \frac{2^k}{r}y\right)$$

has projections on the mentioned straight lines identically equal to 0. This functions satisfies also the following conditions $|m(x, y)| < d$ if $\sqrt{x^2+y^2} < r$ and $m(x, y) \equiv 0$ if $\sqrt{x^2+y^2} \geqq r$. It follows from the restrictions on the function $f(x, y)$ that the function

$$g(x, y) = f(x, y) + m(x, y)$$

satisfies the condition $g(x, y) \geqq 0$. On the other hand, we have

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

because $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) = 0$, i. e. the function $g(x, y)$ is probability density function.

The two probability distributions with the density functions $f(x, y)$ and $g(x, y)$, respectively, have thus the same projections on the given set of the k straight lines because the projections of $m(x, y)$ are identically equal to 0 on this set what proves Theorem 2 completely.

(Received 16 May 1956)

References

[1] A. Rényi, On projections of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1952), pp. 132—142.

[2] A. Rényi, On a new axiomatic theory of probability, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 285—335.

[3] H. Cramér and H. Wold, Some theorems on distribution functions, *Journal London Math. Soc.*, **11** (1936), pp. 290—294.

[4] W. M. Gilbert, Projections of probability distributions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), pp. 195—198.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПОМОЩЬЮ ИХ ПРОЕКЦИЙ

А. Хеппеш (Будапешт)

(Резюме)

В первой части работы решается следующая задача:

Сколько проекций необходимо соотв. достаточно для однозначного определения распределения дискретной случайной величины в n-мерном пространстве.

Теорема 1 — обобщая две теоремы одной статьи [1] А. Реньи — пользуясь терминологией распределения масс, утверждает следующее:

Теорема 1. Состоящее из любых k точек распределение масс n-мерного пространства однозначно определено, если известны его проекции на $k+1$ не параллельных $n-1$-мерных подпространств; меньшее число проекций для этого, вообще говоря, не достаточно.

Теорема 1' и остальная часть первой главы занимаются обобщением теоремы 1.

Во второй главе доказывается следующая теорема, относящаяся к непрерывным распределениям в плоскости, обладающим функцией плотности:

Теорема 2. Задание проекций на бесконечное число не параллельных прямых необходимо для однозначного определения всякого такого непрерывного распределения в плоскости, которое обладает функцией плотности, ограниченной снизу в некоторой области положительным числом.

ÜBER DIE ANWENDBARKEIT DES DIRICHLETSCHEN PRINZIPS FÜR DEN KREIS

Von

G. FREUD und D. KRÁLIK (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. ALEXITS)

Das Dirichletsche Prinzip lautet folgendermaßen: Sei G ein ebenes Gebiet, dessen Rand Γ ein topologischer Kreis (geschlossene Jordankurve) ist, und bezeichne $F(x, y)$ eine in G stetige Funktion. Sei ferner G in endlich viele zusammenhängende Gebiete zerlegbar, in welchen F stetige partielle Ableitungen hat. Existiert das Integral

$$D(F)=\iint_G\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{1}$$

so gibt es eine einzige, in G harmonische Funktion $f(x, y)$, die auf Γ mit $F(x, y)$ übereinstimmt, und das Integral $D(F)$ sein Minimum für $F=f$ annimmt.

Gelingt es eine auf dem Rand Γ vorgegebene stetige Funktion $F(P)$ auf das ganze Gebiet G so auszudehnen, daß die obigen Bedingungen erfüllt seien, so hat man die Existenz und die Einzigkeit der Lösung des Randwertproblems für harmonische Funktionen mit der Randbedingung $F(x, y)=f(x, y)$ auf Γ bewiesen, und zugleich gezeigt, daß diese Lösung durch das Lösen des Dirichletschen Variationsproblems gefunden werden kann.

Wenn wir uns auf den Fall des Kreises beschränken, können wir leicht notwendige und hinreichende Bedingungen mit Hilfe der Fourierkoeffizienten der auf dem Rand definierten Funktion angeben. Entwickeln wir nämlich die Funktion $F(P)$ in die Fourierreihe

$$F(P)=F(\varphi)\sim a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu\varphi+b_\nu\sin\nu\varphi), \tag{2}$$

so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips (z. B. R. COURANT [2]):

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(a_\nu^2+b_\nu^2)<\infty. \tag{3}$$

S. M. NIKOLSKI [4] hat die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, eine Bedingung für die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips anzugeben, die sich nicht auf die Fourierkoeffizienten der auf dem Rand vorgegebenen

Funktion bezieht, sondern direkt eine strukturelle Eigenschaft dieser Funktion ausdrückt. Er hat bewiesen, daß im Fall $F(\varphi) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, 2)$ mit $\alpha > \frac{1}{2}$, d. h.

$$\omega_2(\delta; F) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} [F(\varphi+h) - F(\varphi)]^2 \, d\varphi \right\}^{1/2} = O(\delta^\alpha) \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$$

die Bedingung (3) erfüllt wird, also das Dirichletsche Prinzip anwendbar ist; ist umgekehrt das Dirichletsche Prinzip anwendbar und somit (3) erfüllt, so gilt $F(\varphi) \in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Im folgenden wollen wir dieses Ergebnis von NIKOLSKI verbessern, indem wir notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips angeben. Wir werden zeigen, daß (3) mit der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right) < \infty \tag{4}$$

gleichwertig ist, und daß (4) dann und nur dann besteht, wenn

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi+t) - F(\varphi-t)]^2}{t^2} \, dt \, d\varphi < \infty \tag{5}$$

ist. Statt (4) hätte man auch die mit (4) vollkommen äquivalente Bedingung

$$\int_1^{\infty} \omega_2^2\left(\frac{1}{\delta}; F\right) d\delta < \infty \tag{4a}$$

anführen können.

L. N. SLOBODEZKI und V. M. BABITSCH [6] und unabhängig von ihnen G. FREUD [3] haben schon gezeigt, daß (5) für die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips auf eine stetige Funktion notwendig und hinreichend ist; (4) und (5) stellen also zwei gleichwertige notwendige und hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips auf eine stetige Funktion dar, in denen je eine rein strukturelle Eigenschaft der Funktion $F(\varphi)$ zum Ausdruck kommt. Aus (4) ergeben sich übrigens sehr einfach die Ergebnisse von NIKOLSKI. Ist nämlich $F(\varphi) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, 2)$ mit $\alpha > \frac{1}{2}$, dann ist $F(\varphi)$ stetig, ferner $\omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right) = O\left(n^{-2\alpha}\right)$, also besteht (4) und somit auch

(3). Aus der Monotonie der Funktion $\omega_2^2(\delta; F)$ folgt aber

$$\omega_2\left(\frac{1}{n}; F\right) = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \omega_2(\delta; F) = o(\delta^{1/2}),$$

d. h. wir erhalten ein noch schärferes Ergebnis als NIKOLSKI. Wir beweisen eigentlich noch mehr: (4) und (5) sind nämlich Spezialfälle (für $\alpha = 1$) des folgenden, allgemeinen Satzes:

Für $0 < \alpha < 2$ sind die Reihen

$$\text{(6)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right)}{n^{1-\alpha}}, \qquad\qquad \text{(7)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \varrho_n^2 \quad (\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2)$$

und das Doppelintegral

$$\text{(8)} \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]^2}{t^{1+\alpha}}\, dt\, d\varphi$$

gleichzeitig konvergent oder divergent.

Wir haben zu bemerken, daß unser Ergebnis mit früheren Arbeiten von PLESSNER [5], ALEXITS [1] und STEČKIN [7] zusammenhängt. In der erwähnten Arbeit von ALEXITS und STEČKIN wird unter anderen bewiesen, daß die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu^2}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \log n$$

gleichzeitig konvergieren oder divergieren, wogegen PLESSNER die gleichzeitige Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \log n$ und des Doppelintegrals

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]^2}{t}\, dt\, d\varphi$$

schon viel früher bewiesen hat. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \log n$ hat bekanntlich die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$ fast überall zur Folge, so daß die erwähnten Ergebnisse von PLESSNER, ALEXITS und STEČKIN mehrere, einander gleichwertige hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$ fast überall darstellen.

Es ist leicht zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu^2}{n^{1-\alpha}} \tag{9}$$

und (7) für $\alpha > 0$ zugleich konvergieren oder divergieren, indem wir diese Reihe umordnen. Es genügt also, statt der gleichzeitigen Konvergenz von (6) und (7) dasselbe für (6) und (9) zu beweisen.

Zum Beweise unseres Satzes bedienen wir uns zuerst eines Kunstgriffes von STEČKIN (vgl. [7], S. 502). Aus

$$F(\varphi) \sim a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$$

erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} [F(\varphi+h) - F(\varphi-h)]^2 \, d\varphi = 4\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu^2 \sin^2 \nu h,$$

woraus sofort die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} [F(\varphi+h) - F(\varphi-h)]^2 \, d\varphi \leqq 4\pi \left\{ h^2 \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \varrho_\nu^2 + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \varrho_\nu^2 \right\}$$

folgt. Ist $0 < h \leqq \frac{1}{n}$, so hat man

$$\int_0^{2\pi} [F(\varphi+h) - F(\varphi-h)]^2 \, d\varphi \leqq \frac{4\pi}{n^2} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \varrho_\nu^2 + n^2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \varrho_\nu^2 \right\},$$

und da das für jedes der Ungleichung $0 < h \leqq \frac{1}{n}$ genügende h gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right) = \sup_{0<h\leqq\frac{1}{n}} \int_0^{2\pi} \left[F\left(\varphi+\frac{h}{2}\right) - F\left(\varphi-\frac{h}{2}\right)\right]^2 d\varphi \leqq \frac{4\pi}{n^2} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \varrho_\nu^2 + \right. \\ \left. + n^2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \varrho_\nu^2 \right\} = \frac{4\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \sum_{\nu=k}^{\infty} \varrho_\nu^2 \leqq \frac{8\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu=k}^{\infty} \varrho_\nu^2 . \end{aligned} \tag{10}$$

Da bekanntlich

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu^2 \leqq C\omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right),$$

wo C eine absolute Konstante ist, folgt somit aus der Konvergenz von (6) die von (9). — Sei nun umgekehrt (9) konvergent. Aus (10) ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right)}{n^{1-\alpha}} \leqq 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu=k}^{\infty} \varrho_\nu^2 = 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{3-\alpha}}.$$

Wegen $\alpha < 2$ ist $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{3-\alpha}}$ konvergent und ihre Summe ist kleiner als $\frac{3\cdot 2^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\, n^{2-\alpha}}$. Wir erhalten also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right)}{n^{1-\alpha}} < \frac{24\pi\, 2^{2-\alpha}}{2-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} \varrho_\nu^2}{n^{1-\alpha}}.$$

Schließlich zeigen wir, daß aus der Konvergenz von (6) die von (8) folgt und umgekehrt. Aus der Konvergenz von (6) und der Monotonie von $\omega_2(\delta; F)$ ergibt sich nämlich sofort die Konvergenz des Integrals

$$\int_1^{\infty} \frac{\omega_2^2(t^{-1}; F)}{t^{1-\alpha}}\, dt = \int_0^1 \frac{\omega_2^2(x; F)}{x^{1+\alpha}}\, dx$$

und daher ist

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]^2}{t^{1+\alpha}}\, dt\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^{1+\alpha}}\, \omega_2^2(2t; F) \leqq 4 \int_0^{2\pi} \frac{\omega_2^2(t; F)}{t^{1+\alpha}}\, dt < \infty.$$

Wenn nun (8) konvergiert und $\alpha < 2$ gilt, so konvergiert auch die Reihe (7). Es ist nämlich:[1]

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]^2}{t^{1+\alpha}}\, dt\, d\varphi = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nt}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \varrho_n^2 \int_0^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^{1+\alpha}}\, dx$$

[1] Diese Schlußweise ist im wesentlichen dieselbe, die PLESSNER [6] zum Beweis der gleichzeitigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \log n$$

und des Integrals

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]^2}{t}\, dt\, d\varphi$$

benützt hat.

mit der Substitution $nt = x$. Wegen

$$\int_0^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^{1+\alpha}} dx \geqq \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x^{1+\alpha}} dx$$

folgt daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \varrho_n^2 \leqq \frac{1}{4\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x^{1+\alpha}} dx} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]^2}{t^{1+\alpha}} dt\, d\varphi.$$

Da wir wissen, daß (6) und (7) gleichzeitig konvergieren oder divergieren, haben wir damit alles bewiesen.

(Eingegangen am 23. Mai 1956.)

Literaturverzeichnis

[1] G. Alexits, Über den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, 4 (1953), S. 95—101.

[2] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces*, Interscience Publ. (New York, 1950).

[3] G. Freud, A körlemezre vonatkozó Dirichlet elv alkalmazhatóságáról, *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei*, 1 (1956), S. 151—155.

[4] С. М. Никольский, К задаче Дирихле для круга и полупространства, Математический Сборник, 35 (1954), S. 247—266.

[5] A. I. Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal für reine u. angew. Math.*, 155 (1926), S. 15—25.

[6] Л. Н. Слободецкий и В. М. Бабич, Об ограниченности интеграла Дирихле, ДАН СССР, 106 (1956), S. 604—606.

[7] С. Б. Стечкин, О теореме Колмогорова—Селиверстова, Известия Акад. Наук СССР, 17 (1953), S. 499—512.

ПРИМЕНИМОСТЬ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ КРУГА

Г. Фрайд и Д. Кралик (Будапешт)

(Резюме)

Известно, что если $F(\varphi)$ есть определенная на единичной окружности непрерывная функция, ряд Фурье которой

$$F(\varphi) \sim a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi),$$

то для применимости принципа Дирихле необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2) < \infty. \tag{1}$$

С. М. Никольский поставил следующую задачу: дать такое условие применимости принципа Дирихле, которое относится не к коэффициентам Фурье, заданной на окружности функции, а к структурным свойством самой функции. Он доказал, что если $F(\varphi) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, где $\alpha < \frac{1}{2}$, т. е.

$$\omega_2(\delta; F) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} [F(\varphi + h) - F(\varphi)]^2 \, d\varphi \right\}^{1/2} = O(\delta^\alpha),$$

то (1) выполняется, если же выполняется (1), то $F(\varphi) \in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

В настоящей работе этот результат С. М. Никольского уточняется: дается необходимое и достаточное условие применимости принципа Дирихле. Доказывается, что (1) эквивалентно условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right) < \infty, \tag{2}$$

которое выполняется тогда и только тогда, если

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[F(\varphi + t) - F(\varphi - t)]^2}{t^2} \, dt \, d\varphi < \infty. \tag{3}$$

Условие (2) также вполне эквивалентно условию

$$\int_1^{\infty} \omega_2^2\left(\frac{1}{\delta}; F\right) d\delta < \infty. \tag{2a}$$

Из (2) легко получаются результаты С. М. Никольского. Ибо, если $F(\varphi) \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, 2)$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$, то $F(\varphi)$ непрерывна и $\omega_2^2\left(\frac{1}{n}; F\right) = O\left(n^{-2\alpha}\right)$, т. е. верно (2), а поэтому и (1). С другой стороны, из (2) в силу монотонности $\omega_2^2(\delta; F)$ получается $\omega_2\left(\frac{1}{n}; F\right) = o(n^{-1/2})$, т. е. $\omega_2(\delta; F) = o(\delta^{1/2})$.

Доказывается, что условия (2) и (3)—частные случаи (при $\alpha=1$) следующей общей теоремы: в случае $0<\alpha<2$ ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_2^2\left(\frac{1}{n};F\right)}{n^{1-\alpha}}\quad \text{и}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\varrho_n^2 \qquad (\varrho_n^2=a_n^2+b_n^2),$$

и двойной интеграл

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[F(\varphi+t)-F(\varphi-t)]^2}{t^{1+\alpha}}\,dt\,d\varphi$$

одновременно сходятся или расходятся.

Этот результат тесно связан с результатами Плесснера [5], Алексича [1] и Стечкина [7].

ON THE GENERALIZATION OF ERLANG'S FORMULA

By
L. TAKÁCS (Budapest)
(*Presented by* A. RÉNYI)

Introduction

The following problem arises in connection with the design of telephone centers: At the center calls are arriving in the instants $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ where $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots < \infty$. There are m available trunk lines. Suppose that a connection is realised if the incoming call finds an idle channel (trunk line). If all the channels are busy, then the incoming call is lost. The duration of a connection is a random variable. The probability distribution of the number of the channels occupied simultaneously is to be determined.

Denote by $\eta(t)$ the number of the busy channels in the instant t and put $\eta(\tau_n - 0) = \eta_n$. We say that the system is in state E_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ if k channels are busy. We shall determine the limiting distributions $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ and its moments.

We suppose the followings:

A) The instants $\{\tau_n\}$ form a sequence of recurrent events, i. e. the time differences $\tau_{n+1} - \tau_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ are equidistributed independent positive random variables. Let us denote by $F(x)$ their common distribution function. Further put

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dF(x) \tag{1}$$

and

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x) \qquad (\Re(s) \geqq 0). \tag{2}$$

B) Denote by χ_n the duration of the connection beginning in the instant τ_n. We assume that the χ_n are independent random variables which are independent also of the process $\{\tau_n\}$. Put $\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x \mid \eta_n = k\} = H(x)$ if $k = 0, 1, \ldots, m-1$, and $\chi_n \equiv 0$ if $\eta_n = m$. In what follows we suppose

$$H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{if } x \geqq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

A. K. ERLANG [3] has proved that if $\{\tau_n\}$ forms a Poisson process with intensity λ and supposition B) is satisfied, then

$$(4)\qquad P_k^* = \frac{e^{-\lambda/\mu}\dfrac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}.$$

It is worth mentioning that in this case P_k also exists and $P_k = P_k^*$.

§ 1. Generalization of Erlang's formula

We shall prove the following theorems.

THEOREM 1. *In case* $\{\tau_n\}$ *and* $\{\chi_n\}$ *fulfil the conditions* A) *and* B), *then the limiting distribution* $\{P_k\}$ *exists independently of the initial distribution of* $\eta(0)$ *and we have*

$$(5)\qquad P_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} B_r,$$

where B_r *is the r-th binomial moment of* $\{P_k\}$ *and is given by the formula*

$$(6)\qquad B_r = C_r \frac{\displaystyle\sum_{j=r}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}$$

where $C_0 = 1$ *and*

$$(7)\qquad C_r = \prod_{i=1}^{r}\frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

THEOREM 2. *In case* $\{\tau_n\}$ *and* $\{\chi_n\}$ *fulfil the conditions* A) *and* B) *and the distribution* $F(x)$ *is not of lattice type and* $\alpha < \infty$, *then the limiting distribution* $\{P_k^*\}$ *exists and is independent of the initial distribution of* $\eta(0)$; *further we have*

$$(8)\qquad P_k^* = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} B_r^*,$$

where B_r^*, *the r-th binomial moment of the distribution* $\{P_k^*\}$, *is given by the formulae* $B_0^* = 1$ *and*

$$(9)\qquad B_r^* = \frac{C_{r-1}}{r\mu\alpha}\,\frac{\displaystyle\sum_{j=r}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

where C_j *is defined by* (7).

THEOREM 3. *The probability distribution $\{P_k^*\}$ can be expressed by the distribution $\{P_k\}$ as follows:*

(10) $$P_k^* = \frac{P_{k-1}}{k\mu\alpha} \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

and

(11) $$P_0^* = 1 - \frac{1}{\alpha\mu}\sum_{k=1}^{m}\frac{P_{k-1}}{k}.$$

We are going to prove these theorems.

PROOF OF THEOREM 1. It is easy to see that the sequence of random variables, $\{\eta_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ forms a Markov chain with transition probabilities $\mathbf{P}\{\eta_{n+1} = k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$ where

(12) $$p_{jk} = \binom{j+1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\,dF(x) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1)$$

and

(13) $$p_{m,k} = p_{m-1,k}.$$

This Markov chain is ergodic and thus the limiting probabilities $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ exist and are independent of the initial distribution of η_1. The limiting distribution is uniquely determined by the system of linear equations

(14) $$P_k = \sum_{j=k-1}^{m} p_{jk}P_j \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

and

(15) $$\sum_{k=0}^{m} P_k = 1.$$

(Cf. W. FELLER [4], p. 325.)

To solve the system of linear equations (14) and (15) let us introduce the generating function

(16) $$U(z) = \sum_{k=0}^{m} P_k z^k.$$

From (14) we obtain for $U(z)$ the integral equation

(17) $$U(z) = \int_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,dF(x) + (1-z)P_m\int_0^\infty e^{-\mu x}(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})^m\,dF(x).$$

Now let us introduce the binomial moments B_r $(r=0,1,\ldots,m)$ of the distribution $\{P_k\}$:

$$B_r=\sum_{k=r}^{m}\binom{k}{r}P_k. \tag{18}$$

We have clearly

$$B_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}. \tag{19}$$

From (15) it follows $B_0=1$ and by r times differentiating (17) we obtain

$$B_r=\left[B_r+B_{r-1}-\binom{m}{r-1}P_m\right]\int_0^\infty e^{-r\mu x}\,dF(x)\quad(r=1,2,\ldots,m) \tag{20}$$

Let us put, for the sake of brevity,

$$\varphi_r=\varphi(r\mu)=\int_0^\infty e^{-r\mu x}\,dF(x)\qquad(r=1,2,\ldots), \tag{21}$$

then from (20) we obtain

$$B_r=\frac{\varphi_r}{1-\varphi_r}\left[B_{r-1}-\binom{m}{r-1}B_m\right]\qquad(r=1,2,\ldots,m), \tag{22}$$

taking $P_m=B_m$ into account. If we consider B_m as fixed, then (22) is a linear difference equation of first order with variable coefficients, which can be solved simply (cf. CH. JORDAN [8], p. 583). The solution is

$$B_r=C_r\left[1-B_m\sum_{j=0}^{r-1}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}\right]$$

where $C_0=1$ and

$$C_r=\frac{\varphi_1}{1-\varphi_1}\,\frac{\varphi_2}{1-\varphi_2}\cdots\frac{\varphi_r}{1-\varphi_r}.$$

For $r=m$ we obtain

$$B_m=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}, \tag{23}$$

and thus finally

$$B_r=C_r\frac{\sum\limits_{j=r}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{24}$$

This proves (6).

The unknown probabilities P_k can be expressed as

$$P_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}$$

The derivatives of $U(z)$ are known at $z=1$, and by means of these we can determine the derivatives at $z=0$ and so we get the required probabilities P_k, too. However, it is more convenient to use CH. JORDAN's formula which gives the probabilities P_k immediately by the binomial moments. According to this formula we obtain

$$P_k=\sum_{r=k}^{m}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}B_r \tag{25}$$

which proves (5). (We remark that (25) is obtained by multiplying (18) by $(-1)^{r-k}\binom{r}{k}$ and adding the equalities for $r=k, k+1, \ldots, m$.)

PROOF OF THEOREM 2. For the proof we need a lemma.

LEMMA. *Denote by $M_k(t)$ the expectation of the number of transitions $E_k\to E_{k+1}$ ($k=0, 1, \ldots, m$; $E_{m+1}=E_m$) occurring in the time interval $(0, t)$. If $F(x)$ is not a lattice distribution and $\alpha<\infty$, then for all $h>0$ we have*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_k(t+h)-M_k(t)}{h}=\frac{P_k}{\alpha}. \tag{26}$$

PROOF. The time differences between consecutive transitions $E_k\to E_{k+1}$ are, as it can easily be seen, equidistributed independent positive random variables. These random variables have a common distribution not of lattice type if $F(x)$ is not of lattice type, either. Then, according to a theorem of D. BLACKWELL [1], it follows that (26) exists and is equal to the reciprocal value of the expectation of the time differences between consecutive transitions $E_k\to E_{k+1}$. (We remark that the existence of (26) follows also from a theorem of J. L. DOOB [2], if the distribution in question is not singular.) To obtain the expectation in question let us consider the Markov chain $\{\eta_n\}$. The state E_k is a recurrent state and the expectation of the recurrence step number is $1/P_k$ (cf. W. FELLER [4], p. 325). As transitions $E_k\to E_{k+1}$ occur only in the instants τ_n if $\eta_n=k$, consequently the expected number of steps between consecutive transitions $E_k\to E_{k+1}$ is $1/P_k$. The expectation of the length of each step is α and so the expectation of the time differences between consecutive transitions $E_k\to E_{k+1}$ is α/P_k. This proves (26).

Now we have

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=&\sum_{j=k-1}^{m-1}\binom{j+1}{k}\int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k}[1-F(t-u)]\,dM_j(u)+\\ &+\binom{m}{k}\int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{m-k}[1-F(t-u)]\,dM_m(u).\end{aligned} \tag{27}$$

As a matter of fact, the event $\eta(t)=k$ can occur in the following mutually exclusive ways: at the instant u (where $0\leqq u\leqq t$) there occurs a transition $E_j\rightarrow E_{j+1}(j=k-1,k,\ldots,m)$ and the next call occurs after the instant t, and in the time interval (u,t) k conversations (connections) do not terminate, while the others terminate. (27) can be obtained by the total probability theorem. Using (26) the existence of $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ follows and we have

$$P_k^*=\sum_{j=k-1}^{m}p_{jk}^*P_j \tag{28}$$

where

$$p_{jk}^*=\frac{1}{\alpha}\binom{j+1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}[1-F(x)]\,dx \qquad (j=0,1,\ldots,m-1)$$

and

$$p_{m,k}^*=p_{m-1,k}^*.$$

The relation (28) gives P_k^* explicitly by the aid of the distribution $\{P_j\}$, but Theorem 3 gives this in a simpler way.

Let us introduce the binomial moments

$$B_r^*=\sum_{k=r}^{m}\binom{k}{r}P_k^* \tag{29}$$

of the distribution $\{P_k^*\}$. By virtue of (28) similarly to (20) we obtain

$$B_r^*=\left[B_r+B_{r-1}-\binom{m}{r-1}B_m\right]\int_0^\infty e^{-r\mu x}\frac{[1-F(x)]}{\alpha}\,dx. \tag{30}$$

As

$$\int_0^\infty e^{-r\mu x}[1-F(x)]\,dx=\frac{1-\varphi_r}{r\mu},$$

taking (20) into consideration we have

$$B_r^*=\frac{1-\varphi_r}{\varphi_r}\,\frac{B_r}{r\mu\alpha}. \tag{31}$$

This proves (9). (8) can be deduced immediately from (9).

PROOF OF THEOREM 3. In view of (22) we have from (30)

$$B_r^*=\frac{1}{r\alpha\mu}\left[B_{r-1}-\binom{m}{r-1}B_m\right] \qquad (r=1,2,\ldots), \tag{32}$$

while $B_0^*=1$. Using this form of B_r^* we get (10) and (11) from (8).

REMARK. The above result can easily be deduced from the fact that the difference of the number of the transitions $E_{k-1} \to E_k$ and $E_k \to E_{k-1}$ occurring in a given time interval is at most 1. Denote by $N_k(t)$ the expectation of the number of transitions $E_k \to E_{k-1}$ occurring in the time interval $(0, t)$. It is easy to see that

$$N_k(t+\Delta t) = N_k(t) + \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} k\mu \Delta t + o(\Delta t).$$

As $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$ exists, it follows

$$\lim_{t\to\infty} N_k'(t) = k\mu P_k^* \tag{33}$$

and it is also true that

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_k(t)}{t} = k\mu P_k^* \tag{34}$$

As $|M_{k-1}(t) - N_k(t)| \leq 1$, we obtain (10) from (34) and

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_{k-1}(t)}{t} = \frac{P_{k-1}}{\alpha}. \tag{35}$$

EXAMPLE. Let $\{\tau_n\}$ be a Poisson process with intensity λ. Then

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{if } x \geqq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

$\alpha = 1/\lambda$ and $\varphi(s) = \lambda/(\lambda + s)$, further, by (7), we obtain

$$C_r = \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!}.$$

From (7) we have

$$B_r = \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} \frac{\sum_{j=0}^{m-r} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}$$

and, by (5),

$$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}.$$

According to Theorem 2 the limiting distribution $\{P_k^*\}$ exists and we have

$$P_k^* = P_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

§ 2. The stationary process

Let the random variable $\zeta(t)$ denote the distance between the instant t and the next call. First of all we shall prove the following

THEOREM 4. *If the distribution $F(x)$ is not of lattice type and $\alpha < \infty$, then the limiting distribution*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x \mid \eta(t) = k\} = F_k^*(x) \qquad (k=0, 1, \ldots, m) \tag{36}$$

exists and we have

$$F_k^*(x) = \frac{1}{\alpha P_k^*}\left\{\sum_{j=k-1}^{m-1} P_j \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu u}(1-e^{-\mu u})^{j+1-k}[F(u+x)-F(u)]\,du + \right. \tag{37}$$
$$\left. + \binom{m}{k} P_m \int_0^\infty e^{-k\mu u}(1-e^{-\mu u})^{m-k}[F(u+x)-F(u)]\,du \right\}.$$

PROOF. Clearly we have

$$\mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x, \eta(t) = k\} = \sum_{j=k-1}^{m-1} \binom{j+1}{k} \int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k}[F(t-u+x)-$$
$$-F(t-u)]\,dM_j(u) + \binom{m}{k}\int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{m-k}[F(t-u+x)-F(t-u)]\,dM_m(u).$$

Namely, the event $\{\zeta(t) \leq x, \eta(t) = k\}$ can occur if at some instant u (where $0 \leq u \leq t$) a transition $E_j \to E_{j+1}$ $(j = k-1, \ldots, m)$ takes place and the next call occurs in the time interval $(t, t+x)$, further during the time interval (u, t) k conversations do not come to end, while the others come to end. Now, by the aid of (26), we obtain the limit $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x, \eta(t) = k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$. Taking into consideration that

$$\mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x \mid \eta(t) = k\} = \frac{\mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x, \eta(t) = k\}}{\mathbf{P}\{\eta(t) = k\}}$$

and $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$ exists, we obtain finally (36).

COROLLARY. *If the distribution $F(x)$ is not of lattice type and $\alpha < \infty$, then we have*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x\} = F^*(x) \tag{38}$$

where

$$F^*(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x [1-F(y)]\,dy. \tag{39}$$

This follows immediately from (36) or can be deduced from

$$\mathbf{P}\{\zeta(t) \leq x\} = \sum_{k=0}^{m} \int_0^t [F(t-u+x) - F(t-u)]\,dM_k(u).$$

The investigated process may be considered as a Markov process if we describe the state of the system by the random variables $\eta(t)$ and $\zeta(t)$. We have shown that if $F(x)$ is not a lattice distribution and $\alpha < \infty$, then the limiting distributions of the random variables $\eta(t)$ and $\zeta(t)$ exist for $t \to \infty$ and are independent of the initial distributions. Thus we can define the stationary process supposing that the initial distribution of the investigated process is given by $\mathbf{P}\{\eta(0) = k\} = P_k^*$ and $\mathbf{P}\{\zeta(0) \leq x \mid \eta(0) = k\} = F_k^*(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$. Then the distribution of $\eta(t)$ and $\zeta(t)$ agrees in all instants with the initial distribution of $\eta(0)$ and $\zeta(0)$, respectively. Furthermore, the expectation of the number of transitions $E_k \to E_{k-1}$, occurring in the time interval $(0, t)$, is

$$M_k(t) = \frac{P_k}{\alpha}\,t \tag{40}$$

and the expectation of the number of transitions $E_k \to E_{k+1}$, occurring in the time interval $(0, t)$, is

$$N_k(t) = k\mu P_k^* t. \tag{41}$$

In most applications the stationary process plays an important role.

§ 3. The limiting case $m = \infty$

Let us consider the problem stated in the Introduction, but suppose now that infinitely many trunks (channels) are available, i. e. $m = \infty$. In this case, letting $m \to \infty$ in (4), for the probability of k lines being busy we obtain

$$P_k^* = e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42}$$

if the incoming calls form a Poisson process with parameter λ. Further, we have also $P_k = P_k^*$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Thus the number of the busy lines has Poisson limiting distribution if the incoming calls form a Poisson process. But we obtain another limiting distribution if the sequence $\{\tau_n\}$ forms a recurrent process. We shall prove the following theorems.

THEOREM 5. *Suppose that* $\{\tau_n\}$ *and* $\{\chi_n\}$ *satisfy the conditions* A) *and* B), *respectively, and that* $m=\infty$. *The limiting distribution* $\{P_k\}$ $(k=0,1,\ldots)$ *exists and is independent of the initial distribution of* $\eta(0)$. *We have*

$$P_k=\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}C_r \tag{43}$$

where C_r *is defined by* (7). *The r-th binomial moment of* $\{P_k\}$ *is simply*

$$B_r=C_r. \tag{44}$$

THEOREM 6. *Suppose that* $\{\tau_n\}$ *and* $\{\chi_n\}$ *satisfy the conditions* A) *and* B), *respectively, and that* $F(x)$ *is not a lattice distribution and its mean* α *is finite, further that* $m=\infty$. *Then the limiting distribution* $\{P_k^*\}$ $(k=0,1,\ldots)$ *exists and is independent of the initial distribution of* $\eta(0)$. *We have*

$$P_k^*=\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{C_{r-1}}{r} \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{45}$$

and

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{C_{r-1}}{r}. \tag{46}$$

Further the r-th binomial moment of $\{P_k^*\}$ *is*

$$B_r^*=\frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu} \qquad (r=1,2,\ldots), \tag{47}$$

while $B_0^*=1$.

COROLLARY. *The distribution* $\{P_k^*\}$ *can be obtained by* (45) *in the following way:*

$$P_k^*=\frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu} \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{48}$$

and

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_{k-1}}{k}. \tag{49}$$

PROOF OF THEOREM 5. The random variables $\{\eta_n\}$ form also in case $m=\infty$ a Markov chain with transition probabilities p_{jk} defined by (12). This Markov chain is ergodic (cf. F. G. FOSTER [7]) and the limiting probabilities $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ exist and are independent of the initial distribution of η_1. The limiting distribution $\{P_k\}$ is uniquely determined by the system of linear equations

$$P_k=\sum_{j=k-1}^{\infty}p_{jk}P_j \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{50}$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1. \tag{51}$$

Proceeding similarly as in the proof of Theorem 2, we obtain

$$B_r = C_r \qquad (r = 0, 1, \ldots)$$

for the binomial moments of the distribution $\{P_k\}$. Finally

$$P_k = \left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}$$

what proves (43.)

REMARK. To prove (44) we can proceed as follows. Let us consider the instant of a call in a stationary process. Define ε_n $(n = 1, 2, \ldots)$ as follows: $\varepsilon_n = 1$ if the former n-th conversation is in course, and $\varepsilon_n = 0$ if it does not. Then we have

$$P_k = \mathbf{P}\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots = k\}.$$

Now

$$B_r = \mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots}{r}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{r}\right\}.$$

Here

$$\binom{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{r} = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_r \leqq n} \varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_1+j_2} \cdots \varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}$$

where all $j_i \geqq 1$. Consequently

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{r}\right\} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_r=1}^{\infty} \mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_1+j_2} \cdots \varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}\}.$$

A simple calculation shows that

$$\mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_1+j_2} \ldots \varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}\} = \varphi_r^{j_1} \varphi_{r-1}^{j_2} \cdots \varphi_1^{j_r}$$

and it follows

$$B_r = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_1} \cdot \frac{\varphi_2}{1-\varphi_2} \cdots \frac{\varphi_r}{1-\varphi_r} = C_r,$$

what was to be proved.

PROOF OF THEOREM 6. Now we obtain similarly to (27) that

$$\mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = \sum_{j=k-1}^{\infty} \binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu(t-u)} (1 - e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k} [1 - F(t-u)]\, dM_j(u).$$

Since (26) is valid in case $m = \infty$ too, letting $t \to \infty$, we get

$$P_k^* = \sum_{j=k-1}^{\infty} p_{jk}^* P_j.$$

By some transformations this gives (45) and (46).

§ 4. Remarks

1. A. K. ERLANG's formula (4) is valid if $\{\tau_n\}$ forms a Poisson process with intensity λ and $H(x)$ is an exponential distribution. However, the general opinion is that the formula (4) is valid for arbitrary $H(x)$ if the mean of $H(x)$ is denoted by $1/\mu$. As a matter of fact, (4) is proved by A. K. ERLANG [3] only for the case when $H(x)$ is an exponential distribution. Though R. FORTET [5] (p. 298) stated that (4) holds for the general case too, we think the proof of this theorem is still missing.

2. If $m=\infty$ and $\{\tau_n\}$ forms a Poisson process, while $H(x)$ is arbitrary, we have

$$P_k^* = e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \tag{52}$$

where

$$\mu^{-1} = \int_0^\infty x\,dH(x).$$

(52) was proved by A. RÉNYI [9], R. FORTET [6], C. RYLL-NARDZEWSKI [10] and it follows from a more general result given by the author [11].

Now we shall give a brief proof of (52). We have

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{t}\int_0^t (1-H(x))\,dx\right]^k \left[\frac{1}{t}\int_0^t H(x)\,dx\right]^{n-k}, \tag{53}$$

i. e.

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]dx}\,\frac{\left\{\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx\right\}^k}{k!}$$

and whence

$$P_k^* = \lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}. \tag{54}$$

(53) may be proved as follows. If we know that in the time interval $(0, t)$ there arrive exactly n calls at the center, the probability of which is

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

then the instants of these n calls may be regarded as n independent, uniformly distributed points in the interval $(0, t)$. The probability that a conver-

sation, started at a random point, will end before the instant t is

$$\frac{1}{t}\int_0^t H(x)\,dx$$

and the probability of the complementary event is

$$\frac{1}{t}\int_0^t [1-H(x)]\,dx.$$

Finally, (53) results from the total probability theorem.

3. In case $\{\tau_n\}$ is a recurrent process and $H(x)$ is arbitrary, the determination of $\{P_k\}$ and $\{P_k^*\}$ is a complicated problem. But if $m=\infty$, the moments of the distribution $\{P_k^*\}$ may be determined. This follows from a more general result given by the author [12]. Put $M_r^* = \lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\{(\eta(t))^r\}$, i. e.

$$M_r^* = \sum_{k=0}^{\infty} k^r P_k^*.$$

We have by [12]

$$M_r^* = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\int_0^\infty M_j^*(t)\,[1-H(t)]\,dt,$$

where $M_0^*(t)\equiv 1$ and $M_1^*(t), M_2^*(t),\ldots$ may be determined by the following recurrence formula

$$M_r^*(t) = \sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\int_0^t M_j^*(t-x)\,[1-H(t-x)]\,dm(x)$$

where

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

and $F_n(x)$ denotes the n-fold convolution of $F(x)$ with itself.

MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

(Received 1 July 1956)

References

[1] D. Blackwell, A renewal theorem, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), pp. 145—151.

[2] J. L. Doob, Renewal theory from the point of view of probability, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), pp. 422—438.

[3] A. K. Erlang, Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, *Post Office Electrical Engineer's Journal*, **10** (1918), pp. 189—197.

[4] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications* (New York, 1950).

[5] R. Fortet, *Calcul des probabilités* (Paris, 1950).

[6] R. Fortet, Random functions from a Poisson process, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, (1951), pp. 373—385.

[7] F. G. Foster, On the stochastic matrices associated with certain queuing processes, *The Annals of Mathematical Statistics*, **24** (1953), pp. 355—360.

[8] Ch. Jordan, *Calculus of finite differences* (Budapest, 1939).

[9] A. Rényi, On some problems concerning Poisson processes, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1951), pp. 66—73.

[10] C. Ryll-Nardzewski, On the non-homogeneous Poisson process. I, *Studia Mathematica*, **14** (1954), pp. 124—128.

[11] L. Takács, On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), pp. 203—236.

[12] L. Takács, On secondary stochastic processes generated by recurrent processes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), pp. 17—29.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ЭРЛАНГА

Л. Такач (Будапешт)

(Резюме)

В телефонный центр в моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots)$ поступают вызовы. Промежутки времени $\tau_{n+1} - \tau_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ суть независимые положительные случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. Пусть $\alpha = \int_0^\infty x\, dF(x)$ и $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$. Центр располагает m линиями для разговоров. Если в момент вызова имеется свободная линия, то устанавливается связь, если свободной линии нет, то вызов пропадает. Пусть χ_n обозначает время занятости, начинающееся в момент τ_n. Предположим, что случайные величины $\{\chi_n\}$ не зависят друг от друга и их функция распределения $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$ $(x \geqq 0)$, если вообще устанавливается связь. Обозначим через $\eta(t)$ число занятых в момент t линий и пусть $\eta_n = \eta(\tau_n - 0)$. Пусть далее $P_k = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\}$ и $P_k^* = \lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Если $m < \infty$, распределение вероятностей $\{P_k\}$ существует независимо от начального распределения величины $\eta(0)$ и имеет место равенство

$$P_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r,$$

где B_r есть r-ый биномиальный момент распределения $\{P_k\}$, который вычисляется формулой

$$B_r = C_r \frac{\sum\limits_{j=r}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}},$$

где $C_0 = 1$ и

$$C_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}.$$

Теорема 2. Если $m < \infty$, $F(x)$ не решетчатое распределение и $\alpha < \infty$, то независимо от начального распределения величины $\eta(0)$ существует предельное распределение $\{P_k^*\}$ и имеют место соотношения

$$P_k^* = \frac{P_{k-1}}{k\mu\alpha} \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{и} \quad P_0^* = 1 - \frac{1}{\mu\alpha} \sum_{k=1}^{m} \frac{P_{k-1}}{k}.$$

Теорема 3. Если $m = \infty$, то распределение $\{P_k\}$ существует независимо от начального распределения величины $\eta(0)$ и имеет место равенство

$$P_k = \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} C_k.$$

Теорема 4. Если $m = \infty$, $F(x)$ не решетчатое распределение, $\alpha < \infty$, то независимо от начального распределения величины $\eta(0)$ существует предельное распределение $\{P_k^*\}$ и имеют место соотношения

$$P_k^* = \frac{1}{\alpha\mu} \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \frac{C_{r-1}}{r} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$P_k^* = 1 - \frac{1}{\alpha\mu} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{C_{r-1}}{r}.$$

NOTES ON DE LA VALLÉE POUSSIN'S APPROXIMATION THEOREM

By

S. CSIBI (Budapest)

(*Presented by* G. ALEXITS)

We appeal to DE LA VALLÉE POUSSIN's following approximation theorem [3]: Let $f(x)$ be a continuous real and periodic function, let E_n be its best approximation by trigonometric polynomials of n^{th} degree in the Chebyshev sense, and let be

$$E_n \leqq \frac{\Omega(n)}{n^p}$$

where p may be zero or any positive integer. Suppose that

$$\Omega(\xi_1) \geqq \Omega(\xi_2) \quad \text{if} \quad a < \xi_1 < \xi_2 \tag{1}$$

$a > 1$ being a fixed positive integer, and

$$\lim_{\xi \to \infty} \Omega(\xi) = 0.$$

Furthermore suppose the existence of the following integral:

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi}\, d\xi.$$

Then $f^{(p)}(x)$ exists, and its modulus of continuity has the following order of magnitude:

$$\omega^{(p)}(\delta) = O\left(\delta \int_a^{a/\delta} \Omega(\xi)\, d\xi + \int_{1/\delta}^{\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi}\, d\xi\right). \tag{2}$$

It is well known [2] that approximating to $f(x)$ by algebraic polynomials in a finite closed interval $[a, b]$ inequality (2) holds only in any closed sub-interval of (a, b). The aim of this paper is to show that throughout the whole approximation interval the following theorem holds:

THEOREM. *Let be*

$$E_n \leqq \frac{\Omega(n^2)}{n^{2p}},$$

then $f^{(p)}(x)$ *exists and* $\omega^{(p)}(\delta)$ *may be estimated by* (2) *throughout* $[a, b]$.[1]

[1] If $\Omega(x) = x^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, we get an extension of BERNSTEIN's approximation theorem [1]. If $\alpha = 1$, a similar extension may be given to ZYGMUND's corresponding theorem [4].

In (2) O may not be substituted by o following from an example of G. FREUD presented later.

PROOF.[2] According to our assumptions a polynomial $P_{a^n}(x)$ of not more than a^nth degree exists satisfying

$$(3)\qquad |P_{a^n}(x)-f(x)| \leqq \frac{\Omega(a^{2n})}{a^{2pn}}$$

where n and a are fixed positive integers, a being the lower bound introduced by (1). Let

$$(4)\qquad U_n(x)=P_{a^n}(x)-P_{a^{n-1}}(x) \quad \text{if} \quad n>3$$

and $U_3(x)=P_{a^3}(x)$. Then

$$P_{a^k}(x)=\sum_{n=3}^{k} U_n(x).$$

First we shall prove the existence of $f^{(p)}(x)$. By virtue of (3), (4) and the monotonity of $\Omega(\xi)$ we obtain:

$$|U_n(x)| \leqq |P_{a^n}(x)-f(x)|+|f(x)-P_{a^{n-1}}(x)| \leqq \frac{A\Omega(a^{2(n-1)})}{a^{2pn}},$$

A being a fixed positive number.

According to Markov's inequality:

$$|U_n^{(p)}(x)| \leqq B\Omega(a^{2(n-1)})$$

where B denotes a fixed positive number.

Regarding the monotonity of $\Omega(\xi)$ we may write:

$$\sum_{n=3}^{\infty} |U_n^{(p)}(x)| \leqq C \int_{a^3}^{\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi}\, d\xi$$

where C is a fixed positive number. Now, from the existence of the integral on the right follows the uniform convergence of the series on the left. Consequently, $f^{(p)}(x)$ exists and

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=3}^{\infty} U_n^{(p)}(x).$$

Next we shall investigate the modulus of continuity of this derivative:

$$(5)\quad |f^{(p)}(x)-f^{(p)}(y)| \leqq \sum_{n=3}^{m+1} |U_n^{(p)}(x)-U_n^{(p)}(y)|+\sum_{n=m+2}^{\infty} |U_n^{(p)}(x)|+\sum_{n=m+2}^{\infty} |U_n^{(p)}(y)|$$

where $x, y \in [a, b]$ and $|x-y| \leqq \delta$

[2] If $p=0$ or the problem may be readily reduced to $p=0$ (see for instance $\Omega(x)=x^{-\alpha}$), our statement may be derived immediately from the trigonometric case following T. KÖVÁRI's remark: $\omega_f(\delta) \leqq \omega_\psi(\sqrt{3\delta})$, ω_f and ω_ψ being the moduli with respect to the first or second differences, $x \in [-1, +1]$, $\psi(\varphi) \equiv f(\cos \varphi)$ and $0<\delta<1/3$.

According to Lagrange's mean value theorem and Markov's inequality:

$$|U_n^{(p)}(x)-U_n^{(p)}(y)| \leq Da^{2n}\Omega(a^{2(n-1)})\cdot\delta$$

where D is a fixed positive number. It can be readily seen that

$$\sum_{n=3}^{m+1}|U_n^{(p)}(x)-U_n^{(p)}(y)| \leq \delta K\int_{a^2}^{a^{2m}}\Omega(\xi)\,d\xi \tag{6}$$

K being a fixed positive number. Furthermore, as it was shown already above,

$$\sum_{n=m+2}^{\infty}|U_n^{(p)}(x)| \leq C\int_{a^{2m}}^{\infty}\frac{\Omega(\xi)}{\xi}\,d\xi. \tag{7}$$

Putting (6) and (7) into (5) and letting

$$a^{2m-1} \leq \frac{1}{\delta} < a^{2m}, \qquad a^{2m} \leq \frac{a}{\delta}$$

we get in the case of any sufficiently small number δ the following upper estimation:

$$\omega^{(p)}(\delta) = O\left(\delta\int_{a}^{a/\delta}\Omega(\xi)\,d\xi + \int_{1/\delta}^{\infty}\frac{\Omega(\xi)}{\xi}\,d\xi\right)$$

what was to be proved.

The negative statement may be proved by G. FREUD's following example:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T_{b^k}(x)}{b^{2k(\alpha+p)}} \qquad (x\in[-1,+1],\ 0<\alpha<1) \tag{8}$$

where b denotes a fixed positive integer,

$$b > \left(\frac{8}{N}+1\right)^{1/2\alpha} \tag{9}$$

N being a fixed positive number defined by (11), and $T_{b^k}(x) = \cos(b^k \arccos x)$.

(8) is obviously uniformly convergent, hence $f(x)$ is continuous. By (8) it can be readily shown that $E_n = O(n^{-2(\alpha+p)})$ and so $f(x)$ is among the functions considered by our theorem. We may write

$$\begin{aligned} f^{(p)}(1)-f^{(p)}(1-h) &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{T_{b^k}^{(p)}(1)-T_{b^k}^{(p)}(1-h)}{b^{2k(\alpha+p)}} + \frac{T_{b^m}^{(p)}(1)-T_{b^m}^{(p)}(1-h)}{b^{2m(\alpha+p)}} + \\ &+ \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{T_{b^k}^{(p)}(1)-T_{b^k}^{(p)}(1-h)}{b^{2k(\alpha+p)}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Taking $h = 1/2b^{2m}$, we get $1-h > \cos \pi/2b^m$ therefore

$$T_{b^k}^{(p)}(1) - T_{b^k}^{(p)}(1-h) > 0 \quad \text{if} \quad k \leqq m.$$

Furthermore, according to Markov's inequality $|T_{b^k}^{(p)}(x)| \leqq b^{2kp}$. Regarding these relations and (9) we may write

$$f^{(p)}(1) - f^{(p)}(1-h) > \frac{T_{b^m}^{(p)}(1) - T_{b^m}^{(p)}(1-h)}{b^{2m(\alpha+p)}} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{b^{2k\alpha}}.$$

The first term on the right may be estimated noting that

$$T_{b^m}^{(p+1)}(1-\vartheta h) \geqq T_{b^m}^{(p+1)}(1)/2$$

and letting h be so small that $b^{m-p} > 2$. Then, according to relations between Chebyshev and Jacobi polynomials and between Jacobi polynomials and their derivatives, we get

$$T_{b^m}^{(p+1)}(1) > Nb^{2m(1+p)} \tag{11}$$

where N denotes a fixed positive number. Finally, we may write

$$f^{(p)}(1) - f^{(p)}(1-h) > 2^\alpha h^\alpha \left(\frac{N}{4} - \frac{2}{b^{2\alpha}-1} \right) = Ph^\alpha$$

where the sign of P is positive following from restriction (9). Hence

$$\omega^{(p)}(h) > Ph^\alpha$$

for $h = 1/2b^{2m}$, the negative statement being proved.[3]

(Received 27 July 1956)

References

[1] S. N. Bernstein, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mémoires Couronnés Acad. Roy. Belg.* (2), 4 (1912), pp. 1—104.

[2] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций (Москва—Ленинград, 1949).

[3] C. de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, (Paris, 1919), Chap. IV.

[4] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. Journal*, 12 (1945), pp. 47—76.

[3] Taking $\alpha = 1$ a similar reasoning may be carried out considering moduli with respect to second differences, showing that the corresponding extension of Zygmund's approximation theorem [4] can not be improved, either.

ЗАМЕЧАНИЕ К АППРОКСИМАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Ш. Чиби (Будапешт)

(Резюме)

Известно, что теоремы Бернштейна—Валле-Пуссена—Зигмунда, устанавливающие зависимость структурных свойств функций от порядка приближения их тригонометрическими многочленами, могут быть перенесены на случай приближения алгебраическими многочленами лишь для любого подинтервала $[a', b'] \subset (a, b)$, где $[a, b]$ весь аппроксимационный интервал. В настоящей работе доказывается, что оценка Валле-Пуссена может быть распросртанена на весь отрезок $[a, b]$, если вместо условия

$$E_n \leqq \frac{\Omega(n)}{n^p}$$

исходить из условия

$$E_n \leqq \frac{\Omega(n^2)}{n^{2p}}.$$

(Если $\Omega(x) = x^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, то мы приходим к распространению исходной теоремы Бернштейна.) Аналогичным образом, в случае $\Omega(x) = x^{-1}$ оценка Зигмунда также может быть перенесена на весь отрезок $[a, b]$, если, задавая порядок приближения, вместо n брать n^2. Утверждения этих теорем не могут быть улучшены.

RÉDEISCHE SCHIEFE PRODUKTE VON HALBVERBÄNDEN

Von

G. SZÁSZ (Szeged)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

§ 1. Einleitung

Es sind in der Algebra mehrere Konstruktionen bekannt, um aus gegebenen algebraischen Strukturen neue Strukturen zu bilden. Insbesondere werden sehr oft die wohlbekannten, auf HAMILTON zurückgehenden Konstruktionen verwendet, die von RÉDEI ([5], [6]) im allgemeinen *schiefe Produkte* genannt wurden. Auch das direkte Produkt ist ein (trivialer) Spezialfall der schiefen Produkte.

Von RÉDEI wurde in [6] ein gewisser Typ schiefer Produkte in der Gruppentheorie ausführlich untersucht, der die Schreiersche Gruppenerweiterung und das Zappa—Szépsche Gruppenprodukt als Spezialfälle umfaßt. Dieser Typ wurde später von KOCHENDÖRFFER „Rédeisches schiefes Produkt" genannt. Schon bisher haben mehrere Autoren ihre Aufmerksamkeit auf die Theorie dieses schiefen Produktes gerichtet. (Vgl. FUCHS [2], KOCHENDÖRFFER [4], RÉDEI und STÖHR [7], RÉDEI und STEINFELD [8], RÜHS [9].)

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Rédeischen schiefen Produkt für den Fall von Halbverbänden (d. h. von kommutativen Halbgruppen mit lauter idempotenten Elementen) und stellen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß ein solches schiefes Produkt wieder ein Halbverband ist. Aus den Resultaten wollen wir hervorheben, daß — im Gegensatz zum Fall der Gruppen (siehe [6], S. 203 und 221—222) — ein Rédeisches schiefes Produkt von Halbverbänden nur dann ein Halbverband sein kann, wenn es mindestens zweifach ausgeartet ist.

Im letzten Paragraphen werden wir die gewonnenen Ergebnisse auf den Fall von Verbänden anwenden. Aus diesen Untersuchungen wird sich herausstellen, daß ein Rédeisches schiefes Produkt von zwei Verbänden (dann und) nur dann ein Verband ist, wenn es mit dem direkten Produkt dieser Verbände übereinstimmt.

§ 2. Definitionen und Bezeichnungen

Unter einem Halbverband verstehen wir eine Menge mit einer idempotenten, kommutativen, assoziativen Multiplikation. (Siehe z. B. [1], S. 22.) Anders gesagt ist ein Halbverband eine idempotente kommutative Halbgruppe.

Es ist bekannt ([1], S. 22, Théorème 1), daß in einem Halbverband $\mathfrak{H}$ (mit Elementen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$) die Relation

$$„\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \text{ dann und nur dann, wenn } \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}“$$

eine Halbordnung $\leqq$ definiert. Wir nennen sie *die natürliche Halbordnung von* $\mathfrak{H}$.

Im Laufe unserer Betrachtungen werden H und H stets Halbverbände bedeuten. Die Elemente von H werden mit lateinischen, die von H mit griechischen Buchstaben, insbesondere das Einselement von H bzw. H (wenn es existiert) mit e bzw. ε bezeichnet.

Die Symbole

$$(1) \qquad x^{\eta}(\in H), \quad \xi^{\eta}(\in H), \quad x^{y}(\in \mathrm{H}), \quad \xi^{y}(\in \mathrm{H}) \qquad (x, y \in H;\ \xi, \eta \in \mathrm{H})$$

sollen Funktionen (in der auch in [6] gebrauchten Operatorschreibweise) bedeuten.[1] Natürlich lassen sich über H und H verschiedene solche Funktionensysteme definieren.

Nun liegt die Möglichkeit vor, verschiedene schiefe Produkte aus H und H zu konstruieren. Hierzu betrachten wir die Menge $\mathcal{H}$ aller Elementepaare

$$(x, \xi) \qquad (x \in H,\ \xi \in \mathrm{H});$$

x heißt die *H-Komponente*, ξ die H-*Komponente* von (x, ξ). Ferner bestehe $(x, \xi) = (y, \eta)$ dann und nur dann, wenn $x = y$, $\xi = \eta$ sind. Dann definieren wir in $\mathcal{H}$ eine Multiplikation durch die Regel

$$(2) \qquad (a, \alpha) \circ (b, \beta) = (a b^{\alpha} \beta^{a}, a^{b} \alpha^{b} \beta) \qquad (a, b \in H;\ \alpha, \beta \in \mathrm{H}),$$

wo $b^{\alpha}, \beta^{a}, a^{b}, \alpha^{b}$ ein festgestelltes Funktionensystem von oben gegebenem Typ ist. Damit haben wir $\mathcal{H}$ zu einer multiplikativen Struktur[2] gemacht, die wir mit $H \circ \mathrm{H}$ bezeichnen und ein *nichtausgeartetes Rédeisches schiefes Produkt von H und* H nennen.[3] Man sieht, daß das Produkt von zwei Elementen von

[1] Diese Schreibweise bedeutet, daß z. B. x^{η} eine Funktion mit zwei Variabeln x, η ist, wo x über alle Elemente von H, η über alle Elemente von H durchläuft und die Funktionswerte x^{η} in H liegen. Die übrigen drei Symbole in (1) sind in ähnlicher Weise zu verstehen.

[2] Unter einer *multiplikativen Struktur* verstehen wir eine Menge mit einer eindeutigen Verknüpfung („Multiplikation").

[3] Die Benennung „Rédeisches schiefes Produkt" für diesen Typ wurde von Kochendörffer [4] eingeführt; das Nebenwort „nichtausgeartet" weist auf das nachfolgende hin·

$H \circ \mathsf{H}$ auch von den Funktionen $x^{\eta}, \ldots$ abhängt, so daß man mit Hilfe verschiedener Funktionensysteme im allgemeinen verschiedene $H \circ \mathsf{H}$ konstruieren kann.

Ändert man die Multiplikationsregel (2) so ab, daß in (2) genau k von den vier Bedingungen

(I) $b^{\alpha} = b$ für alle $b \in H, \alpha \in \mathsf{H}$,

(II) $\alpha^{b} = \alpha$ für alle $b \in H, \alpha \in \mathsf{H}$,

(III) α^{β} tritt in (2) nicht auf,

(IV) a^{b} tritt in (2) nicht auf

bestehen, so entsteht eine (neue) multiplikative Struktur über $\mathcal{H}$, die man ein *k-fach ausgeartetes Rédeisches schiefes Produkt von H und* H nennt. Dem Fall $k=0$ gehören genau die sämtlichen $H \circ \mathsf{H}$; ebendeshalb haben wir sie schon oben „nichtausgeartet“ genannt. Ferner ist das einzige „4-fach ausgeartete schiefe Produkt“ von H und H das direkte Produkt $H \times \mathsf{H}$.

Wir betrachten die zwei Typen von den ausgearteten schiefen Produkten, die wir mit $H \,{}_1\, \mathsf{H}$ und $H \,{}_2\, \mathsf{H}$ bezeichnen und durch die Multiplikationsregel

(3) $$(a, \alpha) \,{}_1\, (b, \beta) = (a b^{\alpha}, a^{b} \alpha^{b} \beta) \qquad (a, b \in H;\ \alpha, \beta \in \mathsf{H})$$

bzw.

(4) $$(a, \alpha) \,{}_2\, (b, \beta) = (a b^{\alpha}, \alpha^{b} \beta) \qquad (a, b \in H;\ \alpha, \beta \in \mathsf{H})$$

definieren, wobei $b^{\alpha}, a^{b}, \alpha^{b}$ bzw. b^{α}, α^{b} wieder ein beliebiges Funktionensystem vom Typ (1) ist.

Wir sehen, daß sich (3) und (4) von (2) darin unterscheiden, daß der Faktor β^{α} bzw. die Faktoren β^{α}, a^{b} nicht auftreten. Dementsprechend werden wir (in §§ 5, 9) so sprechen, daß die H-Komponente von $H \,{}_1\, \mathsf{H}$ und die H-, H-Komponenten von $H \,{}_2\, \mathsf{H}$ *ausgeartet* sind, dagegen die H-Komponente von $H \,{}_1\, \mathsf{H}$ *nichtausgeartet* ist.

Ein wichtiger Spezialfall von $H \circ \mathsf{H}$ ist, daß beide Halbverbände H, H mit Einselement sind und

(5. 1) $$\varepsilon^{a} = \alpha^{\varepsilon} = e,$$

(5. 2) $$a^{e} = e^{\alpha} = \varepsilon$$

für alle $a \in H, \alpha \in \mathsf{H}$ gelten; solche $H \circ \mathsf{H}$ nennen wir in dieser Arbeit *spezielle nichtausgeartete schiefe Produkte von H und* H.[4] Ähnlich heißt ein $H \,{}_1\, \mathsf{H}$ ein *spezielles ausgeartetes schiefes Produkt von H und* H, wenn beide Halbverbände H, H mit Einselement sind und (5. 2) für alle $a \in H$ gilt.

[4] Es wird sich herausstellen (S. Satz 5), daß jedes $H \circ \mathsf{H}$ oder $H \,{}_1\, \mathsf{H}$ mit Einselement ein spezielles schiefes Produkt ist (unabhängig davon, ob es ein Halbverband ist oder nicht).

Bemerkung 1. Im Gegensatz zum Fall der Gruppen sind $H \circ_1 \mathsf{H}$, $H \circ_2 \mathsf{H}$ dann und nur dann als Spezialfälle von $H \circ_0 \mathsf{H}$ zu betrachten, wenn H bzw. H, H mit Einselementen sind. Dieser Fall ist aber, wie es sich später herausstellen wird, weniger interessant als der allgemeine.

Bemerkung 2. Wir werden unten ausweisen, daß ein oben definiertes $H \circ_i \mathsf{H}$ $(i = 0, 1, 2)$ nur dann ein Halbverband sein kann, wenn die Gleichungen

$$b^a = b, \qquad a^b = a \tag{6}$$

identisch gelten. Daraus kann man leicht einsehen, daß ein beliebiges ausgeartetes schiefes Produkt von H und H, wenn es ein Halbverband ist, sich immer auf ein durch (6) reduziertes $H \circ_i \mathsf{H}$ $(i = 0, 1, 2)$ zurückführen läßt. Folglich dürfen wir die übrigen Typen von unserem Gesichtspunkte aus außer Acht lassen.

§ 3. Ein Hilfssatz

Wir schicken noch einen sehr einfachen Hilfssatz voraus, den wir im folgenden mehrmals vorteilhaft verwenden werden:

Hilfssatz 1. *Es seien $\mathfrak{H}$ ein beliebiger Halbverband, $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ beliebig ausgewählte Elemente von $\mathfrak{H}$, und $f(\mathfrak{x})$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{H};\ f(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{H})$ eine gegebene eindeutige Funktion über $\mathfrak{H}$. Eine Gleichung*

$$\mathfrak{x} = f(\mathfrak{x})\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_r \tag{7}$$

ist nur dann identisch in $\mathfrak{x}$ erfüllt, wenn

(a) *$\mathfrak{H}$ ein Einselement besitzt,*

(b) *$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ alle gleich dem Einselement von $\mathfrak{H}$ sind, und*

(c) *$f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$ (für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{H}$) ist.*

Der Beweis ist fast trivial.[5] Multipliziert man (7) mit $\mathfrak{a}_r$, so folgt wegen der Assoziativität und der Idempotenz von $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{a}_r = f(\mathfrak{x})\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{r-1}(\mathfrak{a}_r\mathfrak{a}_r) = f(\mathfrak{x})\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_r = \mathfrak{x}$$

für jedes $\mathfrak{x}(\in \mathfrak{H})$. In der Tat ist also $\mathfrak{a}_r$ Einselement von $\mathfrak{H}$, womit die Behauptung (a) und für $\mathfrak{a}_r$ auch (b) bewiesen ist. Die Richtigkeit von (b) für die übrigen $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ folgt unmittelbar aus der Kommutativität und Assoziativität von $\mathfrak{H}$: wir dürfen nämlich $\mathfrak{a}_i$ mit $\mathfrak{a}_r$ vertauschen. Endlich folgt (c) aus (7) nach der eben jetzt bewiesenen Behauptung (b).

[5] Unter Heranziehung der natürlichen Halbordnung von $\mathfrak{H}$ ist Hilfssatz 1 ganz trivial. Wir wollen aber unsere Betrachtungen, ausgenommen §§ 7—8, unabhängig von dieser Halbordnung führen.

§ 4. Nichtausgeartete schiefe Produkte von Halbverbänden

In diesem Paragraphen werden wir die folgenden Sätze beweisen:

SATZ 1. *Ein Rédeisches schiefes Produkt* $H \circ \mathsf{H}$ *von Halbverbänden* H, H *ist dann und nur dann ein Halbverband, wenn*

(8. 1) H *ein Einselement* ε *hat,* (8. 2) H *ein Einselement* e *hat*

und die Gleichungen

(9. 1) $a^a = \varepsilon,$ (9. 2) $\alpha^\alpha = e,$

(10. 1) $\alpha^a = \alpha,$ (10. 2) $a^\alpha = a,$

(11. 1) $a^b = b^a,$ (11. 2) $\alpha^\beta = \beta^\alpha,$

(12. 1) $\alpha\beta\gamma a^b (ab\alpha^\beta)^c = \alpha\beta\gamma b^c (bc\beta^\gamma)^a,$ (12. 2) $abc\alpha^\beta (\alpha\beta a^b)^\gamma = abc\beta^\gamma (\beta\gamma b^c)^\alpha$

für alle $a, b, c (\in H)$, $\alpha, \beta, \gamma (\in \mathsf{H})$ *gelten.*[6]

KOROLLAR. *Ist* $H \circ \mathsf{H}$ *ein Halbverband, so gelten die Gleichungen*

(13. 1) $a^b (ab)^c = b^c (bc)^a,$ (13. 2) $\alpha^\beta (\alpha\beta)^\gamma = \beta^\gamma (\beta\gamma)^\alpha,$

(14. 1) $a^b (ab)^b = a^b,$ (14. 2) $\alpha^\beta (\alpha\beta)^\beta = \alpha^\beta$

für alle $a, b, c (\in H)$, $\alpha, \beta, \gamma (\in \mathsf{H})$.

SATZ 2. *Ein spezielles schiefes Produkt* $H \circ \mathsf{H}$ *von Halbverbänden* H, H *ist dann und nur dann ein Halbverband, wenn* (8. 1)—(11. 1), (8. 2)—(11. 2), (13. 1), (13. 2) *und*

(15. 1) $\xi\eta (x\xi^\eta)^y = \xi\eta x^y,$ (15. 2) $xy (\xi x^y)^\eta = xy\xi^\eta$

für alle $x, y (\in H)$, $\xi, \eta (\in \mathsf{H})$ *gelten.*

BEWEIS VOM SATZ 1. Durch unmittelbares Ausrechnen ist sofort einzusehen, daß die Bedingungen des Satzes hinreichend sind. Es bleibt also nur der Beweis ihrer Notwendigkeit übrig.

Zuerst nehmen wir nur an, daß $H \circ \mathsf{H}$ eine idempotente[7] kommutative multiplikative Struktur ist. Dann gelten die Gleichungen

$$(a, \alpha) \circ (a, \alpha) = (a, \alpha),$$
$$(a, \alpha) \circ (b, \beta) = (b, \beta) \circ (a, \alpha)$$

[6] Wir werden sehen, daß die Bedingungen (12. 1), (12. 2) die trivialen Assoziativitätsbedingungen von $H \circ \mathsf{H}$ sind. Es ist uns nicht gelungen und scheint im allgemeinen Fall auch nicht möglich zu sein, diese Bedingungen durch einfachere notwendige und hinreichende Bedingungen zu ersetzen. Man kann aus ihnen durch gewisse Spezialisierungen mehrere notwendige Bedingungen (siehe Korollar) gewinnen, die aber im allgemeinen nicht hinreichend sind.

[7] Eine multiplikative Struktur heißt *idempotent,* wenn jedes ihrer Elemente idempotent ist.

identisch in $a, b(\in H)$, $\alpha, \beta(\in \mathrm{H})$. Berechnet man beide Seiten dieser Gleichungen nach (2) und vergleicht die entsprechenden Komponenten miteinander, so ergeben sich die folgenden notwendigen Bedingungen für die Idempotenz und Kommutativität von $H \circ \mathrm{H}$:

(16. 1) $\quad a^a \alpha^a \alpha = \alpha, \qquad$ (16. 2) $\quad a a^\alpha \alpha^\alpha = a,$

(17. 1) $\quad a^b \alpha^b \beta = b^a \beta^a \alpha, \qquad$ (17. 2) $\quad a b^\alpha \beta^\alpha = b a^\beta \alpha^\beta.$

Wegen der Kommutativität von H und H entstehen die Gleichungen (16. 1) und (16. 2), (17. 1) und (17. 2) auseinander, indem man die entsprechenden lateinischen und griechischen Buchstaben miteinander vertauscht. Offenbar können wir also unsere Arbeit so erleichtern, daß wir nur die Folgerungen von (16. 1), (17. 1) untersuchen; die Vertauschung der lateinischen und griechischen Buchstaben in diesen Ausführungen liefert dann auch gültige Formeln, die genau die analogen Folgerungen von (16. 2), (17. 2) sind. Zum Zweck des leichteren Ausdrucks werden wir dieses Verfahren *das Symmetrisieren* des betreffenden Beweises nennen. Die dadurch entstehenden neuen Formeln werden die *symmetrisierten* der ursprünglichen Formeln genannt.

Betrachtet man in (16. 1) das Element a für einen Augenblick festgewählt und verwendet dann Hilfssatz 1 mit $f(\alpha) = \alpha^a \alpha$, so ergibt sich sofort, daß (8. 1), (9. 1) und

(18) $$\alpha^a \alpha = \alpha$$

für alle $a(\in H)$, $\alpha(\in \mathrm{H})$ erfüllt sind. Ferner folgt aus (17. 1) für $b = a$, mit Rücksicht auf (9. 1) (deren Richtigkeit schon bewiesen ist)

$$\alpha^a \beta = \beta^a \alpha,$$

woraus sich für $\beta = \alpha^a$

$$\alpha^a = (\alpha^a)^a \alpha$$

ergibt. Setzt man dies in (18) ein, so entsteht

$$\alpha = \alpha^a \alpha = (\alpha^a)^a \alpha \alpha = (\alpha^a)^a \alpha = \alpha^a$$

für alle $a \in H$, $\alpha \in \mathrm{H}$. Das ist aber genau die Bedingung (10. 1) vom Satz 1.

Betrachtet man jetzt (17. 1) für $\alpha = \beta = \varepsilon$[8] und wendet dann (10. 1) an, so folgt die Gleichung (11. 1).

Durch Symmetrisieren des vorangehenden folgt die Notwendigkeit der Bedingungen (8. 2)—(11. 2).

Wir können also unsere bisherigen Betrachtungen zusammenfassen im

Hilfssatz 2. *Ein Rédeisches schiefes Produkt $H \circ \mathrm{H}$ von Halbverbänden H und H ist nur dann idempotent und kommutativ, wenn H, H je ein Eins-*

[8] Man beachte, daß (8. 1) schon bewiesen ist.

element e bzw. ε besitzen und in $H \circ \mathrm{H}$ die Gleichungen (9. 1), (9. 2), (10. 1), (10. 2), (11. 1), (11. 2) *identisch gelten.*

Nach Hilfssatz 2 dürfen wir die Multiplikationsregel eines idempotenten und kommutativen $H \circ \mathrm{H}$ (statt (2)) in der einfacheren Form

(19. 1) $$(a, \alpha) \circ (b, \beta) = (ab\alpha^{\beta}, a^{b}\alpha\beta) \qquad (a, b \in H;\ \alpha, \beta \in \mathrm{H})$$

mit den Nebenbedingungen

(19. 2) $$\alpha^{\alpha} = e \quad (e \text{ existiert});\quad \beta^{\alpha} = \alpha^{\beta},$$

(19. 3) $$a^{a} = \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ existiert});\quad b^{a} = a^{b}$$

anwenden. Damit ein solches $H \circ \mathrm{H}$ ein Halbverband ist, ist notwendig, daß (es auch assoziativ, d. h.) für alle $a, b, c (\in H)$, $\alpha, \beta, \gamma (\in \mathrm{H})$

$$((a, \alpha) \circ (b, \beta)) \circ (c, \gamma) = (a, \alpha) \circ ((b, \beta) \circ (c, \gamma))$$

ist. Berechnet man beide Seiten nach (19. 1) und vergleicht sie miteinander, so ergeben sich (mit Rücksicht auf die Assoziativität und Kommutativität von H und H) die Gleichungen (12. 1), (12. 2). Mit Rücksicht auf Hilfssatz 2 haben wir also auch die Notwendigkeit der Bedingungen des Satzes gezeigt.

Beweis vom Korollar. Um Korollar zu beweisen, wenden wir (12. 1) für $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon$ an; nach (19. 2). entsteht dann (13. 1). Daraus folgt für $c = b$ wegen (19. 3) die Gleichung (14. 1). Endlich ergeben sich (13. 2), (14. 2) aus (13. 1) bzw. (14. 1) durch Symmetrisieren.

Beweis vom Satz 2. Zuerst beweisen wir die Notwendigkeit der Bedingungen des Satzes. Es sei also $H \circ \mathrm{H}$ ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt von Halbverbänden H, H, das auch selbst ein Halbverband ist. Dann gelten für $H \circ \mathrm{H}$, nebst den Bedingungen (8. 1)—(12. 1), (8. 2)—(12. 2) vom Satz 1 auch die Gleichungen (5. 1), (5. 2). Da (13. 1), (13. 2) nach dem Korollar auch jetzt gelten, brauchen wir nur die Notwendigkeit von (15. 1), (15. 2) zu zeigen.

Setzt man

$$\gamma = \varepsilon, \quad a = b = x, \quad c = y$$

in (12. 1) ein, so ergibt sich nach (19. 3) und (5. 1)

$$\alpha\beta(x\alpha^{\beta})^{y} = \alpha\beta x^{y}(xy)^{x}.$$

Nach dem Korollar ist die Gleichung (14. 1) gültig, so daß mit Rücksicht auf (19. 3)

$$\alpha\beta x^{y}(xy)^{x} = \alpha\beta \cdot y^{x}(yx)^{x} = \alpha\beta y^{x} = \alpha\beta x^{y}$$

ist, weshalb

$$\alpha\beta(x\alpha^{\beta})^{y} = \alpha\beta x^{y} \qquad (x, y \in H;\ \alpha, \beta \in \mathrm{H}),$$

d. h. die Gleichung (15. 1) gilt. (15. 2) ergibt sich durch Symmetrisieren.

Jetzt beweisen wir, daß die Bedingungen vom Satz 2 auch hinreichend sind. Das wird so stattfinden, daß wir die linke Seite von (12. 1) durch Anwendung von (15. 1) (für $x = ab$, $y = c$, $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$), von (13. 1) und wieder von (15. 1) (für $x = bc$, $y = a$, $\xi = \beta$, $\eta = \gamma$) in die rechte verwandeln. (Die Assoziativität und Kommutativität von H wird inzwischen wiederholt ausgenützt.) Es gelten nämlich

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma a^b(ab\alpha^\beta)^c &= \gamma a^b\cdot\alpha\beta(ab\alpha^\beta)^c = \gamma a^b\cdot\alpha\beta(ab)^c = \\ &= \alpha\beta\gamma\cdot a^b(ab)^c = \alpha\beta\gamma\cdot b^c(bc)^a = \\ &= \alpha b^c\cdot\beta\gamma(bc)^a = \alpha b^c\cdot\beta\gamma(bc\beta^\gamma)^a = \\ &= \alpha\beta\gamma b^c(bc\beta^\gamma)^a,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. Durch Symmetrisieren folgt die Richtigkeit von (12. 2). Somit haben wir Satz 2 bewiesen.

§ 5. Ausgeartete schiefe Produkte von Halbverbänden

In diesem Paragraphen beweisen wir den

SATZ 3. *Ein (ausgeartetes Rédeisches) schiefes Produkt $H\,{}_1\,\mathsf{H}$ von Halbverbänden H, H ist dann und nur dann ein Halbverband, wenn die Bedingungen* (8. 1), (9. 1), (10. 1), (10. 2), (11. 1), (14. 1) *für alle $a, b, c\,(\in H)$, $\alpha, \beta, \gamma\,(\in \mathsf{H})$ gelten.*

Ein (ausgeartetes Rédeisches) schiefes Produkt $H\,{}_2\,\mathsf{H}$ von Halbverbänden H, H ist dann und nur dann ein Halbverband, wenn es mit dem direkten Produkt $H\times\mathsf{H}$ von H, H übereinstimmt.

BEMERKUNG. Aus dem Beweis wird sich herausstellen, daß die letztere Behauptung des Satzes auch für nichtassoziative Halbverbände gilt. Für uns ist es aber nicht interessant.

BEWEIS. Zum Beweis des Satzes können wir den ähnlichen Weg wie im § 4 verfolgen, weshalb es darauf hinzuweisen genügt, wie sich die einzelnen Schritte des Beweises modifizieren.

Vor allem ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen des Satzes sowohl für $H\,{}_1\,\mathsf{H}$ als auch für $H\,{}_2\,\mathsf{H}$ hinreichend sind. Um ihre Notwendigkeit zu zeigen, nehmen wir an, daß $H\,{}_i\,\mathsf{H}$ $(i = 1, 2)$ ein Halbverband ist.

Man sieht sofort, daß aus der Idempotenz von $H\,{}_i\,\mathsf{H}$ die Gleichung (18) und die symmetrisierte Gleichung auch jetzt folgen. Und zwar folgen sie für eine ausgeartete H- bzw. *H-Komponente* unmittelbar, und für eine nichtausgeartete ebenso wie im § 4. Dagegen hat (9. 1) bzw. (9. 2) für eine ausgeartete H- bzw. H-Komponente keinen Sinn (für eine nichtausgeartete Kompo-

nente gilt auch jetzt die entsprechende Gleichung); folglich ist für die Idempotenz von $H {}_1 \mathrm{H}$ die Existenz des Einselementes in H und für die Idempotenz von $H {}_2 \mathrm{H}$ die Existenz des Einselementes in beiden Halbverbänden H, H nicht notwendig.

Aus der Kommutativität von $H {}_i \mathrm{H}$ $(i=1,2)$, d. h. aus den Gleichungen

$$(a,\alpha) {}_i (b,\beta) = (b,\beta) {}_i (a,\alpha) \qquad (\text{für alle } a, b \in H;\ \alpha, \beta \in \mathrm{H})$$

folgt, daß die Gleichungen

$$ab^\alpha = ba^\alpha, \qquad \alpha^a\beta = \beta^a\alpha$$

auch jetzt identisch gelten. Und zwar ergibt sich die erste bzw. die zweite

1. für eine ausgeartete H- bzw. H-Komponente unmittelbar durch die spezielle Wahl $\beta=\alpha$ bzw. $b=a$,

2. für eine nichtausgeartete Komponente auf demselben Weg wie in § 4.

Auf Grund dieser Tatsache kann man aber schon (10. 1), (10. 2) ebenso wie im Fall eines nichtausgearteten schiefen Produktes (also mit Hilfe der Gleichung (18) und ihrer symmetrisierten) gewinnen.

Für $H {}_2 \mathrm{H}$ bedeuten aber (10. 1), (10. 2) genau, daß es nur dann ein Halbverband[9] ist, wenn es mit dem direkten Produkt $H \times \mathrm{H}$ von H und H übereinstimmt. Die zweite Behauptung vom Satz 3 ist also schon bewiesen.

Auch für $H {}_1 \mathrm{H}$ folgt aus (10. 1), (10. 2), daß die H-Komponente dieses schiefen Produktes mit der von $H \times \mathrm{H}$ übereinstimmt; dagegen sind die H-Komponenten von $H {}_1 \dot{\mathrm{H}}$ und $H \times \mathrm{H}$ im allgemeinen verschieden. Dementsprechend sagen wir, daß die H-Komponente von $H {}_1 \mathrm{H}$ *direkt*, aber die H-Komponente von $H {}_2 \mathrm{H}$ im allgemeinen *nicht direkt* ist.

Im vorangehenden haben wir unter anderem auch gezeigt, daß $H {}_1 \mathrm{H}$ nur dann ein Halbverband sein kann, wenn in H ein Einselement ε existiert. Aus

$$(a,\varepsilon) {}_1 (b,\varepsilon) = (b,\varepsilon) {}_1 (a,\varepsilon)$$

können wir aber nach (10. 1) auch (11. 1) herleiten. Ferner ist (11. 2), wegen der Ausartung der H-Komponente, für $H {}_1 \dot{\mathrm{H}}$ sinnlos.

Es gilt also

HILFSSATZ 3. *Ein ausgeartetes Rédeisches schiefes Produkt* $H {}_1 \mathrm{H}$ *von Halbverbänden* H, H *ist nur dann idempotent und kommutativ, wenn* H *ein Einselement* ε *besitzt und die Gleichungen* (9. 1), (10. 1), (10. 2), (11. 1) *identisch gelten.*

[9] Genauer: ... nur dann eine kommutative und idempotente multiplikative Struktur ist, wenn es ... .

Im folgenden dürfen wir also die Multiplikationsregel von $H \mathbin{\scriptstyle 1} \mathrm{H}$ (statt (3)) in der einfacheren Form[10]

$$(a, \alpha) \mathbin{\scriptstyle 1} (b, \beta) = (ab, a^b \alpha \beta) \qquad (a, b \in H\,;\ \alpha, \beta \in \mathrm{H})$$

mit den Nebenbedingungen

$$a^a = \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ existiert}), \quad b^a = a^b$$

annehmen.

Da die H-Komponente eines solchen $H \mathbin{\scriptstyle 1} \mathrm{H}$ direkt ist, so ist es nach den Nebenbedingungen (dann und) nur dann eine assoziative Struktur, wenn die Gleichung

$$\alpha \beta \gamma a^b (ab)^c = \alpha \beta \gamma b^c (bc)^a$$

für alle $a, b, c (\in H)$, $\alpha, \beta, \gamma (\in \mathrm{H})$ gilt. Da diese Gleichung für $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon$ genau (14. 1) gibt, so ist mit Rücksicht auf Hilfssatz 3 die Notwendigkeit der Bedingungen vom Satz 3 auch für $H \mathbin{\scriptstyle 1} \mathrm{H}$ bewiesen. Somit haben wir den Beweis vom Satz 3 beendigt.

§ 6. Existenz des Einselements in $H \circ \mathrm{H}$ und $H \mathbin{\scriptstyle 1} \mathrm{H}$

Wir wollen unsere gegenwärtigen Untersuchungen von den vorangehenden zwei Paragraphen unabhängig führen. Dementsprechend betrachten wir die schiefen Produkte $H \circ \mathrm{H}$ und $H \mathbin{\scriptstyle 1} \mathrm{H}$ zweier Halbverbände H und H, die nicht notwendig Einselemente besitzen, und setzen von $H \circ \mathrm{H}$ oder $H \mathbin{\scriptstyle 1} \mathrm{H}$ weder die Idempotenz noch die Kommutativität noch die Assoziativität voraus.

Das Element (a, α) ist dann und nur dann das Einselement von $H \mathbin{\scriptstyle i} \mathrm{H}$ $(i = 0, 1)$, wenn die Gleichungen

$$(a, \alpha) \mathbin{\scriptstyle i} (x, \xi) = (x, \xi), \quad (x, \xi) \mathbin{\scriptstyle i} (a, \alpha) = (x, \xi)$$

für jedes Paar $x \in H$, $\xi \in \mathrm{H}$ gelten. Berechnet man beide Seiten dieser Gleichungen nach (2) bzw. (3), und vergleicht sie miteinander, so ergeben sich die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{lr} (20.\ 1) & a x^{\alpha} \xi^{\alpha} = x, \\ (20.\ 2) & a^{x} \alpha^{x} \xi = \xi, \\ (20.\ 3) & x a^{\xi} \alpha^{\xi} = x, \\ (20.\ 4) & x^{a} \xi^{a} \alpha = \xi, \end{array}\right\} \quad (\text{für alle } a \in H,\ \alpha \in \mathrm{H}),$$

[10] Entsprechend der gruppentheoretischen Terminologie darf man ein schiefes Produkt mit dieser Multiplikationsregel ein *Schreiersches Produkt von H und* H nennen. Es ist leicht einzusehen, daß ein Schreiersches Produkt von H und H, in dem die nachstehenden Nebenbedingungen gelten, immer kommutativ und idempotent ist.

wobei die unterstrichenen Faktoren nur in $H \circ \mathrm{H}$ (nicht mehr aber in $H \mathrm{\,1\,} \mathrm{H}$) zu beachten sind.

Im Fall $H \circ \mathrm{H}$ halten wir ξ in (20. 1) für einen Augenblick fest. So folgt aus Hilfssatz 1 (für $f(x) = x^\alpha$), daß H ein Einselement e besitzt und

$$a = e, \tag{21. 1}$$

$$x^a = x \quad (\text{für alle } x \in H), \tag{21. 2}$$

$$\xi^a = e \quad (\text{für alle } \xi \in \mathrm{H}) \tag{21. 3}$$

gelten. Im Fall $H \,{\scriptstyle 1}\, \mathrm{H}$ ist (21. 3) sinnlos; die Existenz von e, ferner (21. 1) und (21. 2) folgen dagegen nach Hilfssatz 1 unmittelbar aus (20. 1).[11]

Hält man jetzt x in (20. 4) für einen Augenblick fest, so ergibt sich wieder nach Hilfssatz 1 (für $f(\xi) = \xi^a$), daß auch H ein Einselement ε besitzt, ferner daß die Gleichungen

$$\alpha = \varepsilon, \tag{21. 4}$$

$$\xi^\alpha = \xi \quad (\text{für alle } \xi \in \mathrm{H}), \tag{21. 5}$$

$$x^\alpha = \varepsilon \quad (\text{für alle } x \in H) \tag{21. 6}$$

gelten.

Ähnlich bekommen wir aus (20. 2) und (20. 3) (d. h., wenn wir x bzw. ξ für einen Augenblick festgehalten denken) die Gleichungen

$$a^x = \alpha^x = \varepsilon \quad (\text{für alle } x \in H), \tag{21. 7}$$

$$a^\xi = \underline{\alpha}^\xi = e \quad (\text{für alle } \xi \in \mathrm{H}). \tag{21. 8}$$

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse zusammen. Hat ein $H \,{\scriptstyle i}\, \mathrm{H}$ $(i = 0, 1)$ ein Einselement, so müssen H, H je ein Einselement e bzw. ε haben, ferner für $i = 0$ die Gleichungen

$$\xi^e = e, \qquad \varepsilon^\xi = e, \tag{22. 1}$$

$$x^\varepsilon = \varepsilon, \qquad e^x = \varepsilon, \tag{22. 2}$$

$$x^e = x, \qquad \xi^\varepsilon = \xi, \tag{22. 3}$$

$$\varepsilon^x = \varepsilon, \qquad e^\xi = e, \tag{22. 4}$$

und für $i = 1$ die Gleichungen (22. 2)—(22. 4) identisch gelten.

Umgekehrt, es ist leicht zu sehen, daß die Bedingungen (22. 1)—(22. 4) bzw. (22. 2)—(22. 4) auch hinreichend dafür sind, daß (e, ε) das Einselement von $H \circ \mathrm{H}$ bzw. $H \,{\scriptstyle 1}\, \mathrm{H}$ ist.

11 Übrigens folgt aus der Existenz des Einselements von H, daß wir jedes $H \,{\scriptstyle 1}\, \mathrm{H}$ mit Einselement auch als ein spezielles $H \circ \mathrm{H}$ betrachten dürfen, in dem für jedes Paar $\alpha, \beta (\in \mathrm{H})$ die Bedingung $\alpha^\beta = e$ gilt. Diese Tatsache dient uns aber in den folgenden Untersuchungen zu keiner Erleichterung.

Somit haben wir bewiesen

Satz 4. *Ein schiefes Produkt* $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$ *von Halbverbänden* H, H *besitzt ein Einselement dann und nur dann, wenn* H, H *je ein Einselement* e *bzw.* ε *besitzen, und für* $i=0$ *bzw.* $i=1$ *die Gleichungen* (22. 1)—(22. 4) *bzw.* (22. 2)—(22. 4) *für alle* $x \in H$, $\xi \in \mathsf{H}$ *gelten. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist* (e, ε) *das Einselement von* $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$.

Man kann einen ähnlichen (aber nach Satz 3 nur wenig interessanten) Satz auch für $H\,{\scriptstyle 2}\,\mathsf{H}$ gewinnen.

Wir wollen jetzt die Bedingungen (22. 1)—(22. 4) etwas näher betrachten. Vor allem sehen wir, daß (5. 1), (5. 2) mit (22. 1) bzw. mit (22. 2) übereinstimmen. Es gilt also

Satz 5. *Ein* $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$ *besitzt ein Einselement nur dann, wenn es ein spezielles (nichtausgeartetes oder ausgeartetes) schiefes Produkt von* H, H *ist.*

Weiter sehen wir, daß (22. 3), (22. 4) je Folgerungen aus (10. 1) und (10. 2) sind, so daß sie nach Hilfssatz 2 und 3 in jedem kommutativen idempotenten $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$ bestehen. Es gilt also

Satz 6. *Ist ein spezielles schiefes Produkt* $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$ *kommutativ und idempotent, so hat es das Einselement* (e, ε).

Die Sätze 5 und 6 führen zum folgenden

Korollar. *Ein Halbverband von der Form* $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$ *besitzt ein Einselement dann und nur dann, wenn es ein spezielles schiefes Produkt der Halbverbände* H *und* H *ist.*

§ 7. Halbordnung in einem Rédeischen schiefen Produkt von Halbverbänden

In diesem Paragraphen bedeute $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$ ein (nichtausgeartetes bzw. ausgeartetes) Rédeisches schiefes Produkt von Halbverbänden H, H, das auch selbst ein Halbverband ist. Dann gibt es je eine natürliche Halbordnung sowohl in H und H als auch in $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$. Wir wollen die Beziehungen zwischen den natürlichen Halbordnungen von H und H einerseits und von $H\,{\scriptstyle i}\,\mathsf{H}$ $(i=0,1)$ andererseits untersuchen.

Nach der Definition ist in der natürlichen Halbordnung von $H \circ \mathsf{H}$ dann und nur dann

$$(a, \alpha) \leqq (b, \beta),$$

wenn (mit Rücksicht auf (19. 1))

$$(b, \beta) = (a, \alpha) \circ (b, \beta) = (a b \alpha^{\beta}, a^{b} \alpha \beta) = (a \alpha^{\beta} b, a^{b} \alpha \beta),$$

d. h. wenn

$$a\alpha^\beta b = b, \qquad a^b \alpha\beta = \beta$$

ist. Daraus gewinnen wir nach der Definition der natürlichen Halbordnung in H bzw. H, daß *in* $H \circ \mathsf{H}$ *dann und nur dann* $(a, \alpha) \leqq (b, \beta)$ *ist, wenn*

$$a, \alpha^\beta \leqq b \quad (\mathit{in}\ H),$$
$$\alpha, a^b \leqq \beta \quad (\mathit{in}\ \mathsf{H})$$

gelten.

Ähnlich folgt, daß *in* $H \circ \mathsf{H}$ *dann und nur dann* $(a, \alpha) \leqq (b, \beta)$ *ist, wenn*

$$a \leqq b \quad (\mathit{in}\ H),$$
$$\alpha, a^b \leqq \beta \quad (\mathit{in}\ \mathsf{H})$$

gelten.

§ 8. Beispiele

1. Es sei F bzw. Φ ein Halbverband mit zwei Elementen e, f bzw. ε, φ, wobei e, ε das Einselement von F bzw. Φ ist. Ein allgemeines schiefes Produkt $F \circ \Phi$ ist nach Satz 1 nur dann ein Halbverband, wenn

$$\varepsilon^\varepsilon = \varphi^\varphi = e, \qquad e^e = f^f = \varepsilon$$

ist. Wegen der Symmetrie von F und Φ in der Multiplikationsregel von $F \circ \Phi$ und nach den Bedingungen (11. 1), (11. 2) vom Satz 1 gibt es also für die auftretenden Funktionen nur drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten:

1. $\varepsilon^\varphi = \varphi^\varepsilon = e, \quad e^f = f^e = \varepsilon;$
2. $\varepsilon^\varphi = \varphi^\varepsilon = e, \quad e^f = f^e = \varphi;$
3. $\varepsilon^\varphi = \varphi^\varepsilon = f, \quad e^f = f^e = \varphi.$

Das entsprechende $F \circ \Phi$ bezeichnen wir der Reihe nach mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$. Man überzeugt sich leicht, daß jedes $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Bedingungen vom Satz 1 erfüllt, folglich jedes $\mathfrak{F}_i$ ein Halbverband ist. $\mathfrak{F}_1$ stimmt sogar mit dem direkten Produkt $F \times \Phi$ überein; $\mathfrak{F}_2$ unterscheidet sich von $F \times \Phi$ (wie es durch unmittelbares Ausrechnen sofort einzusehen ist) nur darin, daß in $\mathfrak{F}_2$

$$(e, \varepsilon) \circ (f, \varepsilon) = (f, \varphi)$$

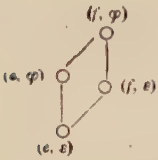
(also $(e, \varepsilon) \circ (f, \varepsilon) \neq (f, \varepsilon)$) gilt.[12] Endlich sind in $\mathfrak{F}_3$ alle Produkte von zwei verschiedenen Elementen gleich (f, φ).

Mit Hilfe der Hasseschen Diagramme (die in der Theorie der halbgeordneten Mengen für Veranschaulichung oft gebraucht werden, siehe z. B. [3],

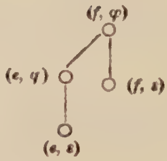
[12] Übrigens ist $\mathfrak{F}_2$ im wesentlichen ein Schreiersches Produkt.

S. 8) lassen sich diese $\mathfrak{F}_i$ ($i = 1, 2, 3$) so darstellen:

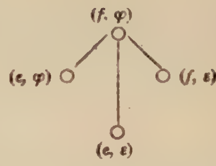
$\mathfrak{F}_1$:



$\mathfrak{F}_2$:



$\mathfrak{F}_3$:



2. Es sei S ein Halbverband mit drei Elementen a, b, c, in dem die Multiplikation durch die Halbverbandsaxiome und durch

$$ab = ac = bc = c$$

angegeben ist. Ferner sei Σ ein Halbverband mit zwei Elementen ε, σ; ε sei das Einselement von Σ. Weil S ein Halbverband ohne Einselement ist, so bildet kein $S \circ \Sigma$ einen Halbverband. Wir betrachten deshalb weiter nur die Schreierschen Produkte $S \wr \Sigma$.

Damit $S \wr \Sigma$ einen Halbverband bildet, ist nach Satz 3 vor allem notwendig, daß

$$a^a = b^b = c^c = \varepsilon,$$

$$a^b = b^a, a^c = c^a, b^c = c^b$$

gelten. Ferner müssen auch

$$a^b(ab)^c = b^c(bc)^a$$

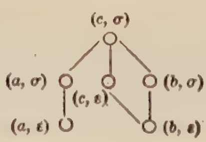
gelten, woraus wegen der Multiplikationsregel in S und wegen $c^c = \varepsilon$ die Beziehung

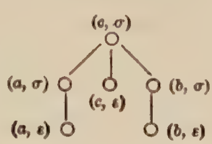
$$a^b(= c^a b^c) = a^c b^c$$

folgt. Letzteres bedeutet, daß es wegen der symmetrischen Rolle von a und b drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt:

1. $a^b = a^c = b^c = \varepsilon$;
2. $a^b = a^c = \sigma$, $b^c = \varepsilon$;
3. $a^b = a^c = b^c = \sigma$.

Das durch 1 gegebene $S \wr \Sigma$ ist offenbar das direkte Produkt von S und Σ. Man kann durch unmittelbares Ausrechnen zeigen, daß auch die durch 2 und 3 gegebenen $S \wr \Sigma$ lauter Halbverbände sind, und zwar mit den Diagrammen





§ 9. Anwendung auf schiefe Produkte von Verbänden

Es seien L, Λ zwei Verbände[13] mit den Elementen $a, b, \ldots$ bzw. $\alpha, \beta, \ldots$. Die Vereinigung von zwei Elementen sei in beiden Verbänden mit dem Zeichen $\cup$, der Durchschnitt mit $\cap$ ausgedrückt. Das Einselement der Vereinigung (bzw. des Durchschnitts) in L, wenn es existiert, wird mit o bzw. i bezeichnet; die Elemente mit ähnlicher Eigenschaft in Λ werden mit ω bzw. ι bezeichnet.

Nach den Verbandsaxiomen bildet jeder Verband sowohl für die Vereinigung als auch für die Durchschnittsbildung je einen Halbverband, den man den *Vereinigungs-* bzw. *Durchschnittshalbverband* des betreffenden Verbands nennt.

Es bedeute $\mathfrak{L}$ die Menge aller Elementepaare

$$(a, \alpha) \qquad (a \in L, \alpha \in \Lambda),$$

wobei $(a, \alpha) = (b, \beta)$ dann und nur dann gilt, wenn $a = b$, $\alpha = \beta$ ist. Im Sinne von [6] verstehen wir unter einem schiefen Produkt von L und Λ eine algebraische Struktur über $\mathfrak{L}$. Von diesen betrachten wir jetzt nur diejenigen, in denen zwei Verknüpfungen (mit den Verknüpfungszeichen $\cup, \cap$) definiert sind; sie werden im allgemeinen mit $\mathfrak{L}(L, \Lambda; \cup, \cap)$ bezeichnet.

In diesem Paragraphen wollen wir die sämtlichen $\mathfrak{L}(L, \Lambda; \cup, \cap)$ bestimmen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(I) $\mathfrak{L}(L, \Lambda; \cup, \cap)$ bildet einen Verband für die Verknüpfungen $\cup, \cap$;

(II) Der Vereinigungs- bzw. Durchschnittshalbverband von $\mathfrak{L}(L, \Lambda; \cup, \cap)$ ist gleich je einem Rédeischen schiefen Produkt der entsprechenden Halbverbände von L und Λ.

Aus (II) folgt sofort, daß die in §§ 4—5 gewonnenen Ergebnisse, insbesondere die Gleichungen (10. 1), (10. 2) sinngemäß auch für die Vereinigungs- und Durchschnittshalbverbände von $\mathfrak{L}(L, \Lambda; \cup, \cap)$ gültig sind. Der allgemeinste Typ der gesuchten schiefen Produkte ist also, in dem die Verknüpfungen $\cup, \cap$ durch die Regeln

$$(a, \alpha) \cup (b, \beta) = (a \cup b \cup \langle \alpha, \beta \rangle, \alpha \cup \beta \cup [a, b]), \tag{23. 1}$$

$$(a, \alpha) \cap (b, \beta) = (a \cap b \cap \{\alpha, \beta\}, \alpha \cap \beta \cap |a, b|) \tag{23. 2}$$

gegeben sind, wobei

$$\langle \alpha, \beta \rangle, \{\alpha, \beta\} \, (\in L); \; [a, b], |a, b| \, (\in \Lambda) \qquad (\alpha, \beta \in \Lambda; \; a, b \in L) \tag{24}$$

Funktionen mit zwei Variabeln bedeuten; die Verknüpfungsregeln der übrigen für uns geeigneten Typen ergeben sich so, daß man in der rechten Seite von

[13] Für die Definitionen und für die hier angewandten Ergebnisse der Verbandstheorie siehe [1] oder [3].

(23. 1) oder (23. 2) eine oder mehrere Funktionen von der Form (24) wegläßt. Wegen der verbandstheoretischen Dualität und der symmetrischen Rolle von L und Λ in (23. 1), (23. 2) gibt es insgesamt sieben wesentlich verschiedene Typen solcher schiefen Produkte, die wir mit $L\,{}^{0}\Lambda, L\,{}^{1}\Lambda, \ldots, L\,{}^{6}\Lambda$ bezeichnen und mit Hilfe folgender Tabelle definieren, wobei das Zeichen $+$ [bzw. $-$] im Schnittpunkt der Zeile eines $L\,{}^{i}\Lambda$ ($i=0, 1, \ldots, 6$) und der Spalte einer Funktion (24) bedeutet, daß die entsprechende Funktion in den Verknüpfungsregeln von $L\,{}^{i}\Lambda$ vorkommt [bzw. nicht vorkommt].

	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$[a, b]$	$\{\alpha, \beta\}$	$\|a, b\|$
$L\,{}^{0}\Lambda$	$+$	$+$	$+$	$+$
$L\,{}^{1}\Lambda$	$-$	$+$	$+$	$+$
$L\,{}^{2}\Lambda$	$-$	$+$	$+$	$-$
$L\,{}^{3}\Lambda$	$-$	$+$	$-$	$+$
$L\,{}^{4}\Lambda$	$-$	$-$	$+$	$+$
$L\,{}^{5}\Lambda$	$-$	$-$	$-$	$+$
$L\,{}^{6}\Lambda$	$-$	$-$	$-$	$-$

$L\,{}^{6}\Lambda$ ist also das direkte Produkt von L und Λ; es wird im folgenden mit $L \times \Lambda$ bezeichnet.

Nach dem gesagten besteht unsere Aufgabe in der Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit ein schiefes Produkt $L\,{}^{i}\Lambda$ ($i=0, 1, \ldots, 5$) von zwei Verbänden L, Λ wieder einen Verband bildet. ($L \times \Lambda$ ist offenbar ein Verband, wenn L und Λ es sind.) In unseren Betrachtungen werden wir die in §§ 4—5 gewonnenen Ergebnisse mehrmals benützen. Bequemlichkeitshalber formulieren wir die zu verwendenden früheren Tatsachen in der neu eingeführten Symbolik:

Ein schiefes Produkt $L\,{}^{i}\Lambda$ ($i=0, 1, \ldots, 5$), *bei dem die Funktion*

$$\langle\alpha, \beta\rangle \quad bzw. \quad [a, b]$$

in der Definition der Vereinigung auftritt, bildet für diese Verknüpfung nur dann einen Halbverband, wenn das Element

$$o(\in L) \quad bzw. \quad \omega(\in \Lambda)$$

existiert, und die Gleichungen

$$\langle\alpha, \alpha\rangle = o, \quad \langle\alpha, \beta\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle \tag{25. 1}$$

bzw.

$$[a, a] = \omega, \quad [a, b] = [b, a] \tag{25. 2}$$

identisch gelten. Tritt in der Definition der Durchschnittsbildung die Funktion

$$\{\alpha, \beta\} \quad bzw. \quad |a, b|$$

auf, so bildet $L \overset{i}{\cdot} \Lambda$ *für diese Verknüpfung nur dann einen Halbverband, wenn das Element*

$$i(\in L) \quad bzw. \quad \iota(\in \Lambda)$$

existiert, und die Gleichungen

$$\{\alpha, \alpha\} = i, \quad \{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\} \tag{25.3}$$

bzw.

$$|a, a| = \iota, \quad |a, b| = |b, a| \tag{25.4}$$

identisch gelten. Ferner ist es auch notwendig, daß jede der Gleichungen

$$\langle\alpha, \beta\rangle \cup \langle\alpha \cup \beta, \gamma\rangle = \langle\beta, \gamma\rangle \cup \langle\beta \cup \gamma, \alpha\rangle, \tag{26.1}$$

$$[a, b] \cup [a \cup b, c] = [b, c] \cup [b \cup c, a], \tag{26.2}$$

$$\{\alpha, \beta\} \cap \{\alpha \cap \beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\} \cap \{\beta \cap \gamma, \alpha\}, \tag{26.3}$$

$$|a, b| \cap |a \cap b, c| = |b, c| \cap |b \cap c, a|, \tag{26.4}$$

die für das betrachtete $L \overset{i}{\cdot} \Lambda$ *überhaupt sinnvoll ist, für alle* $\alpha, \beta, \gamma (\in \Lambda)$ *bzw.* $a, b, c (\in L)$ *gilt.*

Mit Hilfe dieser Resultate werden wir beweisen

SATZ 7. *Ein schiefes Produkt* $L \overset{i}{\cdot} \Lambda$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$ *von zwei Verbänden* L, Λ *ist dann und nur dann ein Verband, wenn es mit dem direkten Produkt* $L \times \Lambda$ *übereinstimmt.*

KOROLLAR. *Das einzige „schiefe" Produkt* $\mathfrak{L}(L, \Lambda; \cup, \cap)$, *das den Forderungen* (I), (II) *entspricht, ist das direkte Produkt von* L *und* Λ.

BEWEIS. Weil $L \times \Lambda$ immer ein Verband ist, brauchen wir nur die Notwendigkeit der Bedingung des Satzes zu beweisen. Das Korollar ist nach dem oben gesagten eine triviale Folgerung des Satzes.

Stellt ein $L \overset{i}{\cdot} \Lambda$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$ einen Verband vor, so soll es unter anderem den sogenannten Verschmelzungsgesetzen ([3], S. 1) Genüge leisten. Das bedeutet, daß in dem betrachteten $L \overset{i}{\cdot} \Lambda$ die Gleichungen

$$(a, \alpha) \cup ((a, \alpha) \cap (b, \beta)) = (a, \alpha), \tag{27.1}$$

$$(a, \alpha) \cap ((a, \alpha) \cup (b, \beta)) = (a, \alpha) \tag{27.2}$$

für alle $a, b (\in L)$ und $\alpha, \beta (\in \Lambda)$ gelten sollen.

Für $L \circ \Lambda$ folgt aus (27.1), mit Rücksicht auf die Verknüpfungsregeln (23.1), (23.2) und auf die Verschmelzungsgesetze von L und Λ,

$$\begin{aligned}(a, \alpha) &= (a, \alpha) \cup ((a, \alpha) \cap (b, \beta)) = \\ &= (a, \alpha) \cup (a \cap b \cap \{\alpha, \beta\}, \alpha \cap \beta \cap |a, b|) = \\ &= (a \cup \langle\alpha, \alpha \cap \beta \cap |a, b|\rangle, \alpha \cup [a, a \cap b \cap \{\alpha, \beta\}]).\end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit den zwei Identitäten

$$a \cup \langle \alpha, \alpha \cap \beta \cap |a, b| \rangle = a,$$

$$\alpha \cup [a, a \cap b \cap \{\alpha, \beta\}] = \alpha.$$

Wendet man sie auf den Spezialfall $a = b$ bzw. $\alpha = \beta$ an, und betrachtet (25. 4) bzw. (25. 3), so gewinnt man, als notwendige Bedingungen,

$$a \cup \langle \alpha, \alpha \cap \beta \rangle = a,$$

$$\alpha \cup [a, a \cap b] = \alpha$$

für alle $a, b \in L$ und $\alpha, \beta \in \Lambda$. Das sind aber gleichbedeutend mit

(28. 1) $$\langle \alpha, \alpha \cap \beta \rangle = o,$$

(28. 2) $$[a, a \cap b] = \omega.$$

Auf gleiche Weise — aus (27. 2) — folgen die notwendigen Bedingungen

(28. 3) $$\{\alpha, \alpha \cup \beta\} = i,$$

(28. 4) $$|a, a \cup b| = \iota.$$

Im Fall eines $L i \Lambda$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ kann man sich durch ähnliches unmittelbares Ausrechnen leicht überzeugen, daß alle diejenigen von den Identitäten (28. 1)—(28. 4), die für dieses $L i \Lambda$ überhaupt sinnvoll sind, als notwendige Bedingungen für die Erfüllung der Verschmelzungsgesetze in $L i \Lambda$ auftreten. Ausführlich gesagt, gelten

für	die Identitäten
$L 1 \Lambda$	(28. 2), (28. 3), (28. 4);
$L 2 \Lambda$	(28. 2), (28. 3);
$L 3 \Lambda$	(28. 2), (28. 4);
$L 4 \Lambda$	(28. 3), (28. 4);
$L 5 \Lambda$	(28. 4).

Im folgenden betrachten wir die $L i \Lambda$ für $i = 0$ und für $i \neq 0$ gleichzeitig. Den Beweis des Satzes beenden wir so, daß wir die Übereinstimmung jeder einzelnen Komponente von $L i \Lambda$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$ mit derjenigen von $L \times \Lambda$ zeigen.

Wir beschäftigen uns nur mit der L-Komponente der Vereinigung; wie es aber aus der Methode der nachstehenden Beweisführung leicht zu sehen sein wird, kann man für die übrigen Komponenten das analoge Verfahren durchführen.

Ist diese Komponente schon nach der Definition des betrachteten $L i \Lambda$ direkt (ist also $i \neq 0$), so ist nichts zu beweisen. Man darf sich also auf den Fall beschränken, daß die Funktion $\langle \alpha, \beta \rangle$ auftritt — folglich (25. 1).

(26. 1) und (28. 1) gelten — und dann soll aus diesen Bedingungen die Identität $\langle\alpha, \beta\rangle = o$ deduziert werden.

Dazu wollen wir (26. 1) für den Spezialfall

$$\gamma = \alpha \cup \beta$$

anwenden. Wird aber γ so gewählt, dann gelten nach den (in A gültigen) Verbandsaxiomen

$$\beta \cup \gamma = \beta \cup (\alpha \cup \beta) = \alpha \cup \beta = \gamma,$$
$$\beta = (\alpha \cup \beta) \cap \beta = \gamma \cap \beta,$$
$$\alpha = (\alpha \cup \beta) \cap \alpha = \gamma \cap \alpha.$$

Für $\gamma = \alpha \cup \beta$ bekommt man also aus (26. 1), mit Rücksicht auf (25. 1) und (28. 1), die Gleichung

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\beta, \gamma\rangle \cup \langle\gamma, \alpha\rangle = \langle\gamma, \beta\rangle \cup \langle\gamma, \alpha\rangle =$$
$$= \langle\gamma, \gamma \cap \beta\rangle \cup \langle\gamma, \gamma \cap \alpha\rangle = o \cup o = o,$$

die für jede $\alpha, \beta \in A$ gültig ist. Damit ist aber die Behauptung des Satzes für die L-Komponente der Vereinigung bewiesen.

Wie es schon oben bemerkt wurde, folgt die Richtigkeit der Behauptung für die übrigen Komponenten auf ähnliche Weise. Damit ist Satz 7 bewiesen.

(Eingegangen am 16. August 1956.)

Literaturverzeichnis

[1] M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Cahiers scientifiques, fasc. XXI (Paris, 1953).

[2] L. Fuchs, Rédeian skew product of operator groups, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951—52), S. 228—238.

[3] H Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. LXXIII (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955).

[4] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal für die reine und angew. Math.*, **192** (1953), S. 96—101.

[5] L. Rédei, Das „schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören, *Commentarii Math. Helv.*, **20** (1947), S. 225—264.

[6] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angew. Math.*, **188** (1950), S. 201—227.

[7] L. Rédei und A. Stöhr, Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie. *Acta Sci. Math.*, **15** (1953—54), S. 7—11.

[8] L. Rédei und O. Steinfeld, Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953—54), S. 243—250.

[9] F. Rühs, Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), S. 160—164.

КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РЕДЕИ ПОЛУСТРУКТУР

Г. Сас (Сегед)

(Резюме)

Пусть H, H — две полуструктуры, $\mathcal{H}$ — множество всех упорядоченных пар (a, α) $(a \in H,\ \alpha \in \mathrm{H})$. Следуя Кохендорферу, мы понимаем под невырождающимся косым произведением Редеи полуструктур H, H, состоящую из элементов $\mathcal{H}$ мултипликативную алгебру (обозначение $H^{0}\mathrm{H}$) в которой умножение определяется формулой (2); а входящие в (2) символы вида (1) означают функции двух переменных. Под k-кратно вырождающимся косым произведением Редеи полуструктур H, H мы понимаем такую состоящую также из элементов $\mathcal{H}$ мултипликативную алгебру, в которой правило умножения подвергнуто следующей модификации: из условий

(I) $b^{\alpha} = b$ для всех $b \in H$ и $\alpha \in \mathrm{H}$;

(II) $\alpha^{b} = \alpha$ для всех $b \in H$ и $\alpha \in \mathrm{H}$;

(III) α^{β} вычеркивается на правой стороне (2);

(IV) a^{b} вычеркивается на правой стороне (2)

выполняется точно k. Для нашей цели, которая будет изложена ниже, представляют интерес только два вырождающихся типа, которые мы будем обозначать через $H^{1}\mathrm{H}$, $H^{2}\mathrm{H}$ и которые определяются правилами умножения (3) и (4) соответственно.

Назовем косое произведение $H^{0}\mathrm{H}$ соотв. $H^{1}\mathrm{H}$ специальным, если H имеет единицу e, H — единицу ε и (5. 1), (5. 2) выполняютя для любых $a(\in H)$, $\alpha(\in \mathrm{H})$, соответственно (5. 2) выполняется для любого $\alpha(\in \mathrm{H})$.

Нашей главной целью является установление необходимых и достаточных условий для того, чтобы некоторое косое произведение Редеи полуструктур H, H снова оказалось полуструктурой. По аналогии с содержанием §§ 4—5 легко видеть, что с этой точки зрения следует учитывать только косые произведения $H^{i}\mathrm{H}$ $(i = 0, 1, 2)$. Для них имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Косое произведение $H^{0}\mathrm{H}$ является полуструктурой тогда и только тогда, если H имеет единицу e, H — единицу ε и (9. 1)—(12. 1), (9. 2)—(12. 2) выполняются тождественно.

Следствие. Если $H^{0}\mathrm{H}$ является полуструктурой, то (13. 1), (13. 2), (14. 1), (14. 2) выполняются тождественно.

Теорема 2. Если $H^{0}\mathrm{H}$ является специальным косым произведением, то в теореме 1 условие (12. 1) может быть заменено условиями (13. 1) и (15. 1), а (12. 2) — условиями (13. 2) и (15. 2).

Теорема 3. Косое произведение $H\,{}^{1}\,\mathrm{H}$ является полуструктурой тогда и только тогда, если H имеет единицу ε и (9. 1), (10. 1), (10. 2), (11. 1), (14. 1) выполняются тождественно. $H\,{}^{2}\,\mathrm{H}$ является полуструктурой тогда и только тогда, если оно совпадает с прямым произведением полуструктур H, H.

Теорема 4. Косое произведение $H\,{}^{i}\,\mathrm{H}$ $(i = 0, 1)$ имеет единицу тогда и только тогда,[14] если H, H оба имеют единицу (их единицы обозначаем через e соотв. ε), и в случае $H\,{}^{0}\,\mathrm{H}$ условия (22. 1)—(22. 4), в случае $H\,{}^{1}\,\mathrm{H}$ условия (22. 2)—(22. 4) выполняются для любых $x(\in H)$, $\xi(\in \mathrm{H})$. При выполнении этих условий (e, ε) является единицей алгебры $H\,{}^{i}\,\mathrm{H}$ $(i = 0, 1)$.

Следствие. Полуструктура вида $H\,{}^{i}\,\mathrm{H}$ $(i = 0, 1)$ имеет единицу тогда и только тогда, если она является специальным косым произведением полуструктур H, H.

В § 8 приводятся примеры косых произведений типа $H\,{}^{i}\,\mathrm{H}$ $(i = 0$ соотв. $i = 1)$, являющихся полуструктурами, но не совпадающих с прямым произведением.

В § 9 вышеизложенные результаты применяются к структурам. При этом получается

Следствие из теоремы 7. Существует единственное косое произведение[15] с двумя действиями структур L, Λ, которое

(I) образует структуру относительно этих двух действий и

(II) полуструктуры которого относительно соединения соотв. пересечения являются косыми произведениями Редеи, соответствующих полуструктур L и Λ,

а именно прямое произведение структур L, Λ.

[14] Независимо от того, образует ли косое произведение полуструктуру или нет.

[15] В смысле общего определения [6].

BEWEIS EINER VERMUTUNG VON A. VÁZSONYI

Von

A. HEPPES (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Herr Professor P. ERDÖS machte mich auf eine, auch in einer seiner Arbeiten [1] erwähnte, von A. VÁZSONYI stammende Vermutung aufmerksam. In dieser Arbeit [1] wird unter anderen der folgende Satz bewiesen: Unter den $\binom{n}{2}$ Entfernungen zwischen den Punktpaaren einer Punktmenge von n Punkten in der Ebene gibt es höchstens n, die dem Durchmesser der Punktmenge gleich sind. Die Vermutung von VÁZSONYI bezieht sich auf das entsprechende räumliche Problem, und wird durch den folgenden Satz bestätigt:

Unter den Strecken, die die Punktpaare einer Punktmenge von n Punkten verbinden, gibt es höchstens $2n-2$, *die dem Durchmesser der Punktmenge gleich sind.*

Wir werden annehmen, daß die Länge des Durchmessers gleich 1 ist, was keine Einschränkung bedeutet. Im folgenden werden jene Strecken, die zwei Punkte der Punktmenge verbinden und gleich deren Durchmesser sind, Durchmesser genannt.

Wir werden den Satz zuerst für solche Punktmengen beweisen, in deren jeden Punkt mindestens drei Durchmesser münden.

DEFINITION. Wir nennen Kugelpolyeder den Durchschnitt endlich vieler Einheitskugeln („Faktorkugeln"), wenn dieser Durchschnitt durch wenigstens drei Kugeloberflächen begrenzt ist. Wir verstehen unter den Seitenflächen des Kugelpolyeders jene zusammenhängenden Flächenteile je einer Faktorkugel, die das Kugelpolyeder begrenzen. Die Kreisbogen, die die Seitenflächen begrenzen, nennen wir Kanten, und die Schnittpunkte der Kanten Ecken. Eine Kante kann natürlich kein Hauptkreisbogen sein.

HILFSSATZ. *Die Oberfläche einer Faktorkugel eines beliebigen Kugelpolyeders enthält höchstens eine Seitenfläche des Kugelpolyeders.*

BEMERKUNG. Es ist leicht einzusehen, daß eine Vollkugel vom Radius 1 samt zwei Punkten eines Einheitskreises auch den durch diese Punkte bestimmten kürzeren Bogen dieses Kreises enthält.

Gehört ein Punkt zu allen Faktorkugeln und ist er auf der Oberfläche einer Faktorkugel, dann ist dieser Punkt ein Randpunkt des Kugelpolyeders. Mit Hinsicht auf die obige Bemerkung erhalten wir folgendes: Gehören zwei Punkte der Oberfläche einer Faktorkugel zum Rande des Kugelpolyeders, dann enthält der Rand auch den die zwei Punkte verbindenden kürzeren Hauptkreisbogen derselben Faktorkugel. Daraus folgt die Richtigkeit des Hilfssatzes, da zwei Randpunkte einer Faktorkugel, die auf der Oberfläche des Kugelpolyeders liegen, zu derselben Seitenfläche gehören müssen.

Beweis. Wir betrachten nun eine Punktmenge M_n von n Punkten mit der Bedingung, daß mindestens in jedem Punkte drei Durchmesser eintreffen. Wir bezeichnen ihre Punkte mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Wir schreiben nun um alle Punkte P_i von M_n je eine Einheitskugel K_i, und betrachten das Kugelpolyeder K, welches als Durchschnitt der Kugeln K_i entsteht.

Das Kugelpolyeder K enthält alle Punkte von M_n, weil der Durchmesser $D(M_n)=1$ ist. Andererseits sind alle Punkte von M_n auf der Oberfläche von K, da ein jeder Punkt P_i am Rande von (mindestens drei) Faktorkugeln liegt.

Wir betrachten eine beliebige Kugel K_i. Der Rand von K_i enthält laut Voraussetzung mindestens drei Punkte von M_n. Bei dem Beweis des Hilfssatzes haben wir gesehen, daß wenn zwei Punkte von K_i am Rande von K liegen, so ist auch ein sie verbindender Hauptkreisbogen von K_i auf der Oberfläche von K. Dieser Hauptkreisbogen kann keine Kante von K sein, weil die Kanten Bögen von kleinerem Radius sind. Folglich enthält der Rand von K_i mindestens eine Seitenfläche von K. Durch Anwendung des Hilfssatzes ergibt sich also, daß auf der Oberfläche der Kugel K_i genau eine Seitenfläche F_i des Kugelpolyeders K liegt.

Wir zeigen, daß ein jeder Punkt P_i eine Ecke von K ist, und daß in P_i ebenso viel Durchmesser wie Kanten eintreffen. Seien $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_s}$ die anderen Enden der von P_i ausgehenden Durchmesser ($s \geqq 3$). Die Flächen $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_s}$ und nur diese enthalten den Punkt P_i, woraus folgt, daß P_i eine Ecke ist, und im Punkte P_i genau s Kanten zusammentreffen.

Es ist möglich, daß K außer $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noch weitere Ecken besitzt. In jede Ecke laufen natürlich mindestens drei Kanten.

Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein: f bezeichne die Anzahl der Seitenflächen, k der Kanten, e der Ecken von K, und d der Durchmesser von M_n. Das bis jetzt bewiesene besagt:

$$f=n, \quad e=n+r \qquad (r \geqq 0).$$

Durch Abzählen der in den einzelnen Ecken eintreffenden Kanten ergibt sich

$$2k \geqq 2d+3r.$$

Da der Eulersche Polyedersatz auch für Kugelpolyeder gültig ist, also $f+e=k+2$ besteht, ergibt sich

$$n+(n+r)=k+2=\frac{2d-3r+4}{2},$$

woraus wegen $r \geq 0$ die behauptete Ungleichung $d \leq 2n-2$ folgt.

Wir beweisen nun unseren Satz für beliebige endliche Punktmengen mit vollständiger Induktion bezüglich der Anzahl der Punkte. Die Richtigkeit des Satzes ist für zwei Punkte trivial. Es sei $n>2$, und wir nehmen an, daß der Satz für Punktmengen von $n-1$ Punkten richtig ist.

Es sei M_n eine aus n Punkten bestehende Punktmenge vom Durchmesser 1. Wenn aus jedem Punkte von M_n mindestens drei Durchmesser auslaufen, dann ist die Anzahl der Durchmesser, wie schon bewiesen, höchstens $2n-2$. Enthält M_n einen Punkt P, in dem höchstens zwei Durchmesser eintreffen, dann zerlegen wir M_n in P und in eine Menge M_{n-1}, die aus M_n durch Weglassen von P entsteht. Die Anzahl der Durchmesser von M_{n-1} ist laut Voraussetzung höchstens $2(n-1)-2$. Da aber im Punkte P höchstens zwei Durchmesser von M_n eintreffen, ist die Anzahl der Durchmesser von M_n höchstens $2n-2$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken, daß man für $n \geqq 4$ leicht solche Punktmengen finden kann, die genau $2n-2$ Durchmesser besitzen. Es genügt nämlich die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders von der Kantenlänge 1, ferner $n-4$ weitere Punkte auf einer Kante jenes Kugelpolyeders zu nehmen, welches durch die um die vier Ecken geschriebenen Einheitskugeln bestimmt ist.

Durch Anwendung unseres Satzes kann die folgende Behauptung leicht bewiesen werden:

Jede endliche Punktmenge M des dreidimensionalen Raumes vom Durchmesser $D(M)$ ist in vier Teilmengen mit kleineren Durchmessern zerlegbar.

Dies ist ein spezieller Fall der folgenden Vermutung von K. BORSUK [2]: „Jede Punktmenge M des n-dimensionalen Raumes vom Durchmesser $D(M)$ ist in $n+1$ Teilmengen mit kleineren Durchmessern zerlegbar."

Der Beweis ergibt sich unmittelbar unter Anwendung unseres Satzes mit vollständiger Induktion bezüglich der Anzahl der Punkte ähnlich wie wir dasselbe in einer gemeinsamen Arbeit mit P. RÉVÉSZ [3] bewiesen haben.

Nach Beenden meiner Arbeit habe ich durch Mitteilung von Prof. P. ERDÖS erfahren, daß B. GRÜNBAUM (Jerusalem) denselben Satz bewiesen hat, seine Arbeit ist aber bei Abschließen meiner Arbeit noch nicht erschienen.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdős, On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly*, **53** (1946), S. 248—250.

[2] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, **20** (1933), S. 177—190.

[3] A. Heppes und P. Révész, Zum Borsukschen Zerteilungsproblem, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), S. 159—162.

(Eingegangen am 3. September 1956.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ГИПОТЕЗЫ А. ВАЖОНЬИ

А. Хеппеш (Будапешт)

(Резюме)

Известно [1], что среди $\binom{n}{2}$ расстояний между точками некоторого множества, состоящего из лежащих в одной плоскости n точек, не более n могут быть равны диаметру множества, т. е. наибольшему из этих расстояний.

Настоящая работа содержит доказательство одной гипотезы Важоньи, согласно которой в множестве, состоящем из n точек пространства, наибольшее расстояние может встречаться лишь $2n-2$ раза.

Примеры, данные для любого $n \geq 4$, доказывают, что данная граница точна для всех $n \geq 4$.

ON ABELIAN GROUPS IN WHICH EVERY HOMOMORPHIC IMAGE CAN BE IMBEDDED

By

L. FUCHS (Budapest), A. KERTÉSZ and T. SZELE (Debrecen)

(*Presented by* L. RÉDEI)

§ 1. Introduction

In a previous paper [5][1] we have determined the structure of all abelian groups every subgroup of which is an endomorphic image of the group. Now we are concerned with the dual of this problem, namely, we describe all abelian groups G with

Property Q. *Every homomorphic image of G can be isomorphically imbedded in G.*

Otherwise expressed, G has property Q if to every factor group G/H of G there exists a subgroup F of G such that $F \sim G/H$.

The problem of determining all groups with property Q has been stated in our cited paper [5]. Let us mention that the problem arising by the conjunction of these problems has been discussed in details in [2] and [3].

For the terminology and notations we refer to our paper [5].

The following lemmas will be made use of.

LEMMA 1. Any p-group G has a decomposition $G = G_1 + G_2$ where G_1 is a bounded group and rank $G_2 = \min_n$ rank $(p^n G)$ = final rank of G.

LEMMA 2. Each mixed group G has a decomposition $G = G_1 + G_2$ where G_1 is a torsion group whose p-components are bounded and G_2 is a mixed group with the following property: for each prime p_i, the p_i-component of the torsion subgroup of G_2 has a rank not exceeding any prescribed cardinal number $\mathfrak{m}_i$ with $\mathfrak{m}_i \geqq \max(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{r}, \aleph_0)$. Here $\mathfrak{p}_i$ is the final rank of the p_i-component of the torsion subgroup of G and $\mathfrak{r}$ is the torsion free rank of G.

LEMMA 3. Each p-group G contains a basic subgroup B such that rank $(G/B) = \min_n$ rank $(p^n G)$.

[1] The numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of this paper.

LEMMA 4.[2] If G is a group with infinite torsion free rank $\mathfrak{r}$ and $\mathfrak{r} \geq \mathfrak{p}_i$ holds for the rank $\mathfrak{p}_i$ of every p_i-component of the torsion subgroup of G, then G is isomorphic to some subgroup of the complete group[3]

$$\sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} + \sum_i \sum_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{C}(p_i^\infty).$$

LEMMA 5. Let J be a torsion free group of finite rank, S a serving subgroup of J and assume that all the elements of J, not contained in S, are of the same type τ. Then J is the direct sum of S and rational groups (of type τ) if (and only if) the elements $\neq 0$ of J/T have the same type τ for every serving subgroup T of J with $T \supset S$.

For the proofs of Lemmas 1, 2 and 4 see [3], for Lemma 3 we refer to [4] or [7], while Lemma 5 is a particular case of Theorem 8.4 in [1].

§ 2. Torsion groups with property Q

We begin with the description of the torsion groups with property Q. Since it is evident that a torsion group G has property Q if and only if every primary component of it has the same property, it follows that it suffices to consider only p-groups with property Q.

Our main result on p-groups is the following theorem.

THEOREM 1. *An abelian p-group G has property* Q *if and only if it contains a direct summand of the form*

$$\sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{C}(p^\infty) \tag{1}$$

where $\mathfrak{m}$ *is the final rank of G, i. e.*

$$\mathfrak{m} = \min_n \text{rank } (p^n G).$$

Assume G is a p-group of property Q and $\mathfrak{m}$ is the final rank of G. Choose a basic subgroup B of G such that rank $(G/B) = \mathfrak{m}$ (cf. Lemma 3). Then G/B is isomorphic to (1) and therefore G contains a subgroup, and hence a direct summand isomorphic to (1).

Conversely, let G have a direct summand G_1 of the form (1). By Lemma 1 we decompose G in the form $G = G_2 + G_2^*$ where G_2 is a bounded group and rank $(G_2^*) = \mathfrak{m}$. Clearly, $G_1 \subset G_2^*$ and therefore we have $G_2^* = G_1 + G_3$.

[2] The statement of this Lemma holds true also when the inequality concerning the ranks is not assumed, but we do not need this strengthened statement.

[3] $\mathfrak{R}$ denotes the additive group of the rationals, $\mathfrak{C}(n)$ a cyclic group of order n where $1 < n \leq \infty$, while $\mathfrak{C}(p^\infty)$ is a quasicyclic group.

If $G \sim H$, then decompose H again by Lemma 1 in the form $H = H_1 + H_2$ where H_2 is a bounded group and rank $(H_1) = \min_n$ rank $(p^n H) \leq \mathfrak{m}$. Considering that for each n we have rank $(p^n H) \leq$ rank $(p^n G)$, by an eventual adjunction of certain direct summands of H_2 to H_1 we may get from $H = H_1 + H_2$ a decomposition $H = H_1^* + H_2^*$ $(H_1^* \supseteq H_1, H_2^* \subseteq H_2)$ such that rank $(p^n H_2^*) \leq$ rank $(p^n G_2)$ for each n and rank $(H_1^*) \leq \mathfrak{m}$. Then H_2^* may be imbedded in G_2 and H_1^* in G_1; this completes the proof.

Let us mention the following immediate corollary:

COROLLARY. *A reduced abelian p-group G has property* Q *if and only if it is bounded.*

§ 3. Mixed groups of infinite torsion free rank with property Q

From now on we consider groups G whose torsion free rank $\mathfrak{r}$ does not vanish. First we assume that $\mathfrak{r}$ is an infinite cardinal number.

THEOREM 2. *An abelian group G of infinite torsion free rank $\mathfrak{r}$ has property* Q *if and only if*

(i) $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{p}_i$ *holds for the final rank* $\mathfrak{p}_i$ *of the p_i-component T_i of the torsion subgroup T of G, for each prime p_i;*

(ii) *G contains a direct summand of the form*

$$\sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} + \sum_{i} \sum_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{C}(p_i^{\infty}). \tag{2}$$

Suppose G has property Q. Choose a basic subgroup B_i in each T_i such that rank $(T_i/B_i) = \mathfrak{p}_i$ (Lemma 3). Then the factor group of G with respect to the direct sum $\sum_{i=1}^{\infty} B_i$ contains

$$\sum_{i} \sum_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{C}(p_i^{\infty}) \tag{3}$$

as a subgroup, and thus property Q implies that G contains a subgroup, and hence a direct summand of the form (3).

Now take in the factor group G/T a maximal independent system a_α where α ranges over an index set $\mathfrak{A}$ of power $\mathfrak{r}$. The group $F = \{\ldots, a_\alpha, \ldots\} = \sum_{\alpha} \{a_\alpha\}$ is a free abelian group of rank $\mathfrak{r}\ (\geq \aleph_0)$, and therefore each group of power $\mathfrak{r}$, in particular,

$$R = \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} \tag{4}$$

is a homomorphic image of F. But a homomorphism $F \sim R$ may be extended in a unique way to a homomorphism $G/T \sim R$, since for each $x \in G/T$ there is a natural integer m with $mx \in F$ and the image of mx uniquely determines that of x (R is torsion free!). Thus $G \sim R$. Further, on account of

$$G \sim \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} \sim \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{C}(p_i^{\infty}),$$

G has a subgroup isomorphic to this latter group, and it results that G contains a subgroup, and hence a direct summand of the form (2) and $\mathfrak{p}_i \geqq \mathfrak{r}$ for each i.

Assume, conversely, that G has a direct summand of the type (2) and H is a homomorphic image of G. First of all we observe that the torsion free rank $\mathfrak{s}$ of H does not exceed $\mathfrak{r}$, and similarly rank $(p_i^n U_i) \leqq$ rank $(p_i^n T_i)$ holds for each p_i-component U_i of the torsion subgroup U of H and for every natural integer n (apply (i)).

Now apply Lemma 2 to the groups G and H to get $G = G_1 + G_2$ and $H = H_1 + H_2$ where the p_i-components of G_1 and H_1 are bounded and the rank of the p_i-component of G_2 and H_2, respectively, does not exceed $\max(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{r}, \aleph_0) = \mathfrak{p}_i$. By separating certain direct summands of H_1 and adjoining them to H_2, we may assume that the p_i-components of H_1 vanish for those primes p_i for which rank $(U_i) \leqq \mathfrak{p}_i$. Moreover, it is easily seen that there is no loss of generality in supposing that the p_i-components of H_1 may be imbedded in those of G_1. Then the p_i-components of H_2 are of rank $\leqq \mathfrak{p}_i$, and so, by Lemma 4, H_2 (of torsion free rank $\mathfrak{s}$) is imbeddable in (2), q. e. d.

§ 4. Mixed group of finite torsion free rank with property Q

It remained to discuss the case in which the torsion free rank of G is a natural integer r.

THEOREM 3. *A group G of torsion free rank $r (< \aleph_0)$ is of property* Q *if and only if*

(5) $$G = F + T = F + \sum_{i=1}^{\infty} T_i$$

where

(i) *every T_i is a p_i-group of infinite final rank $\mathfrak{p}_i$,*

(ii) *every T_i is of property* Q,

(iii) *F is a torsion free group of rank r,*

(iv) *$F = R(\sigma_1) + \cdots + R(\sigma_r)$ where $R(\sigma_i)$ are rational groups of type σ_i satisfying $\sigma_1 \geqq \ldots \geqq \sigma_r$.*

A. To prove the *necessity*,[4] first of all observe that $\bar{G} = G/T$ (T is the orsion subgroup of G) may be mapped homomorphically onto $\mathfrak{C}(p_i^\infty)$ or $\mathfrak{C}(p_i^k)$ for every $k = 1, 2, \ldots$ according as $p_i\bar{G} = \bar{G}$ or not. Hence T_i conains either $\mathfrak{C}(p_i^\infty)$ or $\mathfrak{C}(p_i^k)$ for each k. Now

$$T_i = \sum_n \mathfrak{C}(p_i^\infty) + S_i \qquad (p_i^{m_i} S_i = 0)$$

s impossible with a finite n, because T_i would then be a direct summand of G, $G = T_i + G'$, and G had a homomorphic image $T_i + \mathfrak{C}(p_i^\infty)$ or $T_i + \mathfrak{C}(p_i^k)$ with $k > m_i$, a contradiction. This establishes (i).

Hypothesis guarantees that G contains a subgroup F isomorphic to $\bar{G} = G/T$. If $\{F, T\} = G$, then we are ready with the proof of (5). If $\{F, T\} = F + T \subset G$, then $\bar{G} = G/T \supset \{F, T\}/T = \bar{F} \simeq F/F \cap T \sim F$, i. e. $\bar{G}$ contains a proper subgroup $\bar{F}$ isomorphic to $\bar{G}$ itself. $\bar{F}$ must be of finite ndex in $\bar{G}$, for the factor groups of a torsion free group of finite rank r with respect to its subgroups of the type $\sum_r \mathfrak{C}(\infty)$ are torsion groups with p-components of finite rank and they differ at most in a finite group from each other; therefore the statement follows by taking $\bar{F}/\bar{B}$ and $\bar{G}/\bar{B}$ with $\bar{B} = \{b_1, \ldots, b_r\}$ (b_i a maximal independent system in F). Thus $\{F, T\}$ is of finite index m in G, and let $x_1, \ldots, x_m$ be a complete representation system mod $\{F, T\}$. Then $mx_i = f_i + t_i$ ($f_i \in F, t_i \in T$), and if m' is the l. c. m. of the orders of t_i, then $mm'x_i \in F$, i. e. $G' = \{F, x_1, \ldots, x_m\}$ has the property $mm'G' \subseteq F$. This shows that the torsion subgroup T' of G' is of bounded order, thus BAER—FOMIN's theorem implies $G' = T' + F'$ with a torsion free group F'. Evidently, $F' \cap T = 0$ and $\{F', T\} = \{F', T', T\} = \{G', T\} = G$, establishing (5) (with F' in the place of F) and (iii).

Now (ii) follows at once by observing that every homomorphic image S_i of T_i being a homomorphic image of $F + T$ must be imbedded, by the property Q, in $F + T$ and hence in T_i.

In order to establish (iv), let us first remark that if H is any torsion free homomorphic image of $\bar{G} \simeq F$, then it must be isomorphic to some subgroup of $F + T$, and hence to one of F. Thus the torsion free group F has the property (*) *every torsion free homomorphic image of F can be imbedded in F.* We show that for groups F of finite rank r property (*) implies (iv).

Consider the types of the elements in F. Since the rank of F is finite, the types satisfy the maximal condition.[5] Assume $\tau(a)$ and $\tau(b)$ are maximal types. Map F homomorphically into $\mathfrak{R}$ so that a and b have the same non-

[4] For this part of proof see [6].

[5] For this simple fact see e. g. BAER [1], statement (9.1), p. 109.

zero image. Then we get a subgroup H of $\mathfrak{R}$ whose type must be $\geqq \tau(a)$ and $\geqq \tau(b)$, consequently, by (*), there is but one maximal type τ_1 in F.

Let $g_1, \dots, g_{r_1}$ be a maximal independent system of elements of type τ_1 in F and suppose that among the types $\neq \tau_1$ there are two different maximal ones, say, $\tau(c)$ and $\tau(d)$. Of course, $g_1, \dots, g_{r_1}, c, d$ must then be independent. We map F homomorphically into the direct sum of r_1+1 groups $\mathfrak{R}$ in some way, but so that the images $g'_1, \dots, g'_{r_1}, c'$ of $g_1, \dots, g_{r_1}, c$, respectively, be independent and the image of d coincide with c'. The homomorphic image H of F, thus arising, contains the element c' which is independent of $g'_1, \dots, g'_{r_1}$ and whose type is $\geqq \tau(c)$ and $\geqq \tau(d)$. Since H must be imbeddable in F, we infer that among the types $\neq \tau_1$ there is only one maximal, say τ_2. Thus proceeding we arrive at the conclusion that the types of the elements in F form a finite descending chain

$$\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_s \qquad \text{with } s \geqq 1.$$

To each τ_i we let correspond the subgroup F_i of all elements in F whose types are $\geqq \tau_i$. Then

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_s = F \tag{6}$$

where we put $r_i = r(F_i/F_{i-1})$. Clearly, each element of F_i, not in F_{i-1}, has the same type τ_i.

Next consider a serving subgroup U of F_i such that $U \supseteq F_{i-1}$, and choose a subgroup X in U maximal with respect to the property $X \cap F_{i-1} = 0$, and observe that X is serving and every element of U/X has in F_i/X a type $\geqq \tau_i$, and $r(U/X) = r(F_{i-1})$. Property (*) implies that F/X and thus F_i/X is imbeddable in F, consequently, those elements of F_i/X which do not belong to U/X are of type $\leqq \tau_i$, and therefore just of type τ_i. Now we see that for $i=1$, all the elements of F_1 are of type τ_1 and no torsion free factor group of F_1 contains elements of a greater type than τ_1. Lemma 5 implies that F_1 is the direct sum of r_1 rational groups of type τ_1. — For $i=2$ we obtain that the elements of F_2/X, not in U/X are of type τ_2. Choose a maximal independent system $g_1, \dots, g_{r_1}$ in U/X and then an element $h \in F_2/X, \notin U/X$; the types of g_i equal τ_1 and $\tau(h) = \tau_2$. Every element x of V/X (V/X is the serving subgroup generated by U and h) may be represented in a unique way in the form $x = \varrho_1 g_1 + \dots + \varrho_{r_1} g_{r_1} + \varrho_0 h$ with rational coefficients ϱ_i. When x is running over V/X, $\varrho_1, \dots, \varrho_{r_1}, \varrho_0$ run over some subgroups R_i of the rationals. The types of these R_i can not exceed τ_1 (in the contrary case V/X would have a factor group with elements of type $> \tau_1$), so that there is a rational integer n such that for all elements x, the components $n\varrho_1 g_1, \dots, n\varrho_{r_1} g_{r_1}$ all belong to U/X. But then each $n\varrho_0 h$ belongs to V/X and $\tau(h) = \tau_2$ implies that ϱ_0 runs over a rational group of type τ_2. Conse-

quently, the factor group of V/X with respect to U/X is of type τ_2, thus V/U is of type τ_2. From Lemma 5 (applied to F_2 and its subgroup F_1) we conclude that F_2 is the direct sum of F_1 and r_2 rational groups of type τ_2. By similar arguments we may complete the proof of (iv).

B. We proceed to prove the *sufficiency*. Suppose G is a group of the form (5) subject to (i)—(iv) and H is a homomorphic image of G. We denote by S the torsion subgroup of H and by S_i its p_i-component.

We begin by proving that $\bar{H}=H/S$ may be imbedded in F. First of all we observe that no torsion free homomorphic image J of F may contain any element of type $>\sigma_1$. In fact, in the contrary case F would have also a torsion free homomorphic image K of rank 1 and of type $>\sigma_1$; but this is impossible in view of the facts that each homomorphism of F into $\mathfrak{R}$ is by the images of $R(\sigma_1)$ uniquely determined and that, on account of the finiteness of the rank r, the images of $R(\sigma_i)$ cannot exhaust any subgroup of $\mathfrak{R}$ whose type exceeds σ_1. It also follows that J cannot have any torsion free factor group containing elements of type $>\sigma_1$.

Now suppose that all the elements of F have the same type σ_1. What has been said shows that all the elements of any torsion free factor group J of F as well as every torsion free factor group of J are of the same type σ_1; thus Lemma 5 implies that J is the direct sum of rational groups of type σ_1. Clearly, J is therefore imbeddable in F. — Next assume that for groups F containing elements of at most $k-1$ different types we have already proved that any torsion free homomorphic image J of F is the direct sum of rational groups and is imbeddable in F. Let F be a group with k different types of elements. We denote by F_1 and J_1 the subgroup of F and J, respectively, consisting of all elements of maximal type σ_1. Under the mapping $F\sim J$, F_1 is mapped into J_1, therefore we have $\bar{F}=F/F_1\sim J/J_1=\bar{J}$. For the group $\bar{F}$ and its image $\bar{J}$ we may apply the induction hypothesis to conclude that $\bar{J}$ is the direct sum of rational groups and is imbeddable in $\bar{F}$. By a $k-1$-times application of Lemma 5 and by taking into account that the types in J are monotone descending, we get $J=J_1+J_2$ with $J_2\simeq\bar{J}$. Note that all the elements of J_1 as well as those of its torsion free factor groups have the type σ_1, so that J_1 is the direct sum of rational groups of type σ_1. Evidently, $r(J_1)\leqq r(F_1)$ holds whence J_1 may be imbedded in F_1 and thus J in F. — We have thus shown that H/S can be imbedded in F, indeed.

Next apply the same argument to G and H as that used in the last paragraph of § 3 to get direct decompositions $G=G_1+G_2$ and $H=H_1+H_2$ such that the p_i-components of G_1 and H_1 are bounded, H_1 is imbeddable in G_1 and the p_i-components of H_2 are of rank $\leqq \mathfrak{p}_i$. It follows from (i), (ii) and Theorem 1 that the torsion subgroup S_2 of H_2 can be imbedded in

a direct summand of[6] T_2 (and thus of G) having the form $U = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p_i} \mathcal{C}(p_i^{\infty})$. Now take into account that if we imbed a mixed group H_2 in a minimal complete group C, then the subgroup $\{H_2, D\}$ of C where D is the torsion subgroup of C, splits into $\{H_2, D\} \simeq D + H_2/S_2$, for $\{H_2, D\}/D \simeq H_2/H_2 \cap D$ and $H_2 \cap D = S_2$. Considering that $H_2/S_2 \simeq H/S$ was proved to be imbeddable in F, further D must be isomorphic to a subgroup of U, it results the desired fact: H can be imbedded in G, q. e. d.

(Received 24 September 1956)

Bibliography

[1] R. BAER, Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. J.*, **3** (1937), pp. 68—122.

[2] L. FUCHS, A. KERTÉSZ and T. SZELE, On a special kind of duality in group theory. I., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), pp. 169—178.

[3] L. FUCHS, On a special kind of duality in group theory. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), pp. 299—314.

[4] L. FUCHS, On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), pp. 267—288.

[5] L. FUCHS, A. KERTÉSZ and T. SZELE, On abelian groups whose subgroups are endomorphic images, *Acta Sci. Math. Szeged*, **16** (1955), pp. 77—88.

[6] L. FUCHS, Über universale homomorphe Bilder und universale Untergruppen von abelschen Gruppen (under press).

[7] Л. Я. Куликов, Обобщенные примарные группы. I—II, Труды Моск. Мат. Общ., **1** (1952), pp. 247—326; **2** (1953), pp. 85—167.

[6] T_2 is the G_2-component of T in the direct decomposition $G = G_1 + G_2$. (Observe that $G_1 \subseteq T$!)

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ, В КОТОРЫЕ МОГУТ БЫТЬ ВЛОЖЕНЫ ВСЕ ИХ ГОМОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Л. Фукс (Будапешт), А. Кертес и Т. Селе (Дебрецен)

(Резюме)

Авторы дают полную характеристику тех G абелевых групп, которые обладают следующим свойством:

Свойство Q. Каждое гомоморфное отображение группы G может быть вложено в G изоморфным образом.

Доказываются следующие теоремы:

1. Некоторая p-группа G в том и только в том случае обладает свойством Q, если у нее есть прямое слагаемое вида $\sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{C}(p^\infty)$, где $\mathfrak{m} = \min_n \operatorname{rank}(p^n G) =$ окончательный ранг G.

2. Группа G с бесконечным рангом без кручения $\mathfrak{r}$ обладает свойством Q точно в том случае, если (i) для всех простых p_i $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — окончательный ранг p_i-компоненты периодической подгруппы G, и (ii) G содержит прямое слагаемое вида $\sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} + \sum_i \sum_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{C}(p_i^\infty)$.

3. Группа G с конечным рангом без кручения r в том и только в том случае обладает свойством Q, если имеет вид $G = F + T = F + \sum_{i=1}^{m} T_i$, где (i) все T_i — p_i-группы с элементами неограниченного порядка; (ii) все T_i обладают свойством Q; (iii) F — группа без кручения ранга r; (iv) $F = R(\sigma_1) + \cdots + R(\sigma_r)$, где $R(\sigma_i)$ — рациональные группы, типы σ_i которых удовлетворяют неравенству $\sigma_1 \geqq \cdots \geqq \sigma_r$.

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1956. X. 15. — Terjedelem: 18.50 (A/5) ív, 3 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 56-4167 Felelős vezető: Vincze György

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in English, German, French and Russian.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes.

Manuscripts should be adressed to:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address

The rate of subs.cription to the Acta Mathematica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „*Kultura*" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Mathematica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux „*Kultura*" (Budapest, I, Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étrange chez tous les représentants ou dépositaires.

„*Acta Mathematica*" публикует трактаты из области математических наук на русском немецком, английском и французском языках.

„*Acta Mathematica*" выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Mathematica, Budapest 502, Postafiók 24.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена „*Acta Mathematica*" — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет „*Kultura*" (*Budapest, I., Fő utca 32.* Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

Reprinted by arrangement with the publishers
,,KULTURA'' Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
Budapest, POB. 149.
Hungary

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

TOMUS VIII

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1957

INDEX

TOMUS VIII

AczÉL, J., Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. III—IV 19
AczÉL, J., Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. V 53
ALEXITS, G., Sur la convergence absolue de certains développements orthogonaux . . 303
ARATÓ, M. and RÉNYI, A., Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials 91
BALÁZS, J. and TURÁN, P., Notes on interpolation. II 201
BIHARI, I., Researches of the boundedness and stability of the solutions of non-linear differential equations 261
ERDŐS, P. and RÉNYI, A., On the number of zeros of successive derivatives of entire functions of finite order 223
ERDŐS, P. et MARCUS, S., Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes 443
FLADT, K., Bemerkungen zur Darstellung der ebenen hyperbolischen Geometrie im ebenen euklidischen hyperbolischen Kreisbündel 99
FUCHS, L., On a directly indecomposable abelian group of power greater than continuum 453
GRÄTZER, G. und SCHMIDT, E. T., Über die Anordnung von Ringen 259
GRÄTZER, G. and SCHMIDT, E. T., On a problem of M. H. Stone 455
KERTÉSZ, A., Beiträge zur Theorie der Operatormoduln 235
Киш, О., Замечание о механической квадратуре 473
KŐVÁRI, T., A note on entire functions 87
MARCUS, S. et ERDŐS, P., Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes 443
MOLNÁR, J., Über eine Vermutung von G. Hajós 311
MOLNÁR, J., Über eine Übertragung des Hellyschen Satzes in sphärische Räume . . . 315
PRÉKOPA, A., On additive and multiplicative totals 107
PRÉKOPA, A., On stochastic set functions. II 337
PRÉKOPA, A., On stochastic set functions. III 375
RAPCSÁK, A., Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv-ebene Räume 1
RÉDEI, L., Die einstufig nichtkommutativen endlichen Ringe 401
RÉNYI, A. and ARATÓ, M., Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials 91
RÉNYI, A., On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables 193
RÉNYI, A. and ERDŐS, P., On the number of zeros of successive derivatives of entire functions of finite order 223
RÉNYI, A., Representations for real numbers and their ergodic properties 477

Rényi, Catherine, On periodic entire functions 227
Sands, A. D., On the factorisation of finite abelian groups 65
Schmidt, E. T. und Grätzer, G., Über die Anordnung von Ringen 259
Schmidt, E. T. and Grätzer, G., On a problem of M. H. Stone 455
Szász, P., Begründung der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, unabhängig von der Trigonometrie dieser Ebene . . . 139
Szász, P., Die hyperbolische Trigonometrie als Folge der analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene 159
Szász, P., Ein elementargeometrischer Beweis von H. A. Schwarz vereinfacht und unabhängig vom Parallelenaxiom geführt 217
Sz.-Nagy, B., Suites faiblement convergentes de transformations normales de l'espaee hilbertien 295
Szüsz, P., Bemerkung über die Verteilung der Ziffern in der Cantorschen Reihe reeller Zahlen 163
Takács, L., On some probability problems concerning the theory of counters 127
Takács, L., On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes . 169
Takács, L., On limiting distributions concerning a sojourn time problem 279
Takács, L., On a probability problem concerning telephone traffic 319
Takács, L., On a queueing problem concerning telephone traffic 325
T. Sós, Vera, On the theory of diophantine approximations. I 461
Turán, P. and Balázs, J., Notes on interpolation. II 201